

一维非自治经典谐振子的精确解析解^{*}

王鹏^{1,2} 王顺金^{1,2,3;1)}

1 (四川大学物理系 成都 610064)

2 (西南交通大学物理研究所 成都 610031)

3 (兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心 兰州 730000)

摘要 一维时间相关的经典谐振子是一个 $SU(1,1)$ 非自治经典系统,物理上十分有用,而数学上难于得到其精确解析解.首次把新颖的代数动力学方法用于经典动力学系统,得到了这个模型的一般精确解;当时间相关的弹性系数为某些初等函数时,给出了精确解的解析形式.这是关于这一问题的重要结果.从精确解出发,推导出最近文献中提出的“解析近似解”,并指出该近似解的适用条件.

关键词 代数动力学 $SU(1,1)$ 非自治经典谐振子系统 精确解析解

在物理学中,谐振子模型能很好地描述很多领域中的现象,因而被广泛地用于物理学的很多分支学科中,如核物理^[1]、Paul 陷阱^[2]、量子光学^[3]等,都用到谐振子模型.因此,谐振子模型是物理学中的一个重要模型.

在谐振子模型的运动方程中,当弹性系数与时间无关时,对它的精确求解是很容易做到的,这个解在很多物理教科书中都能够找到.但是,当系数与时间相关时,这个系统就成为非自治系统,看起来简单,求其精确解却十分困难.然而,时间有关的谐振子在实际问题中却是很有用的.弹性系数受到环境的影响会随时间发生变化,有时人们有意要设计随时间变化的弹性系数去实现对粒子的控制(像人们在 Paul 陷阱中所做的那样),这时,人们都要处理时间有关的谐振子问题.鉴于问题的重要性,一些物理学家在此领域做出了很多贡献.对于一维时间相关的量子谐振子模型,它的精确解已经被人们讨论过^[4,5].而对于一维时间相关的经典谐振子的求解,这方面的工作却做的不充分,通常停留在研究其近似解的阶段,而且大多采用的是绝热近似方法.最

近,有人提出了一种求“解析近似解”(Analytic Approximation Solution)的方法^[6],这种方法与绝热近似法相似而又有区别.这就是说,还未求出一维时间相关的经典谐振子的一般精确解析解.

对于非自治量子系统,文献^[7]提出了代数动力学求解方法,而文献^[4,5]正是利用这一方法成功地得到了一维非自治量子谐振子的精确解.那么,能否用代数动力学方法来求解一维时间相关的经典谐振子问题呢?这正是本文的研究课题.

一维时间相关的经典谐振子的哈密顿量为

$$H(t) = \frac{1}{2}(p^2 + \Omega(t)x^2), \quad (1)$$

其运动方程是

$$\dot{x}(t) = p(t), \quad (2a)$$

$$\dot{p}(t) = -\Omega^2(t)x(t), \quad (2b)$$

如果设质量 $m = 1$ 则 $p(t) = m\dot{x}(t) = \dot{x}(t)$, 方程(2a,b)等价于牛顿方程

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2(t)x(t) = 0, \quad (2c)$$

不难看出,方程(2a,b)是哈密顿正则方程.令

$$\varphi = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad (3)$$

2004-09-24 收稿

^{*} 国家自然科学基金(10175029, 10375039), 教育部博士点基金和兰州重离子加速器国家实验室核理论中心基金资助

1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn

则(2a,b)方程可改写为

$$\phi = \hat{L}\phi, \quad (4)$$

相应的刘维算子 \hat{L} 为

$$\hat{L} = p \frac{\partial}{\partial x} - \Omega^2(t)x \frac{\partial}{\partial p}, \quad (5)$$

定义如下算子

$$\hat{k}_+ = p \frac{\partial}{\partial x}, \hat{k}_- = x \frac{\partial}{\partial p}, \hat{k}_0 = \frac{1}{2} \left(p \frac{\partial}{\partial p} - x \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (6)$$

