

# 原子核转动谱公式的回顾与比较\*

刘树新<sup>1)</sup> 雷奕安<sup>2)</sup> 曾谨言<sup>3)</sup>

1 (北京大学物理学院 北京 100871)

2 (兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心 兰州 730000)

**摘要** 回顾和比较了原子核转动谱的几个常用公式,对目前已观测到的正常变形和超变形转动带的分析表明,二参数 ab 公式和三参数 abc 公式是参数数目相同的公式中与实验符合得最好的公式,可供实验工作者方便采用.

**关键词** 转动带 转动惯量 ab 公式 abc 公式

基于对称性的考虑,Bohr & Mottelson 在绝热近似下给出轴对称原子核的转动谱的  $I(I+1)$  展开公式(取带首能量为参考,见文献[1]中式(4-46))

$$E(\xi) = A\xi^2 + B\xi^4 + C\xi^6 + D\xi^8 + \dots, \quad (1)$$

式中  $\xi^2 = I(I+1)$ , (对于  $K=0$  带),  $I$  为原子核角动量,  $K$  为角动量沿对称轴(取为  $z$  轴)的投影. 对于  $K \neq 0$  的转动带,能谱公式(1)中  $\xi^2$  换为  $\xi^2 = I(I+1) - K^2$ . 更细致的讨论见文献[1]. 特别是  $K=1/2$  带,与  $I$  成线性关系的脱耦合项很重要,必须考虑进去,见文献[1].

利用式(1)对大量实验数据的系统分析表明<sup>[1, 2]</sup>, 对于稀土区和铜系区的正常变形(ND)基态转动带(在带交叉发生前),

$$(B/A) \sim 10^{-3}, (C/A) \sim 10^{-6}, (D/A) \sim 10^{-9}, \quad (2)$$

可见展开式(1)的收敛性是好的. 对于超变形(SD)核转动带,收敛性更佳<sup>[3]</sup>,

$$(B/A) \sim 10^{-4}, (C/A) \sim 10^{-8}, \quad (3)$$

因此,人们常用 Bohr-Mottelson 如下二参数公式(AB 公式)去分析核转动谱的实验数据,

$$E(\xi) = A\xi^2 + B\xi^4, \quad (4)$$

与式(1)相应的运动学转动惯量  $J^{(1)}$  和动力学转动惯量  $J^{(2)}$  为

$$\begin{cases} \frac{J^{(1)}(\xi)}{\hbar^2} = \left(\frac{1}{I_x} \frac{dE}{dI_x}\right)^{-1} \approx \frac{1}{2A} \left[1 + \frac{2B}{A}\xi^2 + \frac{3C}{A}\xi^4 + \dots\right] \\ \frac{J^{(2)}(\xi)}{\hbar^2} = \left(\frac{d^2E}{dI_x^2}\right)^{-1} \approx \frac{1}{2A} \left[1 + \frac{6B}{A}\xi^2 + \frac{15C}{A}\xi^4 + \dots\right] \end{cases} \quad (5)$$

式中  $I_x$  是原子核角动量沿转动轴(取为  $x$  轴)的投影,

$$I_x = \sqrt{(I+1/2)^2 - K^2} = \sqrt{I(I+1) - (K^2 - 1/4)} \approx \xi, \quad (I \gg K), \quad (6)$$

而带首转动惯量为

$$J_0 = J^{(1)}(0) = J^{(2)}(0) = \hbar^2/2A. \quad (7)$$

原子核转动谱的另一种常用表述式 Harris 的  $\omega^2$  展开<sup>[4]</sup>

$$E(\omega) = \alpha\omega^2 + \beta\omega^4 + \gamma\omega^6 + \delta\omega^8 + \dots, \quad (8)$$

式中  $\omega = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dI_x}$  是经典转动角频率. 按  $\hbar\omega = \frac{dE}{dI_x} =$

$$\frac{dE}{d\xi} \frac{d\xi}{dI_x} \approx \frac{dE}{d\xi}, \text{ 得 } \hbar d\xi = \frac{dE}{\omega}, \text{ 积分得}$$

$$\begin{aligned} \hbar\xi &= \int \frac{dE}{\omega} = \int \frac{1}{\omega} \frac{dE}{d\omega} d\omega = \int (2\alpha + 4\beta\omega^2 + 6\gamma\omega^4 + \dots) d\omega \\ &= 2\alpha\omega + \frac{4}{3}\beta\omega^3 + \frac{6}{5}\gamma\omega^5 + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

