

丰中子区幻数 $N=28$ 消失的相对论平均场证明*

丁斌刚

(湖州师范学院理学院 湖州 313000)

摘要 提出了一种从理论上检验壳效应的方法. 即在考虑了BCS近似的相对论平均场理论框架内, 通过计算粒子数的涨落, 发现涨落的大小和核的壳结构有紧密的关系, 由此从理论上证明了在滴线附近的丰中子区, 传统幻数 $N=28$ 已经消失.

关键词 相对论平均场理论 粒子数涨落 幻数 壳效应

1 引言

根据自然存在的元素的丰度值和稳定性, 在哈密顿算符中人为地加入了核的自旋-轨道耦合项而正确再现了原子核幻数的壳模型, 尽管在解释稳定核的许多性质上取得了巨大的成功, 但其本质上仍是一种唯象而局域的理论, 对远离稳定区的原子核性质的解释, 却往往无能为力. 所以, 关注非稳定区原子核的性质, 是核科学发展的必然. 而研究该区域原子核的壳结构, 即原有幻数的消失和新幻数的产生, 是最近数十年来核研究的一个日益活跃的重点方向. 因为它一方面有助于全面了解核结构进而揭示核子间相互作用的本质, 另一方面可以从理论上预言新的幻数并据此寻找可能存在的较长寿命的新核素. 1994年, T.R.Werner 等人^[1]通过研究核的质量、形变、半径和单粒子能级, 预言 $^{44}\text{S}_{28}$ 核的中子幻数 $N=28$ 消失. 1997年, T.Glasmacher 等人^[2]通过实验, 发现 $^{44}\text{S}_{28}$ 核与邻近核 $^{40,42}\text{S}$ 的 $B(E2; 0_{g.s}^+ \rightarrow 2^+)$ 跃迁几率有明显的差异. 2000年, F.Sarazin 等人^[3]的实验也认为核 $^{44}\text{P}_{28}$, $^{44}\text{S}_{28}$, $^{45}\text{Cl}_{28}$ 的中子壳效应已经减弱. 但 P.D.Cottle 等人^[4]建议测量 ^{42}Si 及邻近核 2_1^+ 态的能谱数据, 如 2_1^+ 态能量及约化电磁矩阵元 $B(E2; 0_{g.s}^+ \rightarrow 2_1^+)$, 认为这能提供 $N=28$ 幻数存在和消失的强有力证据. 但上述方法均需要相关的实验数据, 而在核的非稳定区, 往往难以获得准确有效的实验结果. 所以, 本文的目的就是在考虑了BCS理论的相对论平均场模型框架内

(RMF+BCS), 根据BCS理论下粒子数涨落和原子核壳结构的关系, 证明在远离稳定线的丰中子区, $N=28$ 这个中子幻数确已消失. 这种方法对远离稳定线核给出了可靠的结果, 对实验有参考价值. 因为相对论平均场模型已被证明不仅对稳定核, 而且对滴线区核都是十分有效的^[5-7].

2 理论框架

有关BCS理论和相对论平均场模型已有多种文献论述^[8-11]. 这里仅给出简明的理论框架. BCS理论下的波函数被定义为

$$|BCS\rangle = \prod_i (U_i + V_i a_i^\dagger a_i^\dagger) |0\rangle, \quad (1)$$

其中 U_i 及 V_i 是实数, 满足归一化条件 $U_i^2 + V_i^2 = 1$. 这个波函数代表了一个粒子数不守恒的体系. 要把这个波函数用于原子核体系, 必须加上限制条件

$$\bar{n} = \langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = n_0, \quad (2)$$

其中 \bar{n} 是 $|BCS\rangle$ 态下粒子数的平均值, n_0 是体系的粒子数. 利用变分原理 $\delta \bar{H} - \lambda \delta \bar{n} = 0$ 可得到单粒子能级空着和被占据的几率幅

$$U_i^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_i - \lambda)^2 - \Delta^2}} \right], \quad (3)$$

$$V_i^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_i - \lambda)^2 - \Delta^2}} \right]. \quad (4)$$

2006 - 11 - 01 收稿

* 国家自然科学基金(10475026, 10675046)资助

其中

$$\Delta = G \sum_i U_i V_i \quad (5)$$

是对能隙参数, 反映了原子核的奇偶质量差, G 是对力强度. 而粒子数的涨落

$$\begin{aligned} \Delta n &= \overline{[(n-\bar{n})^2]}^{1/2} = (\overline{n^2} - \bar{n}^2)^{1/2} = \\ &= \Delta \left[\sum_i \frac{1}{(\varepsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2} \right]^{1/2} = \\ &= 2 \left[\sum_i U_i^2 V_i^2 \right]^{1/2} = 2 \left[\sum_i (1 - V_i^2) V_i^2 \right]^{1/2}. \quad (6) \end{aligned}$$