这 3 个算子是 $SU(1,1)$ 群的生成元,它们满足如下对易关系

$$[\hat{k}_+, \hat{k}_-] = 2\hat{k}_0, [\hat{k}_0, \hat{k}_\pm] = \pm \hat{k}_\pm, \quad (7)$$

从公式(5),(6)和(7)可以看出,这个系统的刘维算子是 $SU(1,1)$ 群生成元的线性函数,即

$$\hat{L} = \hat{k}_+ - \Omega^2(t)\hat{k}_-, \quad (8)$$

根据代数动力学^[7],这个非自治系统具有 $SU(1,1)$ 动力学对称性,而且是可积的.

为求解方程(2a,b),我们引进规范变换

$$U = \exp(\nu_+ \hat{k}_+) \exp(\nu_- \hat{k}_-). \quad (9)$$

在这一规范变换下, x 变为

$$\begin{aligned} \bar{x} = U^{-1}x &= \exp(-\nu_- \hat{k}_-) \exp(-\nu_+ \hat{k}_+) x = \\ & \exp(-\nu_- \hat{k}_-) \left(1 - \nu_+ p \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu_+^2}{2} p \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right) x = \\ & \left(1 - \nu_- x \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\nu_-^2}{2} x \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \dots \right) (x - \nu_+ p) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\bar{L}} &= U^{-1} \hat{L} U - U^{-1} \frac{dU}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \nu_- + \nu_-^2 \nu_+ + \nu_+ (\Omega^2(t) + \dot{\nu}_-) & 1 + 2\nu_+ \nu_- + \Omega^2(t)\nu_+^2 + \nu_+^2 \nu_-^2 + \nu_+^2 \dot{\nu}_- - \dot{\nu}_+ \\ -\Omega^2(t) - \nu_-^2 - \dot{\nu}_- & -\nu_- - \Omega^2(t)\nu_+ - \nu_-^2 \nu_+ - \nu_+ \dot{\nu}_- \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

通过选择规范变换参数 $\nu_+(t)$ 和 $\nu_-(t)$, 让其满足规范条件,

$$\dot{\nu}_- = -\nu_-^2 - \Omega^2(t), \quad (14a)$$

$$\dot{\nu}_+ = 1 + 2\nu_+ \nu_-, \quad (14b)$$

则 $\hat{\bar{L}}$ 的非对角元为 0, 实现了 $\hat{\bar{L}}$ 的对角化. 这样, 规范变换后的刘维算子和正则方程变成

$$\begin{aligned} \hat{\bar{L}} &= -2\nu_- \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = f(t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ f(t) &= -2\nu_-(t), \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{p}} \end{bmatrix} = \hat{\bar{L}} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{p} \end{bmatrix}. \quad (15b)$$

现在不难看出, 这一特殊规范选择的优点在于, 规范

$$(x - \nu_+ p) + \nu_+ \nu_- x = (1 + \nu_+ \nu_-)x - \nu_+ p,$$

即

$$\bar{x} = (1 + \nu_+ \nu_-)x - \nu_+ p, \quad (10a)$$

同理

$$\bar{p} = U^{-1}p = -\nu_- x + p, \quad (10b)$$

如果把(10a)和(10b)式中的 x 和 p 用 \bar{x} 和 \bar{p} 表示, 可以得到逆换,

$$x = \bar{x} + \nu_+ \bar{p}, p = \nu_- \bar{x} + (1 + \nu_+ \nu_-) \bar{p}. \quad (10c)$$

为了使求解过程清楚明了, 我们将把各个算符表示成矩阵, 然后在这个矩阵表示的框架下求解方程(2a,b). 在这个矩阵表示中, 所采用的基底是

$\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$. 在这个表象中, 刘维算子(8)式的矩阵形式为

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2(t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

