第 28 卷 第 8 期
2004 年 8 月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.28, No.8
Aug., 2004

非对易空间 R^{2N} 的转动及其实现*

熊华晖[1)] 邓辉 石国芳 石康杰
(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 给出非对易 R^{2N} 中坐标辛变换对应的幺正变换的实现;给出这种幺正变换引起的波函数的变化,也就是在 Hilbert 空间的幺正变换的矩阵元.

关键词 非对易空间 辛变换 幺正变换

1 引言

超弦理论是目前最有希望统一量子论与广义相对论的理论.在 B 场存在时,超弦理论会给出时空坐标不对易的结果[1],因此,非对易几何[2—4]的研究是有深刻物理意义的.超弦理论需要研究坐标的各种对称变换[5]及相关的表示.其中包括坐标的转动及有关物理问题在转动下的对称性质,转动即平直非对易空间坐标(相当于普通相空间中的广义动量 p 和广义坐标 q)的线性变换,是最基本的变换.在弦论中坐标是作为场量即算子实现的,而它们的变换是对应于算子作用空间(Hilbert 空间)的幺正变换.因此,有必要给出这种幺正变换的算子实现,以及给出它对 Hilbert 空间态矢量的作用.

本文给出非对易坐标辛变换(这是作为幺正变换的必要条件)的算子实现,这也就是辛群的振子实现.本文还给出在广义坐标表象(q 表象)中波函数在幺正变换下的变化,这在处理有关波函数结构的问题中是有意义的.比如在固体晶格理论中,它可以导出 kq 表象的变换矩阵,从而分析波函数的对称性质.非对易场论中,在研究非对易 orbifold T^{2N}/G[6,7] 中的孤子时需要由 kq 表象的变换矩阵以构成其完全解,由本文中以波函数变化给出的结果能求出这类变换.

2 非对易空间转动的算子实现

考虑 $2N$ 维非对易空间的坐标,它们是线性厄米算子,满足对易关系:

$$[Y_j, Y_k] = \mathrm{i}\theta_{jk}, \qquad j,k = 1,2,\cdots,2N, \tag{1}$$

由 θ_{jk} 形成的矩阵 θ 是实的反对称矩阵,本文中只考虑 θ 非退化的情形,即 $\det\theta \neq 0$.

考虑变换(在本文中重复指标表示求和):

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{Y} = \Big(\sum_{l=1}^{2N} R_{jl}Y_l\Big) = (R_{jl}Y_l)_{2N\times 1}, \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{Y}'$, $\boldsymbol{Y}$ 都表示为一个列矩阵.

由于非对易空间的转动(线性变换)相当于 Hilbert 空间的幺正变换,

$$\boldsymbol{Y}' = \hat{R}\boldsymbol{Y}\hat{R}^{-1}, \tag{3}$$

因此对易关系不变:

$$[Y'_j, Y'_k] = [Y_j, Y_k]. \tag{4}$$

由(2),(4)式,可得出保持坐标之间对易关系不变的变换矩阵 R 须满足如下条件:

$$R\theta R^{\mathrm{T}} = \theta, \tag{5}$$

因此 R 属于辛群.

我们的目标是构造一个二次型:

$$\boldsymbol{Y}'^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{Y} = a, \tag{6}$$

使转动算符

$$\hat{R} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{Y}} = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{\mathrm{i}a}{n}\Big)^n, \tag{7}$$

并要求:

2004-02-04 收稿
* 国家自然科学基金(10175050)资助
1) E-mail: jimharry@eyou.com

$$A = A^{\dagger}, \tag{8}$$

使得 $\hat{R}^{\dagger} = \hat{R}^{-1}$.

由于(1)式,

$$\left(1 + \frac{\mathrm{i}a}{n}\right)\boldsymbol{Y}\left(1 - \frac{\mathrm{i}a}{n}\right) = \boldsymbol{Y} + \left[\frac{\mathrm{i}a}{n}, \boldsymbol{Y}\right] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$\frac{1}{n}\theta(A + A^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Y},$$

再由(7)式,可得到(3)式的结果

$$\boldsymbol{Y}' = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{\theta(A + A^{\mathrm{T}})}{n}\right]^n \boldsymbol{Y} =$$

$$\mathrm{e}^{\theta(A + A^{\mathrm{T}})}\boldsymbol{Y} = R\boldsymbol{Y}, \tag{9}$$

因此,(7)式中的 A 应满足

$$\mathrm{e}^{\theta(A + A^{\mathrm{T}})} = R. \tag{10}$$

我们的任务是由满足(5)式的 R 找出满足(10)式 A 来,同时这种 A 还要求满足(8)式.我们发现,这种 R 还应该满足一些附加的要求(见(11)式和(16)式).

