第29卷 第8期
2005年8月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.29, No.8
Aug., 2005

运动Dyon粒子双矢势场方程的格林函数解*

李康[1;1)]　王剑华[2;2)]

1(杭州师范学院物理系　杭州　310036)
2(陕西理工学院物理系　汉中　723000)

摘要　首先回顾了有磁荷(或等效磁荷)存在的情况下电磁场双四维势的描述方法,给出了场强与双四维势的关系以及具有电磁对偶对称性的Maxwell方程;利用Green函数法求出了场方程具有Lorentz变换协变性的推迟解;最后给出了广义李纳-魏谢尔势的表述形式.

关键词　双矢势　Green函数　电磁对偶　Dyon粒子

1　引言

19世纪中叶,Maxwell在总结Coulomb和Faraday等人研究工作的基础上,提出了著名的电磁场方程——Maxwell方程组,并且预言了电磁辐射和电磁波的存在,为电气、电子时代的技术革命提供了重要的理论基础.因而,Maxwell方程无论是在理论上还是在生产实践上都有十分重要的作用.在无源情况下,Maxwell方程具有电磁对偶性,但在有源情况下,Maxwell方程却没有电磁对偶性.20世纪初,为了在有源情况下保持Maxwell方程的电磁对偶性,Dirac首先提出了磁单极存在的可能性,并指出了磁单极的存在是电荷量子化的来源.磁荷与电荷不同的是,电荷在其周围产生的电场和电势是连续的,而磁荷在其周围产生的磁场的磁矢势一定沿某条线是发散的,这条线就是大家知道的Dirac弦.由于磁单极在实验上没有找到,所以过去的半个多世纪在磁单极及电磁对偶性方面的研究进展很缓慢.直到20世纪90年代,随着Witten,Serberg等人对超弦理论研究的突破性的进展,才又一次激起了人们对电磁对偶性和与磁荷有关的概念的深入研究,磁单极引起了人们的极大的兴趣和关注.文献[1]从电磁对偶的观点首次提出电磁场双四维势的描述形式,从而避开了奇异弦而得出电荷量子化条件,后来德国人R.W. Kuhne在文献[1]的基础上提出了磁光子的概念及实验观察的可能性[2].进一步讨论与磁单极有关的理论和实验问题都是非常重要和非常有意义的问题.本文将着重讨论有磁荷存在的情况下的具有电磁对偶对称性的Maxwell方程;利用Green函数法求出了场方程具有Lorentz变换协变性的推迟解;最后给出了李纳-魏谢尔势的表达式.

2　双矢势与协变的Maxwell方程

为了讨论方便,选取如下的单位制:$c=\hbar=1$,$\mu_0=\varepsilon_0=1$进行讨论.已知真空中的Maxwell方程组为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho,\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\nabla\times B=\boldsymbol{j}+\partial\boldsymbol{E}/\partial t.\end{cases}\tag{1}$$

其中ρ是电荷密度,$\boldsymbol{j}$是电流密度.引入电势Φ_{e}和磁矢势$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$,在费曼度规($g_{00}=1,g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$,其余为0)下,电磁场的四维矢量为

$$A_\mu=(\Phi_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}),X_\mu=(t,-\boldsymbol{x}),J_\mu=(\rho,-\boldsymbol{j}).\tag{2}$$

2004-11-04收稿,2005-01-18收修改稿

*国家自然科学基金(90303003,10447005)和浙江省自然科学基金(M103042,102011,102028)资助

1)E-mail:kangli@hztc.edu.cn

2)E-mail:jianhua.wang@263.net

定义电磁场张量

$$\begin{cases} F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \\ {}^*F_{\mu\nu}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \end{cases} \tag{3}$$

场强与矢势及标势的关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=-\nabla\Phi_{\mathrm e}-\dfrac{\partial \boldsymbol{A}_{\mathrm m}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm m}. \end{cases} \tag{4}$$

于是可以把有源情况下的场方程表述成为

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\mu\nu}=J^\mu_{\mathrm e}, \\ \partial_\nu\, {}^*F^{\mu\nu}=0. \end{cases} \tag{5}$$