从(10a,b,c)式不难看出, 规范变换(9)式及其逆变换的矩阵形式为

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \nu_+ \nu_- & -\nu_+ \\ -\nu_- & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & \nu_+ \\ \nu_- & 1 + \nu_+ \nu_- \end{bmatrix}. \quad (12)$$

对刘维算子 \hat{L} 进行规范变换, 即

变换下的刘维算子 $\hat{\bar{L}}$ 被对角化, 方程(15b)实现了退耦合, 这对问题的求解起到了关键的作用. 很容易求得(15b)式的解,

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t f(t') dt'\right), \quad (16a)$$

$$\bar{p}(t) = \bar{p}_0 \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t f(t') dt'\right), \quad (16b)$$

其中 \bar{x}_0 和 \bar{p}_0 分别是 \bar{x} 和 \bar{p} 的初值. 根据(10a,b)式可以看出, 在规范变换参数取初值 $\nu_+(0) = 0$ 和 $\nu_-(0) = 0$ 的条件下, 有 $\bar{x}_0 = x_0, \bar{p}_0 = p_0$.

把(16a)和(16b)式代入(10c)式, 就得到了一维时间相关的经典谐振子运动方程(2a,b)的一般精确解

$$x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t f(t') dt'\right) +$$

$$p_0\nu_+ \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right), \quad (17a)$$

$$p(t) = x_0\nu_- \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right) + p_0(1 + \nu_+ \nu_-)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right), \quad (17b)$$

其中 x_0 和 p_0 是系统的初值.

把精确解(17a)式代入运动方程(2a)左边,把 $x(t)$ 对时间求导数,同时利用关于规范变换参数的方程组(14a)和(14b),并考虑到关系式

$$f(t) = -2\nu_-(t),$$

就有

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x_0\left[-\frac{1}{2}f(t)\right]\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right) + p_0\nu_+ \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right), \\ p_0\nu_+ \left[\frac{1}{2}f(t)\right]\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right) &= x_0\nu_- \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right) + p_0(1 + 2\nu_+ \nu_-)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right), \\ p_0\nu_+ (-\nu_-)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right) &= x_0\nu_- \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right) + p_0(1 + \nu_+ \nu_-)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f(t')dt'\right) = p(t), \end{aligned}$$

同样可证(17b)式满足,

$$\dot{p}(t) = -\Omega^2(t)x,$$

因此,精确解(17a,b)式是满足原方程(2a,b).

乍看起来,常微分方程(14a,b)并不比正则运动方程(2a,b)简单,甚至它们的非线性更使问题复杂化.但是,常微分方程(14a,b)有两个显著的特点,给一维时间相关的经典谐振子的求解带来新的希望.

(1)方程(14a,b)实现了两个待求函数的运动方程的退耦合:先求解一个函数的运动方程(14a),然后把其解代入(14b)可使其也变成一个函数的线性运动方程;相反,正则运动方程(2a,b)却是耦合的.

(2)方程(14a)是著名的 Riccati 方程,人们对它的求解积累了丰富的经验.事实上,我们正是基于 Riccati 方程(14a),借助于 Maple 和 Mathematica 求得了一些解析解.

下面给出当含时参数 $\Omega(t)$ 取具体的初等函数形式时求得的(14a,b)式的解析解,并通过(17a,b)式给出正则运动方程(2a,b)的解析解.以下是几个重要解例.

(1) $\Omega(t)$ 取幂函数.现具体给出 $\Omega(t) = t^2$ 时的解.