具体讨论如下:

当 R 是辛群的与单位元连接时的分支时,有

$$R = \mathrm{e}^{\lambda r}, \tag{11}$$

其中 r 是辛代数的元.由(5)式得

$$\mathrm{e}^{\lambda r}\theta\mathrm{e}^{\lambda r^{\mathrm{T}}} = \theta.$$

将上式对 λ 求偏微商得

$$\mathrm{e}^{\lambda r}(r\theta + \theta r^{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{\lambda r^{\mathrm{T}}} = 0,$$

即

$$r\theta + \theta r^{\mathrm{T}} = 0,\ \theta^{-1}r = -r^{\mathrm{T}}\theta^{-1}. \tag{12}$$

令

$$A = \frac{1}{2}\lambda\theta^{-1}r, \tag{13}$$

就有

$$A^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\lambda r^{\mathrm{T}}\theta^{-1\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\lambda r^{\mathrm{T}}\theta^{-1} = \frac{1}{2}\lambda\theta^{-1}r = A. \tag{14}$$

由(10)式,当 $\hat{R} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{Y}}$时就有

$$\hat{R}\boldsymbol{Y}\hat{R}^{-1} = \mathrm{e}^{\theta(A + A^{\mathrm{T}})}\boldsymbol{Y} = \mathrm{e}^{\theta(\lambda\theta^{-1}r)}\boldsymbol{Y} = \mathrm{e}^{\lambda r}\boldsymbol{Y} = R\boldsymbol{Y}. \tag{15}$$

当 λr 为实矩阵时,即

$$(\lambda r)^* = \lambda r, \tag{16}$$

则 $A^* = A$(θ 为实矩阵),有

$$A^{*\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} = A,$$

即

$$A^{\dagger} = A,$$

因此 $\hat{R}$ 为幺正算符.

结论是,满足(10),(11)和(16)式的 R 可以用(7)式来实现,即可以将转动算子 $\hat{R}$ 表示为幺正算子,

$$\hat{R} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{Y}}, \tag{17}$$

其中,

$$R = \mathrm{e}^{\lambda r}, A = \frac{1}{2}\lambda\theta^{-1}r. \tag{18}$$

(17)式就是非对易空间坐标辛变换的算子实现,由于 $a = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{Y}$ 是非对易坐标的二次式,这也就给出辛群的振子实现.

3 广义坐标的共同本征态矢在转动变换下的变换方式

本节探讨算子 $\hat{R}$ 作用于 Hilbert 空间态矢量上的结果.当 θ 非退化时,总可以把非对易坐标$\{Y_j\}$用广义坐标 $\hat{q}$ 和广义动量$\hat{p}$ 来线性组合.用广义坐标和动量作为新坐标,当非对易空间为 $2N$ 维时,$\{\hat{p}_j\}$和$\{\hat{q}_j\}$都是 N 个分量的线性厄米算子,这时,非对易空间的转动可以由辛矩阵 S 来表示,其中

$$SJS^{\mathrm{T}} = J, J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

考虑$\{q_j\}$的共同本正态$|\boldsymbol{q}\rangle$在 $\hat{R}$ 下的结果$|\boldsymbol{q}\rangle' = \hat{R}|\boldsymbol{q}\rangle$,本节就是求出$|\boldsymbol{q}\rangle'$,找出它的波函数$\langle\boldsymbol{q}'|\hat{R}|\boldsymbol{q}\rangle = \langle\boldsymbol{q}'|\boldsymbol{q}\rangle'$.

首先将非对易空间的坐标改写为 Hilbert 空间的算子$\{\hat{p}_j\}$和$\{\hat{q}_j\}$的线性组合,令

$$Y_j = U_{jl}\hat{p}_l + V_{jl}\hat{q}_l, j = 1,2,\cdots,2N; l = 1,2,\cdots,N, \tag{19}$$

其中 $\hat{p}_j, \hat{q}_k(j,k = 1,2,\cdots,N)$满足正则对易关系,即

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = \mathrm{i}\delta_{jk}, [\hat{q}_j, \hat{q}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0.$$

本文约定普朗克常数 $\hbar = 1$.