这里 $J^{\mathrm e}_\mu=(\rho_{\mathrm e},-\boldsymbol{j}_{\mathrm e})$是四维电流密度,显然在有源的情况下,Maxwell 方程的对偶对称性破缺了,即方程组作对偶变换后,与原方程不同了.要使之具备对偶对称性,只有加入磁荷和磁流来修正,有磁荷存在时真空中的 Maxwell 方程组为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_{\mathrm e},\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{j}_{\mathrm m}-\partial\boldsymbol{B}/\partial t, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{\mathrm m},\nabla\times B=\boldsymbol{j}_{\mathrm e}+\partial\boldsymbol{E}/\partial t. \end{cases} \tag{6}$$

这时除了电磁场的四维电流密度外,还应引入四维磁流密度矢为

$$J^{\mathrm m}_\mu=(\rho_{\mathrm m},-\boldsymbol{j}_{\mathrm m}). \tag{7}$$

为了避开磁矢势的发散问题,引入双矢势的概念.在有电流源 $J^1_\mu=J^{\mathrm e}_\mu$ 和磁流源 $J^2_\mu=J^{\mathrm m}_\mu$ 时,除了通常四维磁矢势 A^1_μ 外,还应引入四维电矢势 A^2_μ,即

$$\begin{cases} A^1_\mu=(\Phi_{\mathrm e},-\boldsymbol{A}_{\mathrm m}),J^1_\mu=(\rho_{\mathrm e},-\boldsymbol{j}_{\mathrm e}), \\ A^2_\mu=(\Phi_{\mathrm m},-\boldsymbol{A}_{\mathrm e}),J^2_\mu=(\rho_{\mathrm m},-\boldsymbol{j}_{\mathrm m}). \end{cases} \tag{8}$$

这时场强由下式给出[1]

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm e}-\nabla\Phi_{\mathrm e}-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}_{\mathrm m}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}_{\mathrm m}+\nabla\Phi_{\mathrm m}+\dfrac{\partial\boldsymbol{A}_{\mathrm e}}{\partial t}. \end{cases} \tag{9}$$

在洛仑兹规范下

$$\partial^\mu A^1_\mu=\partial^\mu A^2_\mu=0, \tag{10}$$

对偶的 Maxwell 方程(6)式可写成:

$$\begin{cases} \Box\, A^{1\mu}=J^{1\mu}, \\ \Box\, A^{2\mu}=-J^{2\mu}. \end{cases} \tag{11}$$

在 Lorentz 规范下,上式可等价的写为

$$\partial^\mu F^I_{\mu\nu}=g^{II'}J^{I'}_\nu, I,I'=1,2.$$

这里, $F^I_{\mu\nu}=\partial_\mu A^I_\nu-\partial_\nu A^I_\mu,\quad g^{II'}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$

应该指出,在这种描述下,规范变换由公式 $A^I_\mu\rightarrow A^I_\mu+\partial_\mu\chi^I$给出.容易验证,场强 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$ 以及电磁张量 $F^I_{\mu\nu}$在规范变换下不变.

3 双矢势场方程的格林函数解

现在,用格林函数法来求方程(11)的解.求出下列方程

$$\Box_x D(x,x')=\delta^{(4)}(x-x'), \tag{12}$$

的格林函数 $D(x,x')$,就可以求得(11)的解,上式中的

$$\delta^{(4)}(x-x')=\delta(x_0-x'_0)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{13}$$

是四维 δ 函数.在无边界面时,格林函数可以只依赖于四维矢量 $z^\alpha=x^\alpha-x'^\alpha$.于是 $D(x,x')=D(x-x')=D(z)$,而且

$$\Box_z D(z)=\delta^{(4)}(z). \tag{14}$$

利用傅立叶积分从坐标空间变换到波数空间.格林函数的傅立叶变换 $\widetilde{D}(z)$由下式给出:

$$D(z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\widetilde{D}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot z}, \tag{15}$$

其中 $k\cdot z=k_0z_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}$.利用 δ 函数的表达式

$$\delta^4(z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot z}. \tag{16}$$