这是转动角动量与角频率之间的关系式. 对于偶偶核基态带( $K=0$ ),

$$\sqrt{I(I+1)} = 2\alpha\omega + \frac{4}{3}\beta\omega^3 + \frac{6}{5}\gamma\omega^5 + \dots, \quad (10)$$

利用  $\xi$  和  $\omega$  的关系式(9), 可得出与 Harris 的公式(8)相

\* 国家自然科学基金(10375001, 10435010, 10575004)资助

1) E-mail: liusx@pku.edu.cn; 2) yalei@pku.edu.cn; 3) jyzeng@pku.edu.cn

应的  $J^{(1)}$  和  $J^{(2)}$  表示式

$$\begin{aligned} J^{(1)}(\omega)/\hbar^2 &= 2\alpha + \frac{4}{3}\beta\omega^2 + \frac{6}{5}\gamma\omega^4 + \dots, \\ J^{(2)}(\omega)/\hbar^2 &= 2\alpha + 4\beta\omega^2 + 6\gamma\omega^4 + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

与 Bohr-Mottelson 的转动谱二参数 AB 公式 (4) 相应, Harris 的二参数转动谱公式 ( $\alpha\beta$  公式)

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \alpha\omega^2 + \beta\omega^4, \quad J^{(1)}(\omega)/\hbar^2 = 2\alpha + \frac{4}{3}\beta\omega^2, \\ J^{(2)}(\omega)/\hbar^2 &= 2\alpha + 4\beta\omega^2, \quad J_0/\hbar^2 = 2\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

可以证明<sup>[5]</sup>, 二参数 Harris 的公式与可变转动惯量模型<sup>[6]</sup>等价.

20 世纪 70 年代 Saethre 等<sup>[7]</sup> 分析当时原子核转动谱数据后, 认为 Harris 的  $\omega^2$  展开式优于 Bohr-Mottelson 的  $I(I+1)$  展开. Mottelson 指出<sup>[8]</sup>, 如果 Harris 的二参数公式 (12) 成立, 则  $I(I+1)$  展开式 (1) 中的参数中只有两个独立, 它们有下列关系<sup>[1]</sup>

$$\left(\frac{C}{A}\right) = 4\left(\frac{B}{A}\right)^2, \quad \left(\frac{D}{A}\right) = 24\left(\frac{B}{A}\right)^3,$$

即

$$\frac{AC}{4B^2} = 1, \quad \frac{A^2D}{24B^3} = 1, \quad \text{即} \quad \frac{AC}{4B^2} - \frac{A^2D}{24B^3} = 0. \quad (13)$$

但后来大量的实验数据, 包括稀土区和铜系区的正常变形核基态转动带<sup>[2]</sup> 和  $A \sim 190$  区超变形转动带<sup>[3]</sup> 大量数据的分析, 都确切表明  $I(I+1)$  展开式中的各参数之间的关系与式 (13) 有明显偏离, 见图 1 和 2.

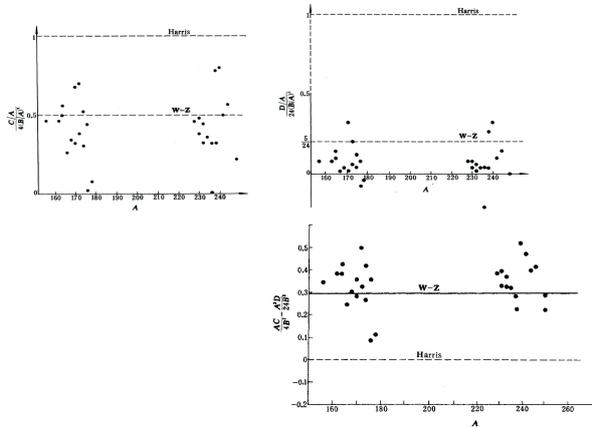


图 1 取自文献[2]. 图中 W-Z 指二参数 ab 公式

基于 Bohr 哈密顿量, 对于非轴对称度不大 ( $\sin^2 3\gamma \ll 1$ ) 的稳定变形核, 文献 [9,10] 导出了如下转动谱公式<sup>[11]</sup> (简称 ab 公式):

$$E(I) = a \left[ \sqrt{1 + bI(I+1)} - 1 \right]. \quad (14)$$

对于  $K \neq 0$  带, 可把  $I(I+1) \rightarrow \xi^2 = I(I+1) - K^2$ .