(19)式满足对易关系(1),因此其系数矩阵满足如下关系:

$$VU^{\mathrm{T}} - UV^{\mathrm{T}} = \theta. \tag{20}$$

可以证明,当 $\det\theta \neq 0$ 时,一定可以找到 $2N \times N$ 的矩阵 U 和 V 满足(20)式的关系.

由(3)和(15)式可得

$$\boldsymbol{Y}' = \hat{R}\boldsymbol{Y}\hat{R}^{-1} = R\boldsymbol{Y} = R(U\hat{\boldsymbol{p}} + V\hat{\boldsymbol{q}}). \tag{21}$$

也可将(21)式写为

$$\boldsymbol{Y}' = \hat{R}\boldsymbol{Y}\hat{R}^{-1} = \hat{R}(U\hat{\boldsymbol{p}} + V\hat{\boldsymbol{q}})\hat{R}^{-1} = U\hat{\boldsymbol{p}}' + V\hat{\boldsymbol{q}}'. \tag{22}$$

(22)式中,

$$\hat{\boldsymbol{p}}' = \hat{R}\hat{\boldsymbol{p}}\hat{R}^{-1}, \hat{\boldsymbol{q}}' = \hat{R}\hat{\boldsymbol{q}}'\hat{R}^{-1}. \tag{23}$$

由于转动 $\hat{R}$ 是 $\boldsymbol{Y}$ 的线性变换,因此,它也给出 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{q}}$ 的一个线性变换:

$$\hat{\boldsymbol{q}}' = \alpha\hat{\boldsymbol{p}} + \beta\hat{\boldsymbol{q}}, \tag{24}$$
$$\hat{\boldsymbol{p}}' = \eta\hat{\boldsymbol{p}} + \xi\hat{\boldsymbol{q}},$$

其中 α,β,η,ξ 是实的 $N\times N$ 矩阵.

由(23)可知,正则坐标和动量在此变换后,仍保持对易关系不变,即

$$[\hat{q}'_j,\hat{p}'_k] = \mathrm{i}\delta_{jk} = \mathrm{i}(\eta\beta^{\mathrm{T}} - \xi\alpha^{\mathrm{T}})_{kj},$$
$$[\hat{q}'_j,\hat{q}'_k] = 0 = \mathrm{i}(\alpha\beta^{\mathrm{T}} - \beta\alpha^{\mathrm{T}})_{kj},$$
$$[\hat{p}'_j,\hat{p}'_k] = 0 = \mathrm{i}(\eta\xi^{\mathrm{T}} - \xi\eta^{\mathrm{T}})_{kj}.$$

它们可以写成:

$$\eta\beta^{\mathrm{T}} - \xi\alpha^{\mathrm{T}} = I, \tag{25}$$
$$\alpha\beta^{\mathrm{T}} - \beta\alpha^{\mathrm{T}} = 0, \tag{26}$$
$$\eta\xi^{\mathrm{T}} - \xi\eta^{\mathrm{T}} = 0. \tag{27}$$

以下将考察力学量 $\{\hat{q}_j\}$ 的共同本征态矢在此转动变换下的变换方式,也就是要在 $\boldsymbol{q}$ 表象中找出 $\{\hat{q}'_j\}$ 的共同本征态.

假设 $\{\hat{q}'_j\}$ 的共同本征态矢为

$$|\psi\rangle = C(\boldsymbol{h})\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h})}\,|\boldsymbol{q}\rangle \mathrm{d}^N q, \tag{28}$$

这里的 G 为短阵,$\boldsymbol{h}$ 为 N 分量列矩阵,此本征态在 q 表象中的波函数是

$$\psi = \langle \boldsymbol{q}' | \psi\rangle = C(\boldsymbol{h})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h})}. \tag{29}$$

算子 $\hat{q}'_j$ 对波函数的作用是($\hat{p}'_j$ 在 $\boldsymbol{q}$ 表象的算符是 $\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial q_j}$,而作用在态矢量上是 $\hat{p}_j|\boldsymbol{q}\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_j}|\boldsymbol{q}\rangle$(见注1))

$$\begin{aligned}\hat{q}'_j\psi &= (\alpha_{jk}\hat{p}_k + \beta_{jk}\hat{q}_k)\psi = \\ &(\alpha_{jk}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial q_k} + \beta_{jk}q_k)\psi = \\ &[\alpha_{jk}(G_{km}q_m + q_lG_{lk} + h_k) + \beta_{jk}q_k]\psi.\end{aligned} \tag{30}$$