可以求得 k 空间格林函数和格林函数 $D(z)$为

$$\widetilde{D}(k)=-\frac{1}{k\cdot k},D(z)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot z}}{k\cdot k}. \tag{17}$$

由于(17)第2式中的被积函数是奇异函数,因此上式是不确定的,只有在处理奇点以后才能赋予它以确切的含义.现在先对 $\mathrm{d}k_0$ 积分,有

$$D(z)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0z_0}}{k_0^2-\alpha^2}, \tag{18}$$

上式中引入了记号 $\alpha=|\boldsymbol{k}|$.将 k_0 当作复变数,并将积分当作 k_0 平面内的围道积分来处理,就能给出 k_0 积分的意义.因为被积函数有两个一阶极点,在 $k_0=\pm\alpha$ 处,所以相对于极点选取不同的积分围道,就得到带有不同性质的格林函数.在 k_0 平面内,用 $k_0=\pm\alpha$ 两点的连线把平面分成两半,两条可能的围道分别用 r 和 a 来表示,它们是不包含 $k_0=\pm\alpha$,但与 $k_0=\pm\alpha$ 两点的连线平行的直线与上半平面或下半平面内在无穷远的半圆闭合起来的.这个半圆是在上半平面还是在下半平面,则取决于指数中 z_0 的正负号.当 $z_0>0$ 时,指数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0z_0}$ 在上半平面内无限地增大.为了运用留数定理,所以必须在下半平面内让围道闭合起来.当 $z_0<0$ 时,情况则相反.

现在考虑围道 r,当 $z_0<0$ 时,由于围道上半平面内闭合,且不包含奇点,所求得的积分等于零.当

$z_0>0$ 时,对 k_0 的积分是

$$\oint_r \mathrm{d}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 z_0}}{k_0^2-\alpha^2} = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 z_0}}{k_0^2-\alpha^2}\right) = -\frac{2\pi}{\alpha}\sin(\alpha z_0), \tag{19}$$

于是,格林函数(18)为

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot z}\frac{\sin(\alpha z_0)}{\alpha}. \tag{20}$$

对 $\boldsymbol{k}$ 的角坐标积分,可以得到

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{2\pi^2 R}\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha \sin(\alpha R)\sin(\alpha z_0), \tag{21}$$

式中 $R=|\boldsymbol{z}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ 为 x'^α 与 x^α 间的空间距离.利用三角函数公式并变换变数,有

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\alpha\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_0-R)\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_0+R)\alpha}\right]. \tag{22}$$

因为 $z_0>0$ 和 $R>0$ 时,(22)中第二部分的积分总是等于零.剩下的部分正好是 δ 函数.所以对围道 r 而言,格林函数是

$$D_r(x-x') = \frac{\theta(x_0-x'_0)}{4\pi R}\delta(x_0-x'_0-R). \tag{23}$$

在这里重新换回了原来的变数 x 和 x',其中 $\theta(x_0-x'_0)$是阶跃函数.这种格林函数被称为推迟格林函数,因为源点的时间 x'_0 总是早于观测点的时间 x_0.方程(23)对 x_0 的傅立叶变换$(4\pi R)^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega R}$就是出射波格林函数.

当选取围道 a 时,经过相仿的计算,可以得到提早格林函数:

$$D_a(x-x') = \frac{\theta[-(x_0-x'_0)]}{4\pi R}\delta(x_0-x'_0+R). \tag{24}$$

利用下列恒等式可以将这些格林函数写成协变形式:

$$\begin{aligned}\delta[(x-x')^2] &= \delta[(x_0-x'_0)^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2] = \\ &\delta[(x_0-x'_0-R)(x_0-x'_0+R)] = \\ &\frac{1}{2R}[\delta(x_0-x'_0-R)+\delta(x_0-x'_0+R)],\end{aligned} \tag{25}$$

因为 θ 函数与(25)相乘时,其中只有一项的乘积不等于零,所以有

$$\begin{cases} D_r(x-x') = \dfrac{1}{2\pi}\theta(x_0-x'_0)\delta[(x-x')^2], \\ D_a(x-x') = \dfrac{1}{2\pi}\theta(x'_0-x_0)\delta[(x-x')^2]. \end{cases} \tag{26}$$

上式中 θ 函数的变化要受到 δ 函数的约束,实际上它就是通常 Lorentz 变换下的不变量.所以(26)给出了格林函数的明显不变表达式.上式中 θ 函数和 δ 函数表明:推迟(提早)格林函数仅仅在源点的向前(向后)光锥上才不等于零.