为了在不同的元素之间作出对比, 引入相对涨落(以下简称涨落)

$$\eta = \frac{\Delta n}{n} \times 100\% = \frac{2 \left[\sum_i (1 - V_i^2) V_i^2 \right]^{1/2}}{n} \times 100\%. \quad (7)$$

由于壳模型理论是将中子和质子各自分为不同的壳层和单粒子能级, 所以, 上式可以理解为分别对应中子和质子的涨落. 这是我们计算粒子数涨落的最终公式. 而上式中的 V_i^2 由考虑了 BCS 理论的相对论平均场模型求解. 相对论平均场的出发点是一个包含核子和介子场的拉氏密度:

$$\begin{aligned} L &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \\ &= \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{R}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \\ &= g_\sigma \bar{\psi} \psi - g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \omega_\mu \psi - g_\rho \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu \psi - \\ &= e \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^\mu A_\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi, \quad (8) \end{aligned}$$

其中 ψ 和 M 代表核子场和核子质量, 介子场分别为 σ , ω 和 ρ , 相应的质量和耦合常数分别是 m_σ 、 m_ω 、 m_ρ 和 g_σ 、 g_ω 、 g_ρ 、 g_2 、 g_3 是 σ 介子的自相互作用非线性耦合常数. A^μ 代表光子场, $\boldsymbol{\tau}$ 是同位旋泡利算符, τ_3 是其第三分量. 矢量介子场张量 $\Omega^{\mu\nu}$, $\mathbf{R}^{\mu\nu}$ 和电磁场张量 $A^{\mu\nu}$ 取如下形式:

$$\begin{aligned} \Omega^{\mu\nu} &= \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu, \\ \mathbf{R}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \boldsymbol{\rho}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{\rho}^\mu, \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \end{aligned} \quad (9)$$

运用变分原理可得出拉格朗日方程, 在相对论平均场

近似下有核子场满足的 Dirac 方程

$$\{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + V(\mathbf{r}) + \beta[M + S(\mathbf{r})]\} \psi_i = \varepsilon_i \psi_i, \quad (10)$$

其中 $V(\mathbf{r})$ 表示矢量势

$$V(\mathbf{r}) = g_\omega \omega_0 + g_\rho \tau_3 \rho_0(\mathbf{r}) + e \frac{1 + \tau_3}{2} A_0(\mathbf{r}), \quad (11)$$

$S(\mathbf{r})$ 表示标量势

$$S(\mathbf{r}) = g_\sigma \sigma(\mathbf{r}). \quad (12)$$

介子场的 Klein-Gordon 方程和电磁场方程分别为

$$(-\Delta + m_\sigma^2) \sigma(\mathbf{r}) = -g_\sigma \rho_s(\mathbf{r}) - g_2 \sigma^2(\mathbf{r}) - g_3 \sigma^3(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$(-\Delta + m_\omega^2) \omega_0(\mathbf{r}) = g_\omega \rho_v(\mathbf{r}), \quad (14)$$

$$(-\Delta + m_\rho^2) \rho_0(\mathbf{r}) = g_\rho \rho_3(\mathbf{r}), \quad (15)$$

$$-\Delta A_0 = e \rho_c(\mathbf{r}). \quad (16)$$

其中对应的源密度为

$$\rho_s = \sum_i n_i \bar{\psi}_i \psi_i, \quad (17)$$

$$\rho_v = \sum_i n_i \psi_i^\dagger \psi_i, \quad (18)$$

$$\rho_3 = \sum_p n_i \psi_p^\dagger \psi_p - \sum_n n_i \psi_n^\dagger \psi_n, \quad (19)$$

$$\rho_c = \sum_p n_i \psi_p^\dagger \psi_p. \quad (20)$$

而上面 4 个式子中的粒子数占有几率

$$n_i = 2V_i^2. \quad (21)$$

按照上述理论模型, 经过复杂的迭代计算, 可以得到各单粒子能级 ε_i 对应的 V_i , 进而代入公式 (7) 求出粒子数的涨落.