(30)式又可写为

$$\hat{\boldsymbol{q}}'\psi = [\alpha(G + G^{\mathrm{T}})\boldsymbol{q} + \beta\boldsymbol{q} + \alpha\boldsymbol{h}]\psi. \tag{31}$$

共同本征态 $|\psi\rangle$ 要求,公式(30)的右边 = 常数 × ψ,因而在(31)式右边 ψ 前面的式子应与 $\boldsymbol{q}$ 无关,这要求

$$\alpha(G + G^{\mathrm{T}}) + \beta = 0. \tag{32}$$

下面来解满足(32)式的 G 矩阵:

假设 α 矩阵是满秩的,可解得

$$G + G^{\mathrm{T}} = -\alpha^{-1}\beta. \tag{33}$$

由对易关系(25)—(27)式可保证(33)式的右边仍是对称矩阵(见附录 A),因此 $G + G^{\mathrm{T}}$ 有解.可直接令 G 为对称矩阵,得到

$$G = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}\beta. \tag{34}$$

此时,

$$\boldsymbol{q}'\psi = \alpha\boldsymbol{h}\psi \equiv \boldsymbol{t}\psi, \tag{35}$$

即

$$\hat{q}'_j|\psi\rangle = \alpha_{jk}h_k|\psi\rangle.$$

因此 $|\psi\rangle$ 的确是 $\{\hat{q}'_j\}$ 的共同本征态,$\hat{q}'_j$ 的本征值为 $t_j = \alpha_{jl}h_l$,即 $\boldsymbol{t} = \alpha\boldsymbol{h}$.那么,$\{\hat{q}'_j\}$ 的共同本征矢可写为

$$|\psi(\boldsymbol{t})\rangle = C(\boldsymbol{t})\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t})}|\boldsymbol{q}\rangle \mathrm{d}^N q. \tag{36}$$

现在考察 $\hat{p}'_j$ 作用在 $\{\hat{q}'_j\}$ 的共同本征态上的结果:

$$\begin{aligned}\hat{p}'_j\psi(\boldsymbol{t}) &= (\eta\hat{p} + \xi\hat{q})C(\boldsymbol{t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t})} = \\ &C(\boldsymbol{t})(-\mathrm{i}\eta_{jl}\frac{\partial}{\partial q_l} + \xi_{jl}q_l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t})} = \\ &C(\boldsymbol{t})\{\eta_{jl}(G_{lm} + G_{ml})q_m + \eta_{jl}\alpha^{-1}_{lm}t_m + \xi_{jm}q_m\} \\ &\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t})} = \\ &\{\eta_{jl}(G_{lm} + G_{ml})q_m + \xi_{jm}q_m + \eta_{jl}\alpha^{-1}_{lm}t_m\}\psi(\boldsymbol{t}).\end{aligned} \tag{37}$$

由(34)可知,

$$G_{lm} + G_{ml} = -(\alpha^{-1}\beta)_{lm},$$

则(37)式可写为

$$\hat{p}'_j\psi(\boldsymbol{t}) = \{-\eta_{jl}(\alpha^{-1}\beta)_{lm}q_m + \xi_{jm}q_m + \eta_{jl}\alpha^{-1}_{lm}t_m\}\psi(\boldsymbol{t}). \tag{38}$$

由(25)得到,

$$\xi = (\eta\beta^{\mathrm{T}} - I)(\alpha^{\mathrm{T}})^{-1},$$

又由于 $\beta^{\mathrm{T}}(\alpha^{\mathrm{T}})^{-1} = \alpha^{-1}\beta$(见附录 A),因此

$$\xi = \eta\alpha^{-1}\beta - (\alpha^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

那么,(38)式又可写为

$$\hat{p}'_j\psi(\boldsymbol{t}) = \{-(\alpha^{\mathrm{T}})^{-1}_{jm}q_m + \eta_{jl}\alpha^{-1}_{lm}t_m\}\psi(\boldsymbol{t}). \tag{39}$$

我们希望 $\hat{p}'_j$ 作用在 $\psi(\boldsymbol{t})$ 上的结果与量子力学给出的一般关系相同,即

$$\hat{p}'_j\psi(\boldsymbol{t}) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_j}\psi(\boldsymbol{t}), \tag{40}$$

其中 t_j 为 $|\psi\rangle$ 的本征值.