4　Dyon 粒子的李纳 – 魏谢尔势

在双矢势电磁对偶描述中,我们可以把双四维势的波动方程(11)的解用(26)表示的这两个格林函数写出来:

$$\begin{cases} A^{1\mu}(x) = A^{1\mu}_{入射}(x) + \int \mathrm{d}^4 x' D_r(x-x')J^{1\mu}(x'), \\ A^{2\mu}(x) = A^{2\mu}_{入射}(x) - \int \mathrm{d}^4 x' D_r(x-x')J^{2\mu}(x'), \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} A^{1\mu}(x) = A^{1\mu}_{出射}(x) + \int \mathrm{d}^4 x' D_a(x-x')J^{1\mu}(x'), \\ A^{2\mu}(x) = A^{2\mu}_{出射}(x) - \int \mathrm{d}^4 x' D_a(x-x')J^{2\mu}(x'). \end{cases} \tag{28}$$

式中 $A^{1\mu}_{入射}$, $A^{2\mu}_{入射}$ 和 $A^{1\mu}_{出射}$, $A^{2\mu}_{出射}$ 是齐次波动方程的解.在(27)中用到了推迟格林函数.由于格林函数的推迟性质,在$x_0\to-\infty$这种极限情况下,由于研究的诸源是空间的定域源,则遍及所有源的积分等于零.自由场的势 $A^{1\mu}_{入射}$和 $A^{2\mu}_{入射}$可以解释为$x_0\to-\infty$时给定的'入射'势;同理,在(28)中用到了提早格林函数,齐次方程的解 $A^{1\mu}_{出射}$和$A^{2\mu}_{出射}$是$x_0\to+\infty$时给定的渐进'出射'势.辐射场定义为'出射'场和'入射'场之差.辐射场的双四维势为

$$\begin{cases} A^{1\mu}_{辐射}(x) = A^{1\mu}_{出射}(x) - A^{1\mu}_{入射}(x) = \\ \qquad \int \mathrm{d}^4 x' D(x-x')J^{1\mu}(x'), \\ A^{2\mu}_{辐射}(x) = A^{2\mu}_{出射}(x) - A^{2\mu}_{入射}(x) = \\ \qquad -\int \mathrm{d}^4 x' D(x-x')J^{2\mu}(x'). \end{cases} \tag{29}$$

其中

$$D(z) = D_r(z) - D_a(z). \tag{30}$$

是推迟和提早格林函数之差.

对于我们所研究的 Dyon 粒子,设它带有电荷 q 同时带有磁荷 g,它在惯性系 K 中的位置是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,则在惯性系中它的中电荷密度、电流密度和磁荷密度、磁流密度是

$$\begin{cases}\rho_e(\boldsymbol{x}',t)=q\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{r}(t)],\\ \rho_m(\boldsymbol{x}',t)=g\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{r}(t)],\\ \boldsymbol{j}_e(\boldsymbol{x}',t)=q\boldsymbol{v}(t)\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{r}(t)],\\ \boldsymbol{j}_m(\boldsymbol{x}',t)=g\boldsymbol{v}(t)\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{r}(t)].\end{cases}\tag{31}$$