为了得到方程(2a,b)的解,首先要求方程组(14a,b)的解 $\nu_-(t)$ 和 $\nu_+(t)$.前面曾经提到,方程(14a)是 Riccati 方程,于是不难求的

$$\nu_-(t) = \frac{t^2\left[C_2J_\delta\left(\frac{t^3}{3}\right) + N_\delta\left(\frac{t^3}{3}\right)\right]}{C_2J_\rho\left(\frac{t^3}{3}\right) + N_\rho\left(\frac{t^3}{3}\right)},$$

$$\nu_+(t) = \left[\int \exp\left(-2\int \nu_-(t)dt\right)dt + C_1\right] \times \exp\left(2\int \nu_-(t)dt\right),$$

其中 C_1 和 C_2 是两个待定常数,可以由 $\nu_-(t)$ 和 $\nu_+(t)$ 的初值确定. J 和 N 分别是第 1 和第 2 类贝塞尔函数,两个参数 $\delta = -\frac{5}{6}, \rho = \frac{1}{6}$ 代表各自的阶数.

在计算过程中我们发现, $\Omega(t)$ 从 t 取到 t^4 ,甚至取 \sqrt{t} ,都可以从(14a,b)式求得解析解.因此有理由推测,参数 $\Omega(t)$ 取幂函数时,都可以得到解析解.

把这些结果代入方程(17a,b)中,就给出正则运动方程(2a,b)的解析解.

(2) $\Omega(t)$ 取指数函数.这里具体给出 $\Omega(t) = \exp(at)$ 时的解.

求得方程组(14a,b)的解析解为

$$\nu_-(t) = \frac{C_2N_\delta\left(\frac{\exp(at)}{a}\right) - J_\delta\left(\frac{\exp(at)}{a}\right)}{C_2N_\rho\left(\frac{\exp(at)}{a}\right) + J_\rho\left(\frac{\exp(at)}{a}\right)}\exp(at),$$

$$\nu_+(t) = \left[\int \exp\left(-2\int \nu_-(t)dt\right)dt + C_1\right] \times \exp\left(2\int \nu_-(t)dt\right),$$

其中 C_1 和 C_2 是两个待定常数,可以由 $\nu_-(t)$ 和 $\nu_+(t)$ 的初值确定. J 和 N 分别是第 1 和第 2 类贝塞尔函数,两个参数 $\delta = 1, \rho = 0$ 代表各自的阶数.把这些结果代入方程(17a,b)中,就给出正则运动方程(2a,b)的解析解.

(3) $\Omega(t)$ 取三角函数.这里具体给出 $\Omega(t) = \cos(at)$ 时的解.

求得方程组(14a,b)的解析解为

$$\nu_-(t) = -\frac{aC_1ce^1\left(-\frac{1}{4a^2}, at\right) + ase^1\left(-\frac{1}{4a^2}, at\right)}{-C_1ce^2\left(-\frac{1}{4a^2}, at\right) - se^2\left(-\frac{1}{4a^2}, at\right)},$$

$$\nu_+(t) = \left[\int \exp\left(-2\int \nu_-(t)dt\right)dt + C_1\right] \times \exp\left(2\int \nu_-(t)dt\right),$$

其中 C_1 和 C_2 是两个待定常数, 可以由 $\nu_-(t)$ 和 $\nu_+(t)$ 的初值确定. se^1 和 ce^1 分别是全周期奇、偶马丢 (Mathieu) 函数, 而 se^2 和 ce^2 分别是半周期奇、偶马丢函数. 把这些结果代入方程 (17a, b) 中, 就给出正则运动方程 (2a, b) 的解析解.

当 $\Omega(t)$ 取正弦函数形式时, 可以求得类似形式的解析解. 由于其他形式的三角函数, 比如正弦函数与余弦函数之积, 总可以通过各种三角函数公式化为这两种形式之一. 因此有理由推测, 参数 $\Omega(t)$ 取各种形式的三角函数时, 都可以得到解析解.

(4) $\Omega(t)$ 取双曲正切函数. 为了与文献 [6] 比较, 这里具体给出 $\Omega(t)$ 的形式为

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1)\tanh(\alpha t) + \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_1).$$

同理, 不难求得方程组 (14a, b) 的解析解. 由于解的表达式所占篇幅太长, 这里不再写出, 有兴趣的读者可借助于 Maple 和 Mathematica 了解该解的细节.