$\{q'_j\}$ 的共同本征态还有一相因子项 $C(\boldsymbol{t})$ 未定,希望相因子取某一形式使得(39)式恰好化为(40)式的形式.因此,令

$$C(\boldsymbol{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\boldsymbol{t})},$$

将上式代入 $\psi(\boldsymbol{t})$,

1)由于在 $\boldsymbol{q}$ 表象:$\hat{p}_j = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial q_j}$,$\langle \boldsymbol{q}|\hat{p}_j|\phi\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial q_j}\langle \boldsymbol{q}|\phi\rangle$,对一切 ϕ 成立,因此 $\langle\phi|\hat{p}_j|\boldsymbol{q}\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_j}\langle\phi|\boldsymbol{q}$ 对一切 ϕ 成立,所以 $\hat{p}_j|\boldsymbol{q}\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_j}|\boldsymbol{q}\rangle$.

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_j}\psi(\boldsymbol{t})=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_j}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(\boldsymbol{t})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t})}\}=$$

$$-\left\{\frac{\partial f(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}+\alpha_{mj}^{-1}q_m\right\}\psi(\boldsymbol{t}),$$

和(39)式比较,可发现,只要使

$$-\frac{\partial f(\boldsymbol{t})}{\partial t_j}=\eta_{jl}\alpha_{lm}^{-1}t_m,\tag{41}$$

则(39)式和(40)式的结果便完全相同.

由对易关系(25)—(27)式,可以证明 $\eta\alpha^{-1}$为对称矩阵(见附录A),因此解(41)式可令

$$f(\boldsymbol{t})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\eta\alpha^{-1}\boldsymbol{t}+C_0,\tag{42}$$

就可使(41)式成立.上式中 C_0 为常数项,由归一化条件决定.

至此,所求得的本征矢标准化为

$$|\psi\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}C_0}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\eta\alpha^{-1}\boldsymbol{t}}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t})}|\boldsymbol{q}\rangle\mathrm{d}^Nq.$$

以下将考察本征矢$|\psi\rangle$是否满足正交归一条件:

$$\langle\psi(\boldsymbol{t}_1)|\psi(\boldsymbol{t}_2)\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}\int\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}\eta\alpha^{-1}\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{T}}\eta\alpha^{-1}\boldsymbol{t}_2)}\times$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t}_2-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t}_1)}\times$$
$$\langle\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_2\rangle\mathrm{d}^Nq_1\mathrm{d}^Nq_2=$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}\int\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{t}_1^{\mathrm{T}}\eta\alpha^{-1}\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_2^{\mathrm{T}}\eta\alpha^{-1}\boldsymbol{t}_2)}\times$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}(\boldsymbol{t}_2-\boldsymbol{t}_1)}\mathrm{d}^Nq_1=$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}(2\pi)^N\delta^N(\alpha^{-1}(\boldsymbol{t}_2-\boldsymbol{t}_1))=$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}(2\pi)^N|\det\alpha|\delta^N(\boldsymbol{t}_2-\boldsymbol{t}_1).$$

因此,可令归一化常数项为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}=(2\pi)^{-N}|\det\alpha|^{-1}.$$

再考察$|\psi\rangle$是否满足完备条件:

$$\int|\psi(\boldsymbol{t})\rangle\langle\psi(\boldsymbol{t})|\mathrm{d}^Nt=$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t}-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{t})}$$
$$|\boldsymbol{q}_2\rangle\langle\boldsymbol{q}_1|\mathrm{d}^Nq_2\mathrm{d}^Nq_1\mathrm{d}^Nt=$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_1)}|\boldsymbol{q}_2\rangle\langle\boldsymbol{q}_1|$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}})\alpha^{-1}\boldsymbol{t}}\mathrm{d}^Nt\mathrm{d}^Nq_1\mathrm{d}^Nq_2=$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_1)}|\boldsymbol{q}_2\rangle\langle\boldsymbol{q}_1|$$
$$\int(2\pi)^N\delta^N(\alpha^{-1\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1))\mathrm{d}^Nq_1\mathrm{d}^Nq_2=$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(C_0-C_0^*)}(2\pi)^N|\det\alpha|\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}_1)}$$
$$|\boldsymbol{q}_2\rangle\langle\boldsymbol{q}_1|\delta^N(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}_1)\mathrm{d}^Nq_1\mathrm{d}^Nq_2=$$
$$\int|\boldsymbol{q}_1\rangle\langle\boldsymbol{q}_1|\mathrm{d}^Nq_1=\mathrm{identity}.$$

以上找到了保持非对易空间坐标之间对易关系不变的转动变换对非对易坐标而言即就是辛变换,并且找出了这种变换在 Hibert 空间对应的波函数的幺正变换.最后,得到

$$\langle\boldsymbol{q}'|\hat{R}|\boldsymbol{q}\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}C_0}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\eta\alpha^{-1}\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{q}'+\boldsymbol{q}'^{\mathrm{T}}\alpha^{-1}\boldsymbol{q})},$$

其中常数 C_0 只能确定到虚部.这就是转动变换 $\hat{R}$ 在 Hilbert 空间的具体形式.

