

带电粒子与静电波相互作用单粒子方程的严格解

杨一明¹⁾ 靳振兴 钱宝良

(国防科学技术大学光电科学与工程学院 长沙 410073)

摘要 研究了带电粒子与静电波之间的相互作用, 给出了带电粒子运动方程的严格解, 得出了粒子的速度的解析表达式, 同时推导出了带电粒子被静电波俘获的数学条件, 讨论了粒子与波能量交换的物理过程, 对现有等离子体物理的教材中相关的问题是一个补充. 本文结果对带电粒子加速器、微波管以及基础等离子体问题的研究有一定参考意义.

关键词 带电粒子 静电波 方程的严格解

1 引言

对带电粒子与电磁波之间的相互作用的研究是非常重要的课题, 因为在诸多领域, 如基础等离子体物理, 粒子加热和粒子加速器等都会涉及这种相互作用过程. 为了进一步理解其相互作用过程的物理图像, 有些学者^[1-4]先后求解了带电粒子在线极化、圆极化和椭圆极化电磁波中的运动方程, 得到了有用的结果. 在文献[5]中, Roberts和Buchsbaum研究了带电粒子在圆极化电磁波和均匀稳恒磁场中的运动情况, 后来Villalon和Burke^[6]又用数值方法研究了这一问题, 获得了有价值的结果. 文献[7]研究了带电粒子在一组圆极化电磁波的叠加波和均匀稳恒磁场中的运动情况, 从运动方程得出了带电粒子运动速度、位置和能量的严格解, 把前人的结果做了进一步的推广.

本文严格求解了带电粒子在静电波电场中的运动方程式, 得出了粒子的速度的解析表达式, 同时推导出了带电粒子被静电波俘获的数学条件, 讨论了粒子与波能量交换的物理过程, 对现有等离子体物理的教材中相关的问题是一个补充. 本文结果对带电粒子加速器、微波管以及基础等离子体问题的研究有一定参考意义.

2 方程的严格解

考虑电量为 q 、质量为 m 、速度为 v 的带电粒子, 在静电波

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(kz - \omega t) \mathbf{z} \quad (1)$$

中作一维运动, E_0 为静电波电场的幅值. 其运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = -qE_0 \sin(kz - \omega t). \quad (2)$$

令 $\theta = kz - \omega t$, $v_{ph} = \omega/k$ 得

$$\frac{d[(v - v_{ph})^2]}{d\theta} = -\frac{2qE_0}{mk} \sin\theta, \quad (3)$$

解得

$$(v - v_{ph})^2 = \frac{2qE_0}{mk} \cos\theta + C, \quad (4)$$

其中 C 为待定常数. 假定 $\theta = 0$ 时 $v = v_0$, 则

$$(v - v_{ph})^2 = -\frac{2qE_0}{mk} (1 - \cos\theta) + (v_0 - v_{ph})^2. \quad (5)$$

因此, (5)式就是带电粒子速度的解析式, 从(5)式可以分析粒子与波之间的相互作用过程.

3 讨论

为了分析和讨论的方便, 我们把各个物理量进行无量纲化处理, 令 $\hat{v} = v/v_0$, $\hat{v}_{ph} = v_{ph}/v_0$, $\alpha = 2qE_0/mkv_0^2$, 则方程(5)变为

$$(\hat{v} - \hat{v}_{ph})^2 = -\alpha(1 - \cos\theta) + (1 - \hat{v}_{ph})^2. \quad (6)$$

从方程(6)可以看出, 如果方程在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 范围都成立, 则静电波不能俘获带电粒子的条件是

$$-\alpha(1 - \cos\theta) + (1 - \hat{v}_{ph})^2 \geq 0. \quad (7)$$

由于

$$-\alpha(1 - \cos\theta) + (1 - \hat{v}_{ph})^2 \geq (1 - \hat{v}_{ph})^2 - 2|\alpha|,$$

因此, 静电波能俘获带电粒子的条件是

$$(1 - \hat{v}_{ph})^2 - 2|\alpha| < 0, \quad \text{即 } |\alpha| > (1 - \hat{v}_{ph})^2/2. \quad (8)$$

因为此时必然存在 $\theta \in [0, 2\pi]$, 使得方程(6)不成立, 也就是说 θ 不能取满一个周期, 这正是粒子被静电波俘获的数学描述. $|\alpha| = (1 - \hat{v}_{ph})^2/2$ 为 θ 能够取任意实数的临界条件, 也是俘获粒子的边界, 如图1所示.