其中 $\boldsymbol{v}(t)=\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)/\mathrm{d}t$ 是 K 系中 Dyon 粒子的速度. 引入 Dyon 粒子的四维坐标矢量 $r^{\mu}(\tau)$ 作为 Dyon 粒子原时 τ 的函数,并用一个适当的附加 δ 函数遍历原时积分,就可以把电荷密度、电流密度以及磁荷密度、磁流密度写成具有明显 Lorentz 协变形式,即

$$\begin{cases}J^{1\mu}(x')=q\int\mathrm{d}\tau V^{\mu}(\tau)\delta^{(4)}[x'-r(\tau)],\\ J^{2\mu}(x')=g\int\mathrm{d}\tau V^{\mu}(\tau)\delta^{(4)}[x'-r(\tau)].\end{cases}\tag{32}$$

式中 V^{μ} 是 Dyon 粒子的四维速度. 在惯性系 K 中,有 $r^{\mu}=[t,\boldsymbol{r}(t)]$ 和 $V^{\mu}=(\gamma,\gamma\boldsymbol{v})$, 其中 $\gamma=(1-v^2)^{-1/2}$.

把(32)和格林函数代入(29),并对 d^4x' 积分,得

$$\begin{cases}A^{1\mu}(x)=\dfrac{2q}{4\pi}\int\mathrm{d}\tau V^{\mu}(\tau)\theta[x_0-r_0(\tau)]\delta\{[x-r(\tau)]^2\},\\ A^{2\mu}(x)=-\dfrac{2g}{4\pi}\int\mathrm{d}\tau V^{\mu}(\tau)\theta[x_0-r_0(\tau)]\delta\{[x-r(\tau)]^2\}.\end{cases}\tag{33}$$

剩下的遍历 Dyon 粒子原时的积分只在 $\tau=\tau_0$ 时才不等于零,在这里 τ_0 是由光锥条件

$$[x-r(\tau_0)]^2=0,\tag{34}$$

和推迟性要求 $x_0>r_0(\tau_0)$ 确定的. 格林函数只在观察点的向后光锥上才不等于零. 粒子的世界线 $r(\tau)$ 仅仅在两个点与光锥相交,一个点早于 x_0,另一个点晚于 x_0. 在 Dyon 粒子的路线上,只有较早的点 $r^{\mu}(\tau_0)$ 才对 x^{μ} 处的场有贡献. 为了计算(33)的值,利用以下法则:

$$\delta[f(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{\left|(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)_{x=x_i}\right|},\tag{35}$$

式中的点 $x=x_i$ 是 $f(x)$ 的零点,假定 $f(x)$ 为线性函数. 需要计算的是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[x-r(\tau)]^2=-2[x-r(\tau)]_{\nu}V^{\nu}(\tau),\tag{36}$$

在 $\tau=\tau_0$ 这一点上的值. 因此双四维矢势为

$$A^{1\mu}=\left.\frac{qV^{\mu}(\tau)}{4\pi V[x-r(\tau)]}\right|_{\tau=\tau_0},\quad A^{2\mu}=\left.\frac{gV^{\mu}(\tau)}{4\pi V[x-r(\tau)]}\right|_{\tau=\tau_0}.\tag{37}$$

式中的 τ_0 由(34)确定. 把(37)称为 Dyon 粒子的广义李纳-魏谢尔势. 通常把它们写成大家更熟悉的形式. 光锥条件(34)意味着 $x_0-r_0(\tau_0)=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(\tau_0)|\equiv R$. 于是

$$V\cdot(x-r)=V_0[x_0-r_0(\tau_0)]-\boldsymbol{V}\cdot[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(\tau_0)]=\gamma R-\gamma\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}R=\gamma R(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}),\tag{38}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(\tau)$ 方向的单位矢量. 因而双四维矢势(37)可以写成

$$\begin{cases}\Phi_e=\dfrac{q}{4\pi(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})R},\ \boldsymbol{A}_m=\dfrac{q\boldsymbol{v}}{4\pi(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})R},\\ \Phi_m=\dfrac{-g}{4\pi(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})R},\ \boldsymbol{A}_e=\dfrac{-g\boldsymbol{v}}{4\pi(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})R},\end{cases}\tag{39}$$