4 结论

在本篇文章中,找到了保持 $2N$ 维非对易空间辛结构的转动变换,在 Hilbert 空间对应的幺正变换,并且给出了广义坐标$\{\hat{q}_j\}$的共同本征矢在此幺正变换下的变换方式.

在求解$\{\hat{q}'_j\}$的共同本征矢时,给出了 α 非退化时的共同本征矢,在退化的情形,也可求出$\{\hat{q}'_j\}$的共同本征矢.

参考文献(References)

1 Seiberg N, Witten E. JHEP, 1999, **032**: 9909

2 Connes A. Non-Commutative Geometry. New York: Academic Press, 1994

3 CHEN Y X, HOU B Y, HOU B Y. Nucl. Phys., 2002, **B638**: 220—242

4 Karabali D, Nair V P. Nucl. Phys., 2002, **B641**: 533—546

5 Polchinski J. String Theory. London: Cambridge University Press, 1998. 1—31

6 Martinec E J, Moore G. Noncommutative Solitons on Orbifold. hep-th/0101199

7 DENG H, HOU B Y, SHI K J. Soliton Solutions on Noncommutative Orbifold T^2/Z_4. J. Math. Phys., preprint

附录 A

1. 证明: $\alpha^{-1}\beta$ 为对称矩阵.

由(26)式可得,

$$\beta\alpha^{T}=\alpha\beta^{T}.$$

对上式两边左右分别乘以 α^{-1}和$(\alpha^{T})^{-1}$,得到

$$\alpha^{-1}\beta=\beta^{T}(\alpha^{T})^{-1}=(\alpha^{-1}\beta)^{T},$$

所以, $\alpha^{-1}\beta$ 为对称矩阵.

2. 证明: $\eta\alpha^{-1}$为对称矩阵.由(25)式,可得

$$\xi=\eta\beta^{T}(\alpha^{T})^{-1}-(\alpha^{T})^{-1}.$$

对上式两边取转置,得

$$\xi^{T}=\alpha^{-1}\beta\eta^{T}-\alpha^{-1}.$$

那么,

$$\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\beta\eta^{T}-\xi^{T}. \tag{A1}$$

对(A1)式两边同时左乘以 η,得

$$\eta\alpha^{-1}=\eta\alpha^{-1}\beta\eta^{T}-\eta\xi^{T}. \tag{A2}$$

由前一个证明可知, $\alpha^{-1}\beta=\beta^{T}(\alpha^{T})^{-1}$,因此(A2)式右边可写为

$$\eta\alpha^{-1}=\eta\beta^{T}(\alpha^{T})^{-1}\eta^{T}-\eta\xi^{T},$$

由(25)式知, $\eta\beta^{T}=I+\xi\alpha^{T}$,上式右边又可化为

$$\eta\alpha^{-1}=(\alpha^{T})^{-1}\eta^{T}+\xi\eta^{T}-\eta\xi^{T},$$

而由(27)式知, $\xi\eta^{T}-\eta\xi^{T}=0$,因此

$$\eta\alpha^{-1}=(\alpha^{T})^{-1}\eta^{T}=(\eta\alpha^{-1})^{T},$$

所以, $\eta\alpha^{-1}$为对称矩阵.

Rotation and Its Realization on Noncommutative Space R^{2N} *

XIONG Hua-Hui[1)]　DENG Hui　SHI Guo-Fang　SHI Kang-Jie

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract　In this paper, we present the realization of unitary transformation that is corresponding to symplectic transformation of coordinate on noncommunicative R^{2N}, and give out the transformation of wave function caused by the unitary transformation, i, e., it is the matrix unit of unitary transformation.

Key words　noncommunicative space, symplectic transformation, unitary transformation

Received 4 February 2004

* Supported by NSFC(10175050)

1) E-mail: jimharry@eyou.con