下面讨论在采用一定的近似后, 由方程 (17a, b) 的精确解可以得到在文献 [6] 中提出的所谓“解析近似解”. 文献 [6] 所用方法的实质是, 对含时参数 $\Omega(t)$ 所取的函数形式做一定的限制 (近似), 然后在这一特定形式下, 完成对方程的求解. 具体来讲, 因为不含时谐振子模型的解是周期函数, 所以首先把 $\Omega(t)$ 中自变量 t 的变化范围限制在一个周期中的一个很小的区间内, 但是并不要求这个区间是无穷小, 这个区间被称为“子周期”. 在这个区间中, $\Omega(t)$ 取阶梯函数的形式, 即从一个常数 Ω_1 变化到另一个常数 Ω_2 . 在从这个阶梯函数的一个阶梯 (常数 Ω_1) 变化到另一个阶梯 (常数 Ω_2) 的过程中, 要求这个变化是一个突然的变化, 要在很短的时间内完成. 文中反复强调, 这一点是其与绝热近似的本质区别. 在这种近似下, $\Omega(t)$ 实质可以用函数 $\Omega(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1)\tanh(\alpha t) + \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_1)$ 描述. 不难看出, 在 $\alpha \rightarrow \infty$ 的极限下, 当 $t < 0$ 时, $\Omega(t) = \Omega_1$; 当 $t > 0$ 时, $\Omega(t) = \Omega_2$.

我们在前面已经求得了 $\Omega(t)$ 取 $\Omega(t) = \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1)\tanh(\alpha t) + \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_1)$ 时 ν_- 的解析解, 在此基础上可以求得 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \nu_-(t) = i\Omega_1, (t < 0)$; $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \nu_-(t) = i\Omega_2, (t > 0)$.

在前面讲的那些假定条件下, 文献 [6] 求得的“解析近似解”为

$$x(t) = g(t)\exp(i\gamma(t)) = g(t)\cos(\gamma(t)) + ig(t)\sin(\gamma(t)), \quad (18)$$

其中

$$g(t) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2(t)} + \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2(t)}\right) \cos\left(2\int_{t_s}^t \Omega(t') dt'\right)}, \quad (19a)$$

$$\gamma(t) = \arctan\left[\frac{\Omega_1}{\Omega(t)} \tan\left(\int_{t_s}^t \Omega(t') dt'\right)\right] + \theta. \quad (19b)$$

在 (19a)、(19b) 式中, t_s 是前面讲的“子周期”的中点.

不难看出, (18) 式中的 $g(t)\cos(\gamma(t))$ 和 $g(t)\sin(\gamma(t))$ 是谐振子模型的两个线性独立解. 只要在一定的近似下把精确解 (17a) 式化为类似的形式, 然后证明其中任意一个相等即可.

现在利用方程 (17a, b) 和 (19a, b), 使得精确解和“解析近似解”的初始条件相同, 从而确定出

$$x_0 = a_1, p_0 = a_1\Omega_1\sin\theta, \quad (20)$$

如果令 $\theta = 0$, 由 (20) 式可得 $p_0 = 0$. 此时精确解 (17a) 式变为

$$x(t) = a_1 \exp\left(\int_0^t \nu_-(t') dt'\right). \quad (21)$$

所以, 当 $\Omega(t)$ 取 $\Omega(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1)\tanh(\alpha t) + \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_1)$ 时, 考虑 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \nu_-(t) = i\Omega_1, (t < 0)$; $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \nu_-(t) = i\Omega_2, (t > 0)$, 则精确解 (21) 式的具体形式为

$$x(t) = a_1 \exp(i\Omega_1 t) \quad (t < 0), \quad (22a)$$

$$x(t) = a_1 \exp(i\Omega_2 t) \quad (t > 0). \quad (22b)$$

从精确解 (22a) 式可以看出, 当 $t < 0$ 时, 谐振子的振幅是 a_1 而相位是 $\Omega_1 t$; 而从精确解 (22b) 式可以看出, 当 $t > 0$ 时, 谐振子的振幅是 a_1 而相位是 $\Omega_2 t$.