上式中等号右边的量是在推迟时间 $r_0(\tau_0)=x_0-R$ 计算的. 利用(37)或者(39)可以由(9)求出场强如下

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\dfrac{q\boldsymbol{n}(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n})}{4\pi R(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^3}-\dfrac{q\dot{\boldsymbol{v}}+g\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{n}}{4\pi R(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2}-\dfrac{q\boldsymbol{v}+g\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}}{4\pi R(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^3}(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n}),\\ \boldsymbol{B}=\dfrac{g\boldsymbol{n}(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n})}{4\pi R(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^3}-\dfrac{g\dot{\boldsymbol{v}}-q\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{n}}{4\pi R(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2}-\dfrac{g\boldsymbol{v}-q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}}{4\pi R(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^3}(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{n}).\end{cases}\tag{40}$$

公式(40)在 $SO(2)$ 电磁对偶变化下保持不变.

5 结论

在本文中,首先回顾和分析了引入磁单极的重要性和必要性,给出了一般情况下双四维势的表达式及与之相应的具有 Lorentz 协变和电磁对偶性的 Maxwell 方程. 接着用格林函数法求出了有磁荷存在情况下双四维势场方程的解;最后给出了运动 Dyon 粒子具有 Lorentz 协变性的双四维势推迟势解,我们把它们称为 Dyon 粒子的广义李纳-魏谢尔势. 值得指出的是,在 $g=0$ 的情况下,给出的结论就回到了经典电动力学的情形.

对偶对称性在超弦场论以及与之相关的超对称规范场论和超引力场论中有着非常重要的作用. 目前,这个方面的研究在理论物理学界引起了广泛的关注,成了热门的研究课题之一. 然而, 尽管人们对对偶对称性的研究已取得了一些令人鼓舞的结果,例如,文献[3]中,作者之一给出了磁荷和电荷的相关性,文献[4—6],在电磁辐射和电磁对偶 AB 效应等方面做出了有意义的工作,但是大部分工作才刚刚展开,电磁对偶性在各个物理层面应用的理论和实验探讨都是非常必要和非常有意义的.

参考文献(References)

1 LI Kang, Carlos Naon. An Alternative Formulation of Classical Electromagnetic Duality. Modern Physics Letter, 2001, **A16**(26):1671

2 Rainer W Kuhne. Has the Last World Been Said on Classical Electrodynamics? New York: Rainton Press, 2004

3 LI Kang. Modern Physics Letters, 2002, **A17**(40):2647; LI Kang, CHEN Wen-Jun, Carlos Naon. Chin. Phys. Lett., 2003, **20**(3):321

4 LI Kang, WANG Jian-Hua. High Energy Physics and Nuclear Physics, 2003, **27**(10):870 (in Chinese)
(李康,王剑华. 高能物理与核物理,2003,**27**(10):870)

5 Hu Guo-Qi, LI Kang. Acta Physica Sinica, 2002, **51**(6):1208—1213 (in Chinese)
(胡国琦,李康. 物理学报,2002,**51**(6):1208—1213)

6 CHEN Wen-Jun, LI Kang. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2001, **28**:626 (in Chinese)
(陈文俊, 李康. 浙江大学学报(理科版), 2001, **28**:626)

Green Function Solution to the Doublet Potential Equations of the Moving Dyons*

LI Kang[1;1)]　　WANG Jian-Hua[2;2)]

1 (Hangzhou Teacher's College, Hangzhou 310036, China)

2 (Shaanxi College of Science and Engineer, Hanzhong 723000, China)

Abstract　After reviewing the double 4 dimensional potentials of the electromagnetic field theory in the presence of magnetic charge (or effective magnetic charge), we give out the electromagnetic (EM) duality symmetric Maxwell equations and the relationship between the field strength and the double potentials. Then by using the Green function method we find the Lorentz invariant retarded solutions of the field equations, and finally obtain the explicit expressions of the generalized Lienard-Wiechert potentials.

Key words　doublet potentials, Green function, EM duality, Dyons

Received 4 November 2004, Revised 18 January 2005

* Supported by National Natural Science Foundation of China (90303003, 10447005) and Natural Science Foundation of Zhejiang Province (M103042, 102011, 102028)

1) E-mail: kangli@hztc.edu.cn

2) E-mail: jianhua.wang@263.net