图1表示带电粒子被静电波俘获的参数关系. 从图中可以看出, 当使用的参数是 $|\alpha| = 0.1$, $\hat{v}_{ph} = 0.7$, 满足 $|\alpha| > (1 - \hat{v}_{ph})^2/2$ 时, θ 不能取满一个周期, 说明粒子被俘获于静电波中, 粒子与波之间发生较强的相互作用, 它们之间有能量交换. 当参数 $|\alpha| = 0.08$, $\hat{v}_{ph} = 0.6$, 满足 $|\alpha| = (1 - \hat{v}_{ph})^2/2$ 时, θ 能够取任意实数, 是临界情况. 当参数取 $|\alpha| = 0.05$, $\hat{v}_{ph} = 0.5$, 满足 $|\alpha| < (1 - \hat{v}_{ph})^2/2$ 时, 此时没有被俘获于静电波之中.

从(8)式 $|\alpha| > (1 - \hat{v}_{ph})^2/2$ 和 $\alpha = 2qE_0/mkv_0^2$ 可以看出, 波的幅值 E_0 越大或者 $(v_0 - v_{ph})^2$ 越小, 粒子越容易被俘获.

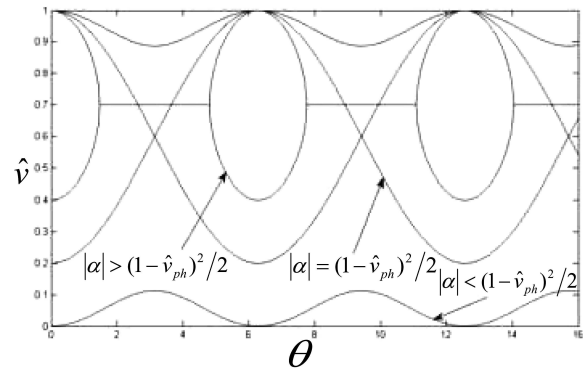


图1 带电粒子被静电波俘获的参数关系

参考文献(References)

- 1 Landau, Lifshitz E M. The Classical Theory of Fields [M]. Pergamon Press, Oxford, 1975. 118
- 2 Jory H R, Trivelpiece A W. J. Appl. Phys., 1968, **39**: 3053
- 3 Shesalin J V. IEEE Trans. Plasma Sci., 1988, **PS-16**: 390
- 4 Acherya S, Saxena A C. IEEE Trans. Plasma Sci., 1993, **PS-21**: 257
- 5 Roberts C S, Buchsbaum S J. Phys. Rev., 1964, **A135**: 381
- 6 Villalon E, Burke W J. Phys. Fluids, 1987, **30**: 36965
- 7 QIAN B L. Physics of Plasmas, 2000, **7**: 537

Exact Solution to the Equation of Motion of a Charged Particle Driven by an Electrostatic Wave

YANG Yi-Ming¹⁾ JIN Zhen-Xing QIAN Bao-Liang

(College of Optoelectric Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract An exact solution is derived for the equation of motion of a charged particle driven by an electrostatic wave. The explicit expression of particle velocity is obtained, and the trapping condition of the charged particle in the electrostatic wave is also derived exactly. The interaction between the charged particle and the electrostatic wave is discussed, which is a supplement to the existing textbook of plasma physics. The results are of interest to particle accelerators, microwave tubes, and basic plasma processes.

Key words charged particle, electrostatic wave, exact solution for the equation