同样, 当 $\Omega(t)$ 取 $\Omega(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1)\tanh(\alpha t) + \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_1)$ 时, “解析近似解”也有相应的具体形式. 取 $t_s = 0$, 根据公式 (19a, b), 它们分别是

$$g(t) = a_1, \gamma(t) = \Omega_1 t \quad (t < 0), \quad (23a)$$

$$g(t) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} + \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2}\right) \cos(2\Omega_2 t)\right]^{1/2},$$

$$\gamma(t) = \arctan\left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \tan(\Omega_2 t)\right], (t > 0). \quad (23b)$$

对比(22a,b)和(23a,b)式可以看出,当 $t < 0$ 时,“解析近似解”和精确解是完全一样的.但是,当 $t > 0$ 时,两者就有差别了.这一差别来自“解析近似解”忽略了 $\Omega(t)$ 从 Ω_1 跳至 Ω_2 时的非绝热效应.为了分析这个差别的大小,我们把(23b)式对 Ω_1 在 Ω_2 点附近做泰勒展开,于是有

$$g(t) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} + (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{d}{d\Omega_1} g(\Omega_1, t) \Big|_{\Omega_1 = \Omega_2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{2} \frac{d^2}{d\Omega_1^2} g(\Omega_1, t) \Big|_{\Omega_1 = \Omega_2} + \dots \right], \quad (24a)$$

$$\gamma(t) = \Omega_2 t + (\Omega_1 - \Omega_2) \times \frac{d}{d\Omega_1} \arctan \left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \tan(\Omega_1 t) \right] \Big|_{\Omega_1 = \Omega_2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{2} \frac{d^2}{d\Omega_1^2} \arctan \left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \tan(\Omega_1 t) \right] \Big|_{\Omega_1 = \Omega_2} + \dots \quad (24b)$$

不难看出, (24a,b) 式的第 1 项分别正是式(22b)的振幅和相位.而多出的部分,是关于 $(\Omega_1 - \Omega_2)$ 的级数.设这两个级数的系数分别为 a_i 和 b_i ,在 t 较小的情况下,忽略 t^2 及高次项,可以算出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cong \Omega_2$ 以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \cong t \tan(\Omega_2 t)$.所以,当 $\Omega_2 < 1$,同时 $|\Omega_1 - \Omega_2| < 1$ 时,这两个幂级数一定收敛.而不满足这一条件时,以上两个幂级数则不一定收敛.这也就是说,当 Ω_1 和 Ω_2 满足以上条件时,文献[6]采用的近似所达到的效果将比较好;反之,效果就不好.而数值计算也很好印证了这个分析结果.其中,图 1(a) 显示的是 $\Omega_2 < 1, |\Omega_1 - \Omega_2| < 1$ 的情况,两个条件曲线符合较好,近似地较好.图 1(b) 和图 1(c) 分别是 $\Omega_2 > 1$ 和 $|\Omega_1 - \Omega_2|$ 大于 1 的情况,此时近似是非常不好的.

至此,我们首次用新颖的代数动力学方法,求得了一维时间相关的经典谐振子的精确解,当含时参数 $\Omega(t)$ 取各种初等函数形式时,给出系统精确的解析形式,这是对这一重要的物理系统的精确求解