与 ab 公式相应的转动惯量为

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= J_0 [1 + bI(I+1)]^{1/2} = J_0 \left[ 1 - \frac{\hbar^2\omega^2}{a^2b} \right]^{-1/2}, \\ J^{(2)} &= J_0 [1 + bI(I+1)]^{3/2} = J_0 \left[ 1 - \frac{\hbar^2\omega^2}{a^2b} \right]^{-3/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$J_0 = \hbar^2/ab$  为带首转动惯量. 式 (14) 和 (15) 对  $\xi^2$  进行展开, 收敛半径为  $I_r \sim 1/\sqrt{b}$ . 与可变转动惯量模型比较, 参数  $b \sim 2\sigma$ ,  $\sigma$  为原子核软度 (nuclear softness). 如对  $\omega^2$  进行展开, 考虑到  $\omega = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dI_x}$ , 可得出<sup>[3, 12]</sup>

$$\frac{\hbar^2\omega^2}{a^2b} = \frac{b[(I+1/2)^2 - K^2]}{1 + bI(I+1)} < 1, \quad (16)$$

所以转动能和转动惯量对  $\omega^2$  展开是收敛的. 由此可以理解为什么转动谱的  $\omega^2$  展开优于  $I(I+1)$  展开. 按 ab 公式的  $I(I+1)$  展开, 可以证明, 与 Harris 的二参数公式的结论式 (13) 不同<sup>[2]</sup>,

$$\frac{AC}{4B^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{A^2D}{24B^3} = \frac{5}{24}. \quad (17)$$

按图 1 和 2 的分析, 实验分析的结果与 Harris 的二参数公式的结论有明显偏离, 即  $\frac{AC}{4B^2}$  和  $\frac{A^2D}{24B^3}$  都系统小于 1, 而是围绕 ab 公式预期值 (17) 式上下有一定的起伏.

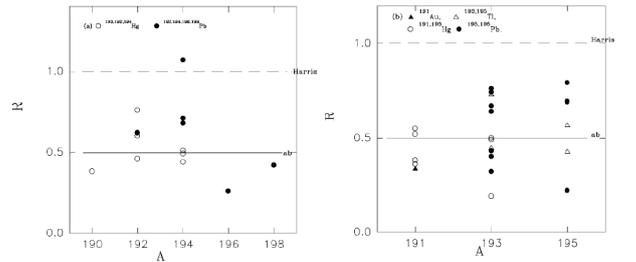


图 2 取自文献[3],  $R=AC/4B^2$ . 按 Harris 二参数  $\alpha\beta$  公式,  $R=1$ , 而按 ab 公式 (14) 展开,  $R=1/2$

文献 [13] 用几种转动谱公式分析了稀土区和铜系区的正常变形核的基态带. 包括: Bohr-Mottelson 二参数 AB 公式和三参数 ABC 公式, 可变转动惯量 (VMI) 模型公式, 推广的可变转动惯量 (GVMI) 模型公式, FDSM (Fermion Dynamical Symmetry Model), HYB (Hybrid Model) 和 ab 公式 (该文称为 WZ 公式). 分析结果表明, ab 公式与实验结果符合得最好.

此外, 按  $\alpha\beta$  公式, 带首转动惯量  $J_0/\hbar^2 = 2\alpha$  应为不依赖于  $\omega^2$  的常数. 但实验资料分析表明<sup>[12-14]</sup>, 参数  $2\alpha$  随  $\omega^2$  有大幅度涨落. 与此相比, 按 ab 公式,  $J_0/\hbar^2 = 1/ab$ , 随角动量  $I$  (或转动频率  $\omega$ ) 的变化, 则比较平滑和缓慢<sup>[12]</sup>. 所以转动谱的二参数 ab 公式 (14) 优于 Harris 的  $\omega^2$  的二参数展开  $\alpha\beta$  公式 (12), 而  $\alpha\beta$  公

式又优于 $I(I+1)$ 展开的二参数AB公式(4). 其原因在于<sup>[12]</sup>在求解Bohr哈密顿量的本征值问题时, 没有做绝热近似, 即把振动和转动自由度同时予以考虑, 在一定程度上考虑了振动对于转动的影响. 这表现为转动惯量和原子核形变不再保持为常数, 而是随角动量 $I$ 或转动角频率 $\omega$ 而变化. 对于稀土区和锆系区正常变形核的转动带<sup>[12]</sup>和 $A \sim 190$ 区超变形核转动带的分析<sup>[3]</sup>表明: 用ab公式拟合每一条转动带所得出的 $1/ab$ 并不严格为常量, 而是随角动量(或角频率)有微小变化, 所以ab公式还可以进一步改进. 文献[12]考虑了Bohr哈密顿量中势能的高阶(非简谐)项 $k\beta^4$ , 则ab公式可以改进为如下abc公式,

$$E(I) = a \left[ \sqrt{1 + bI(I+1)} - 1 \right] + cI(I+1). \quad (18)$$

上式中最后一项是一个微小的修正. 分析表明, abc公式可以很好描述实验观测到的大量正常变形和超变形转动带. 对于超变形带(非轴对称度很小,  $\sin^2 3\gamma \gg 1$ ),

abc公式尤其适用. 用abc公式去拟合每条超变形带的众多能级所得出的方均根偏差一般小于 $10^{-3}$ . 与abc公式(18)相应的转动惯量为

$$\begin{aligned} \hbar^2/J^{(1)} &= ab[1 + bI(I+1)]^{-1/2} + 2c, \\ \hbar^2/J^{(2)} &= ab[1 + bI(I+1)]^{-3/2} + 2c. \end{aligned} \quad (19)$$

以上分析表明, 在原子核转动谱的二参数公式中, ab公式最符合实验, 而三参数公式中, abc公式最好. 利用转动谱的实验数据, 可用最小二乘法提取最佳参数 $a, b$ 或 $a, b, c$ . 根据公式(15)或(19)即可获得转动惯量 $J^{(1)}$ 或 $J^{(2)}$ , 以及角动量顺排随角动量变化的信息.

对于超变形转动带, 自旋尚未测定, ab式或abc式可用于判断SD带自旋指定是否可靠. 对 $A \sim 190$ 区的SD带, 由于其最低能级自旋值 $I_0$ 较低(一般小于10), 用ab公式或abc公式可以很确切地指定 $I_0$ 值. 其中某些SD带的 $I_0$ 指定值已为后来的实验观测所证实<sup>[15, 16]</sup>.

## 参考文献(References)

- Bohr A, Mottelson B R. Nuclear Structure, vol. II Nuclear Deformations, 1975, Chap. 4; Bohr A. Dan. Mat. Fys. Medd., 1952, **26**: 14; Bohr A, Mottelson B R. Dan. Mat. Fys. Medd., 1953, **27**: 16
- XU F X et al. Phys. Rev., 1989, **C40**: 2337
- HU Z X, ZENG J Y. Phys. Rev., 1997, **C56**: 2523
- Harris S X. Phys. Rev. Lett., 1964, **13**: 663; Phys. Rev., 1965, **138**: A509
- Klein A et al. Phys. Rev., 1970, **B31**: 333
- Scharff-Goldhaber G, Dove C, Goodman A L. Ann. Rev. Nucl. Sci., 1976, **26**: 239
- Saethre  $\phi$  et al. Nucl. Phys., 1973, **A207**: 486
- Mottelson B R. Proceedings of the Nuclear Structure Symposium of the Thousand Lakes, Joutsa, 1970, (Nordisk Institut for Theoretisk Atomfysik, Nordita, Report no. 417)
- WU C S, ZENG J Y. HEP & NP, 1984, **8**: 219, 445; 1985, **9**: 77, 214 (in Chinese)  
(吴崇试, 曾谨言. 高能物理与核物理, 1984, **8**: 219, 445; 1985, **9**: 77, 214)
- WU C S, ZENG J Y. Commu. Theor. Phys., 1987, **8**: 51
- Holmberg P, Lipas P O. Nucl. Phys., 1967, **A117**: 552
- Huang H X, WU C S, ZENG J Y. Phys. Rev., 1989, **C39**: 1617
- PIN J L et al. Phys. Rev., 1991, **C43**: 2224
- Peker L K, Pearlstein S, Hamilton J H. Phys. Lett., 1981, **100B**: 281
- LIU S X, ZENG J Y. Phys. Rev., 1998, **C58**: 3266
- ZENG J Y et al. Phys. Rev., 1991, **C44**: R1745

# Review and Comparison of Some Common Used Rotational Spectrum Formulas\*

LIU Shu-Xin<sup>1)</sup> LEI Yi-An<sup>2)</sup> ZENG Jin-Yan<sup>3)</sup>

1 (School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

2 (Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, Lanzhou 730000, China)

**Abstract** Some common used rotational spectrum formulas are reviewed and compared. Analyses for the experimentally observed normally deformed and superdeformed rotational bands now available show that the two-parameter ab and three-parameter abc formulas are the best compared with the other formulas with the same number parameters, and may be conveniently used by experimentalists.

**Key words** rotational spectrum, moment of inertia, ab formula, abc formula

\* Supported by NSFC (10375001, 10435010, 10575004)

1) E-mail: liusx@pku.edu.cn; 2) yalei@pku.edu.cn; 3) jyzeng@pku.edu.cn