3 计算和讨论

在 RMF 计算中, 假定原子核有轴对称形变, 对方程的求解在柱坐标系中采用谐振子展开方法. 计算中对费米子波函数选用 12 个谐振子壳层, 对玻色子波函数选用 20 个谐振子壳层. 相互作用参数选用常见的 NL-SH^[12]. 输入的形变参数 β 的初值选任意合理的值. 经过验算, 粒子数的涨落和对能隙的大小有关, 故统一取 $\Delta_p = \Delta_n = 1\text{MeV}$ 以使计算得到的粒子数的涨落只和壳结构有关(尽管已知在闭壳处 $\Delta_p = \Delta_n = 0$, 但为了检验壳闭合, 必须假定预先并不知道闭壳在何处).

3.1 粒子数涨落存在壳效应的证明

根据公式(6) $\Delta n = 2 \left[\sum_i U_i^2 V_i^2 \right]^{1/2}$, 在闭壳处, 原子核最稳定, 费米面以下的能级基本被占据, U_i 为零, 在费米面以上的能级, 基本空着, V_i 为零. 所以, 相对其他核, 幻数核的粒子数涨落应当是小的. (因为存在BCS理论下的粒子数不守恒的近似, 不能要求在幻数处的 Δn 一定为零) 为了验证这个结论, 计算了奇质子的CL同位素的中子数涨落随中子数的变化和 $N=30$ 的中子同位素的质子数涨落随质子数的变化, 为了节省篇幅, 把这两种变化都用图1来表示, 其中中子数和质子数都从18增大到29, 经过了20和28两个幻数. 计算结果表明, 这二个同位素链的粒子数涨落均在幻数20和28明显下降. 证明粒子数的涨落确有壳效应. 而对CL同位素链, CL_{28} 已在丰中子滴线附近, 它的涨落已和 CL_{26} 差别不太大, 且不如 ^{58}Ni 那样小, 说明 CL_{28} 的中子壳能隙已不如稳定线附近处那样大. 这个结果和F.Sarazin等人认为在 CL_{28} 核中子幻数已消失的结论是吻合的.

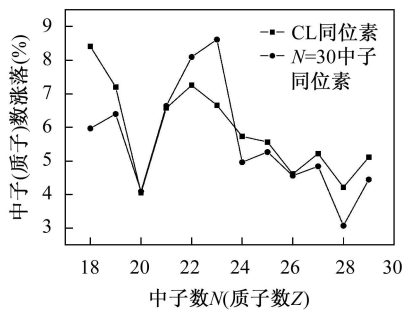


图1 CL同位素和 $N=30$ 中子同位素的中子(质子)数涨落随中子(质子)数的变化

3.2 $N=28$ 同位素链的中子数涨落的计算

首先计算了 $N=28, 30$ 两条中子同位素链的所有元素的中子数相对涨落, 结果见图2. 由图2可见, (1) 除 ^{16}S 核外, $N=28$ 的中子同位素链的所有元素的粒子数相对涨落都比 $N=30$ 的要小, 说明相对于相邻同位素链, $N=28$ 链确有较强的壳效应. (2) 在 $N=28$ 同位素链上, 丰中子滴线区的 $^{14}Si, ^{15}P, ^{16}S, ^{17}CL$ 4个核的中子数相对涨落比其他核明显增大, 预示着它们的中子壳效应在减弱, 或者说 $N=28$ 这个传统的幻数有可能已经消失. 而在 ^{18}Ar 核以后, 涨落较小且变化缓慢, 说明它们仍是幻数. (3) $^{16}S_{28}$ 核的中子涨落是 $N=28$ 链中最大的, 而且已经比非幻数核 $^{16}S_{30}$ 的还大, 说明它的壳效应可能已完全消失. (4) 传统幻数的消失并没有明显的临界点, 而是随着核子数的变化而变

化, 所谓幻数的消失是一个渐变的过程, 但不是越靠近滴线就一定消失得越彻底, 而是和中(质)子数的比率相关(但这个比率至今仍不清楚). 图2中, ^{16}S 的涨落就比更靠近滴线的 $^{14}Si, ^{15}P$ 还要大.

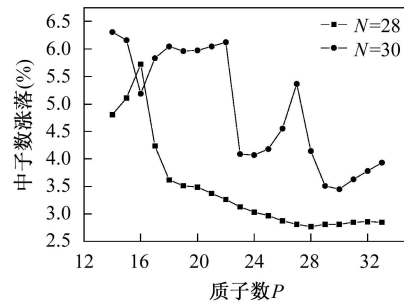


图2 $N=28, N=30$ 中子同位素链的中子数涨落随质子数的变化

3.3 S同位素链中子数涨落的计算

为了进一步确定 $^{44}S_{28}$ 核的壳效应的消失, 还应计算S同位素链和相邻质子同位素链的中子数涨落以作比较而使我们的结论更加可靠. 为此, 我们计算了S和相邻的偶质子Ar二个同位素链的中子数涨落, 结果见图3. 由图3可知, (1) 在 $N=20$ 处, S和Ar的中子数涨落均为极小值, 在我们的预料之中, 但在 $N=28$ 处, Ar的中子数涨落最小而S的中子数涨落明显大得多, 说明 S_{28} 和 Ar_{28} 尽管中子数仍然相同, 但壳结构已有很大差异. (2) 和相邻的同位素相比, S_{28} 的中子数涨落并不曾下降, 丝毫没有幻数的迹象, 同样意味着 S_{28} 已不是中子幻数核.

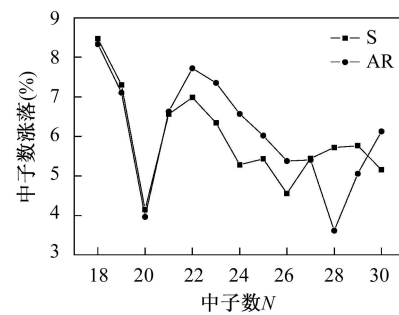


图3 S和Ar同位素链的中子数相对涨落随中子数的变化

4 结论

原子核的壳结构, 本质上是质子数和中子数形成某种精准比例的结果, 它是核内各种相互作用达到最稳定平衡的表现. 但是, 在丰中子区, 这种传统的粒子数比例已不再存在而产生了中子数更多于质子数的新的比例, 在这种比例下, 传统的幻数消失而新幻数的

产生是毫不奇怪的. 本文应用RMF+BCS理论, 通过计算粒子数的涨落证明了在丰中子滴线区, $N=28$ 中子壳效应确已减弱, 特别是 S_{28} 核, 其中子 $N=28$ 已不

是幻数. 这种方法, 本质上就是依据原子核内不同核子的比例, 因为它在对不同原子核的计算中, 所输入的参数的不同之处就是核的元素符号和核子数 A .

参考文献(References)

- 1 Werner T R, Sheikh J A, Nazarewicz W et al. Phys. Lett., 1994, **B333**: 303—309
- 2 Glasmacher T, Brown B A, Chromik M J et al. Phys. Lett., 1997, **B395**: 163—168
- 3 Sarazin F, Savajols H, Mittag W et al. Phys. Rev. Lett., 2000, **84**: 5062
- 4 Cottle P D, Kemper K W. Phys. Rev., 2002, **C66**: 061301
- 5 REN Zhong-Zhou et al. Phys. Lett., 1996, **B380**: 241
- 6 REN Zhong-Zhou. Phys. Rev., 2002, **C65**: 051304
- 7 GENG Li-Sheng, Hiroshi Toki, MENG Jie. Prog. Theor. Phys., 2005, **113**: 4
- 8 ZHONG X H, LI L, ZHANG X B et al. HEP & NP, 2003, **27**(7): 598 (in Chinese); CHEN D H, TAI F, REN Z Z. HEP & NP, 2003, **27**(8): 707 (in Chinese)
(钟显辉, 李磊, 张小兵等. 高能物理与核物理, 2003, **27**(7): 598); (陈鼎汉, 邰非, 任中洲. 高能物理与核物理, 2003, **27**(8): 707)
- 9 LI Jun-Qing, MA Zhong-Yu, CHEN Bao-Qiu et al. Phys. Rev., 2002, **65**: 064305
- 10 Gambhir Y K, Ring P, Thimet A. Ann Phys., 1990, **198**: 132—179
- 11 Ring P, Gambhir Y K, Lalazissis D A. Comp. Phys. Comm., 1997, **105**: 77
- 12 Sharma M M, Nagaraajan M A, Ring P. Phys. Lett., 1993, **B312**: 377

A Confirmation on the Disappearance of Magic Number $N = 28$ in Neutron-Rich Nuclei with the Relativistic Mean-Field Theory^{*}

DING Bin-Gang

(College of Science, Huzhou Teacher's College, Huzhou 313000, China)

Abstract A theoretical method for testing shell effect is proposed. In the framework of the relativistic mean-field theory with the consideration of the BCS approach, by calculating the fluctuation of the particle-number, we discover that particle number fluctuations are closely related with the nuclear shell structure. As a consequence, the traditional magic number $N=28$ disappears in the neutron-rich area near the drip-line.

Key words relativistic mean-field model, particle-number fluctuation, magic number, shell effect