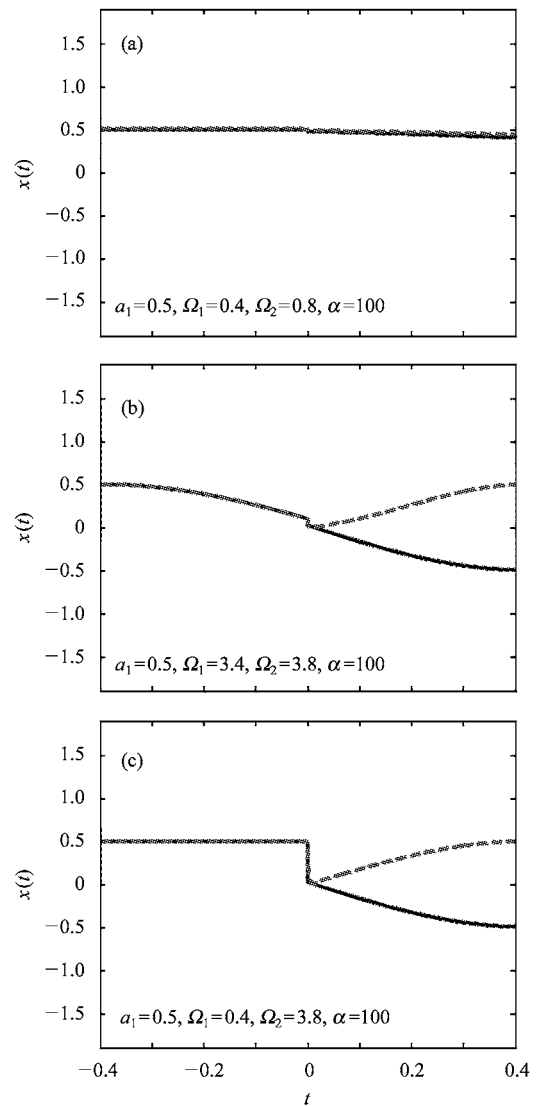


图 1 Ω_1 和 Ω_2 不同取值下的 $x-t$ 曲线
实线表示精确解,虚线表示“解析近似解”.

问题的一个比较普遍而满意的解答.最后讨论了最近提出的“解析近似解”对于精确解的可信度与近似性.这些结果有助于人们进一步研究和利用这个重要的物理系统,无论在理论上还是在实际应用中都有重要的意义.

参考文献 (References)

- 1 Freer M, Betts R R. Nucl. Phys., 1995, **A587**: 36; Dong Y B, Faessler A. Nucl. Phys., 1999, **A651**:209
- 2 Paul W. Rev. Mod. Phys., 1990, **62**:531; Brown L S. Phys. Rev. Lett., 1991, **66**:527
- 3 Colegrave R K, Abdallas M S. Opt. Acta, 1981, **28**:495
- 4 WANG S J, ZUO W. Phys. Lett., 1994, **A196**:13
- 5 ZUO W, WANG S J. Acta Physica Sinica, 1995, **44**(8):1177
- 6 Guasti F M. Physica, 2004, **D189**:188
- 7 WANG S J, LI F L, Weiguny A. Phys. Lett., 1994, **A180**:189

Analytic Exact Solution of One-Dimensional Nonautonomous Classical Harmonic Oscillator *

WANG Peng^{1,2} WANG Shun-Jin^{1,2,3;1)}

1 (Department of Physics Sichuan University, Chengdu 610064, China)

2 (Institute of Physics Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

3 (Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator Lanzhou, Lanzhou 730000, China)

Abstract One-dimensional time-dependent classical harmonic oscillator is a nonautonomous system with an $SU(1,1)$ dynamical symmetry. By means of algebraic dynamics method, we have obtained its exact solution for the first time. As the time-dependent stiffness of the harmonic oscillator assumes some elementary functions, such as power functions, trigonal functions, exponential functions etc., the exact solutions become analytic. The recently proposed “analytic approximation solution” is proved to be a good approximation to the corresponding analytic solution under some conditions.

Key words algebraic dynamics method, $SU(1,1)$ nonautonomous classical harmonic oscillator, analytic exact solution

Received 14 September 2004

* Supported by National Natural Science Foundation of China(10175029,10375039), Doctoral Program Foundation from the Ministry of Education in China and Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Accelerator Lanzhou

1) E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn