

TeV γ 暴搜寻中最优窗口角半径的探讨^{*}

陈欣^{1,2;1)} 周勋秀^{1,3} 胡红波¹ 刘琨^{1,2} 杨群羽^{1,2} 木钧²

1(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

2(云南大学物理系 昆明 650091)

3(西南交通大学 成都 610031)

摘要 作为搜寻 TeV γ 暴最主要的观测手段——广延大气簇射阵列,其阵列角分辨值常用于确定搜寻窗口的大小.为了在一个合理大小的窗口内对 TeV γ 暴进行搜寻,本文从理论上推导出一个统计意义上的最优窗口角半径,然后用 Monte Carlo 方法进行了模拟验证.结合入射信号强度、背景强度、计算显著性的不同方法等因素,进一步对窗口角半径进行了讨论.并在小统计情况下,给出了计算显著性的经验公式.

关键词 γ 射线暴 窗口角半径 Monte Carlo 方法 显著性 角分辨

1 引言

γ 射线暴(Gamma Ray Bursts)是来自宇宙空间某一方向的 γ 射线在短时间内突然增强的现象.发现确认至今,已有 30 多年的历史^[1].自卫星上天后,已观测到大量 γ 暴,绝大部分都在 MeV 能区以下. EGRET^[2] 已观测到 7 个 γ 射线暴,其光子能量在 100MeV—18GeV 之间^[3],并有模型预言了 TeV 能区 γ 射线暴的存在^[4].采用高灵敏度、大面积、并具有较高角分辨的地面探测器,探测 TeV 能区的 γ 射线暴应该是可行的.由于 γ 暴的到达时间和到达方向都不确定,实验上只有采用广泛搜寻的方法.固定窗口法和组团法是地面广延大气簇射阵列观测高能 γ 射线暴常用的两种方法.前者是在一定观测天区,按一定大小的窗口角半径检查窗口范围内是否出现了统计上有显著意义的计数增长;后者是检查每一个大气簇射事例在一个时间段内是否在邻近方向出现了一个“事例团”,并估计其统计显著性.固定窗口法同组团法相比,要少许多计算和判断,费时较少,很适合作大数据量的全天区搜寻.固定窗口法中窗口角半径的选取是一个重要的因素,它选取的是否恰

当很关键.当一 γ 射线暴光子团到来时,会因探测器角分辨误差,使得它们的实测方向出现差别.如果窗口角半径取得过小,某些信号事例的实测方向超出了向源窗口的范围时,就会丢失信号数据,影响 γ 射线暴的探测效率;如果窗口半径取得太大,虽然可以避免丢失信号数据,但反会因为背景事例的大大增加,降低了信噪比.故找到一个恰当的窗口角半径,有极其重要的意义.

2 角度响应取正态分布的情况

由于地面探测器的工作性能、地磁场效应和探测器对不同能量的入射事例的分辨能力不同等因素的影响,使得入射事例的实测方向与入射方向有一定差别.在讨论优化的窗口角半径时,对来自同一方向的 γ 暴的光子团,在相对较长时间段内,可近似地将实测的角分布取为一个在与入射方向垂直,入射点为中心的圆内的正态分布.

2.1 理论分析

基于上述分析,作如下假设:对从某一方向入射

2003-12-30 收稿,2004-03-31 收修改稿

^{*} 国家自然科学基金(10120130794),中国科技部,中国科学院,高能物理研究所粒子天体物理重点实验室资助

1) E-mail: chenxin@mail.ihep.ac.cn

的 γ 射线暴,在垂直于入射方向的平面内, $\Delta\theta_x, \Delta\theta_y$ 是入射 γ 光子重建方向在二维方向上的分量,它们在此二维方向上服从正态分布, $\Delta\theta_x \sim n(\Delta\theta_x; 0, \sigma_1^2)$, $\Delta\theta_y \sim n(\Delta\theta_y; 0, \sigma_2^2)$, 且 $\Delta\theta_x, \Delta\theta_y$ 不相关, 则 $(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y)$ 的联合概率密度函数为

$$p(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y) = p_x(\Delta\theta_x)p_y(\Delta\theta_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \times e^{-\frac{(\Delta\theta_x)^2}{2\sigma_1^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(\Delta\theta_y)^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (1)$$

通常在实际情况下,阵列的角分辨与其方位角无关,可记为 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 入射 γ 光子重建方向与入射方向间的角距离表示为: $\Delta\theta = \sqrt{(\Delta\theta_x)^2 + (\Delta\theta_y)^2}$. 由此可知入射 γ 光子的角分布函数.

$$N(\Delta\theta) \propto \iint p_x(\Delta\theta_x)p_y(\Delta\theta_y)d\theta_x d\theta_y = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\Delta\theta} e^{-\frac{(\Delta\theta')^2}{2\sigma^2}} \times 2\pi \times \Delta\theta' d(\Delta\theta'). \quad (2)$$

将(2)式进一步转化,得

$$N(\Delta\theta) \propto \int_0^{\frac{(\Delta\theta)^2}{2\sigma^2}} e^{-t} dt = 1 - e^{-\frac{(\Delta\theta)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3)$$

由(3)式知,入射到向源窗口 $\Delta\theta$ 内的 γ 暴光子数 $N_s = c_1(1 - e^{-\frac{(\Delta\theta)^2}{2\sigma^2}})$, c_1 是与一定能区、观测时间、阵列有效接受面积相关的常量. 对各向同性的背景事例,假定其积分流强为: $I_B(>E) = C_B E^{-\alpha_B}$, 则在观测时间为 T , 有效接受面积为 A_{eff} , 一定大小的立体角 ($\Delta\Omega$) 范围内的事例数为 $I_B A_{\text{eff}} T \Delta\Omega$, 立体角与向源窗口大小相关. 背景事例数则为 $N_B = I_B A_{\text{eff}} T \pi \Delta\theta^2$, 分析一定天区内信号所具有的显著性,如果信号、背景数目足够大时,可采用如下关系式来表示信号的显著性,

$$s_1 = \frac{N_{\text{on}} - \alpha N_{\text{off}}}{\sqrt{(1 + \alpha)\alpha N_{\text{off}}}}, \quad (4)$$

(4)式中 N_{on} 表示在此向源窗口内的事例数, αN_{off} 表示此背景区内的背景事例数. $\alpha N_{\text{off}} = c_2 \frac{\Delta\theta^2}{\sigma^2}$. c_2 是与上述量相关的常量. α 为向源区观测时间 T_{on} 与背景区观测时间 T_{off} 的比值. 令 $R^2 = \frac{\Delta\theta^2}{\sigma^2}$, 则(4)式为

$$s_1 = \frac{N_s}{\sqrt{(1 + \alpha)\alpha N_{\text{off}}}} = \frac{c_1(1 - e^{-\frac{R^2}{2}})}{\sqrt{(1 + \alpha)c_2 R}}. \quad (5)$$

根据(5)式的显著性分布,不难求得当 R 取 1.5852 时 s_1 达到最大值. R 的取值与 α 值、信号强

度及背景的绝对值无关. 结合目前羊八井 AS γ 阵列的探测器角分辨(约为 0.9°)来分析. 若将角分辨 ($\Delta\theta_0$) 定义为中值角度差,即 50% 的事例其实测方向落在与实际到达方向所张一定角度的圆锥的半张角. 据(3)式和角分辨的定义可推出角分辨同标准误差的关系: $\Delta\theta_0 = 1.177\sigma$. 可从理论上推算出最佳窗口角半径是 $(1.5852/1.177)\Delta\theta_0$, 即 1.215° .

2.2 Monte Carlo 模拟验证

考虑羊八井 AS γ 阵列的探测器分辨率,以某一入射 γ 暴方向的位置为中心,利用 Monte Carlo(MC)方法来模拟产生不同数目的入射信号和背景信号,在该位置上形成不同情况下的 γ 暴. 进一步统计在不同的窗口角半径下其各自的显著性分布,并根据平均显著性来判断最优窗口角半径. 平均显著性最大的窗口角半径最佳. 因为这表明:对不同情况下发生的 γ 暴,以此大小的角半径窗口去搜寻 γ 暴有普遍较高的显著性,能够捕捉到较大数目的 γ 暴光子且不为背景数所掩盖,有利于找到 γ 暴. 具体做法如下:(1)角半径范围. 考察的窗口角半径范围从 0.5° 到 2.0° , 以 0.05° 为一间隔.(2)接收比例. 对一定数量的入射事例,会因为窗口角半径的不同接收到不同的事例数目. 接收比例与角半径的大小有关.(3)入射信号、背景值选取. 窗口内的入射信号和背景事例满足泊松分布,利用相关抽样函数选取信号和背景事例. 选择 10 个同向源窗口等大小的圆形区域作为背源窗口,统计背源窗口中的信号数.(4)平均显著性分布. 用上述方法产生 3×10^4 个 MC 实验,对一定的向源区与背景区,参考 AS γ 实验中 100s γ 暴的背景值及确定一个 γ 暴所需要的较好显著性(比如 6σ 的显著性),每个实验产生出不同的入射信号(平均入射信号为 50 个)和背景值(半径为 2.0° 大小的窗口的平均背景值为 84 个),两项之和就得到向源区内的实际 γ 光子数. 也即 N_{on} 的值. 结合背景值 αN_{off} , 代入到(4)式求出该向源区的显著性值. 依此计算出在不同情况下的 γ 暴的显著性,图 1 给出了在角半径窗口为 0.9° 时的显著性分布,同时求出不同角半径窗口的显著性分布. 并根据不同角半径窗口的平均显著性进行判断比较. 图 2 为不同角半径窗口的平均显著性分布,实线为根据(5)式得出的拟合线. $\Delta\theta = 1.20^\circ$ 的角半径窗口的平均显著性最大. MC 实验模拟的结果同理论分析结果吻合的很好.

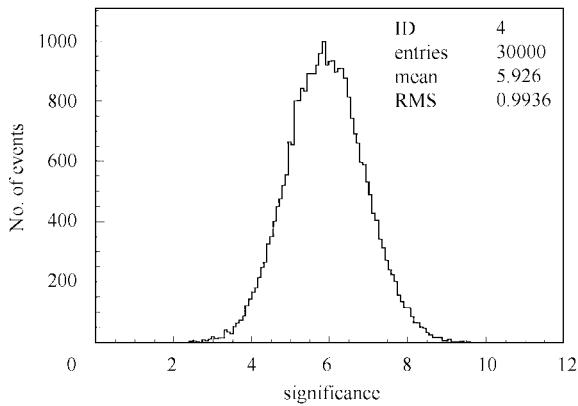


图 1 角半径为 0.9° 时的显著性分布

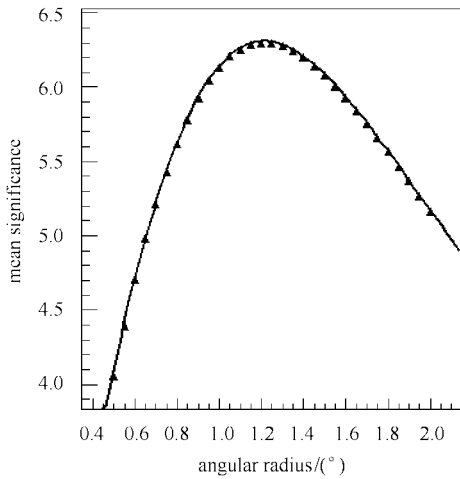


图 2 不同角半径的平均显著性分布

3 角度响应取非正态分布的情况

以上是以实测角分布为简单的单个二维正态分布为对象进行的分析和模拟.事实上,大气簇射时阵列对单向 γ 光子簇射的实测角分布通常是两个或三个的二维正态分布,它的分布与阵列的角分辨有关.由于实测事例在阴影附近的分布形状对阵列的角分辨敏感,根据月亮阴影的观测可以证实阵列的角分辨精度.通过对羊八井阵列所作的 Monte Carlo 模拟和对月亮阴影的观测得知:实测角分布一般需 3 个二维正态分布来进行拟合.其概率密度函数分布为

$$p(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y) = \alpha p_1(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y) + \beta p_2(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y) + \gamma p_3(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y). \quad (6)$$

其中 $p_i(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y)$ 为单个二维正态分布的概率密度函数.

$$p_i(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} e^{-\frac{(\Delta\theta_x)^2 + (\Delta\theta_y)^2}{2\sigma_i^2}}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7)$$

α, β, γ 为参数,满足归一化条件: $\alpha + \beta + \gamma = 1$. 参数值与实测角分布有关.羊八井的数据表明: $\alpha = 0.358, \beta = 0.466, \gamma = 0.176, \sigma_1 = 0.38^\circ, \sigma_2 = 1.03^\circ, \sigma_3 = 2.81^\circ$, 据(5)式和(6)式,用作图法作出显著性同角半径关系(图 3 中实线部分).按相关参数,同样产生 3×10^4 个 MC 实验.模拟 3 个正态分布,抽样出入射信号(平均入射信号为 50 个)和背景值(半径为 2.0° 大小的窗口的平均背景值为 84 个)并计算显著性,统计出不同情况下,不同角半径窗口的平均显著性分布(图 3 中黑点所示).图中的理论值同 MC 实验模拟的结果基本吻合.并显示,最佳角半径窗口为 0.90° .MC 实验的统计结果表明:在特定的条件下用此大小的角半径窗口去寻找 γ 射线暴有着普遍意义上较好的显著性.在分析羊八井真实数据时,用该窗口来寻找 TeV 能区 γ 射线暴,其结果也有较好的灵敏性^[5].

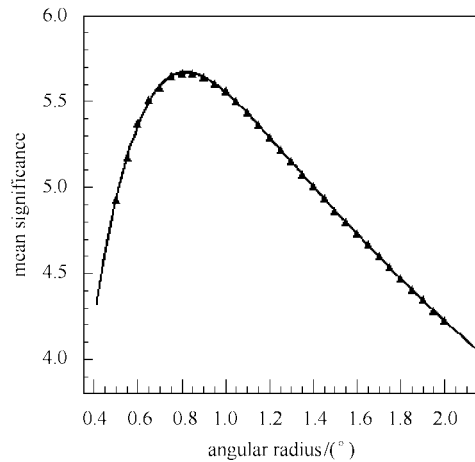


图 3 不同角半径窗口的平均显著性分布

4 讨论分析

对 3 个正态分布拟合出的实测角分布,现结合入射信号强度、背景强度做进一步分析.保持背景强度(半径为 2.0° 大小的窗口的平均背景值为 84 个)不变,在一定的范围时间和向源区域,改变入射信号数量,并比较另外两种计算显著性方法及对优化窗口大小的影响.方法 1:先根据泊松分布概率分布函数估计向源区的泊松概率,再将其归算到高斯概率求出显著性^[5].可由如下公式计算出显著性.

$$P_{\text{bkg}} = \int_{s_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (8)$$

P_{bkg} 是由背景涨落导致的几率, s_2 为显著性值.由于

γ 暴的持续时间较短,向源区和背景区内的事例数满足泊松分布.该方法严格按泊松分布概率分布函数估计向源区的泊松概率,其结果较为准确.但计算量较大,费时较多.方法 2:采用针对小统计量计算显著性的李-马公式并推广到负显著性算显著性^[6],其表达式如下:

$$s_3 = \text{sign}(N_{\text{on}} - \alpha N_{\text{off}}) \sqrt{2} \left\{ N_{\text{on}} \ln \left[\frac{1 + \alpha \left(\frac{N_{\text{on}}}{N_{\text{on}} + N_{\text{off}}} \right)}{\alpha} \right] + N_{\text{off}} \ln \left[\left(1 + \alpha \right) \left(\frac{N_{\text{off}}}{N_{\text{on}} + N_{\text{off}}} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

其中 $\text{sign}(N_{\text{on}} - \alpha N_{\text{off}})$ 为符号因子, s_3 的符号由 $(N_{\text{on}} - \alpha N_{\text{off}})$ 的符号来决定.如图 4 所示,当 $\alpha = 0.1$,入

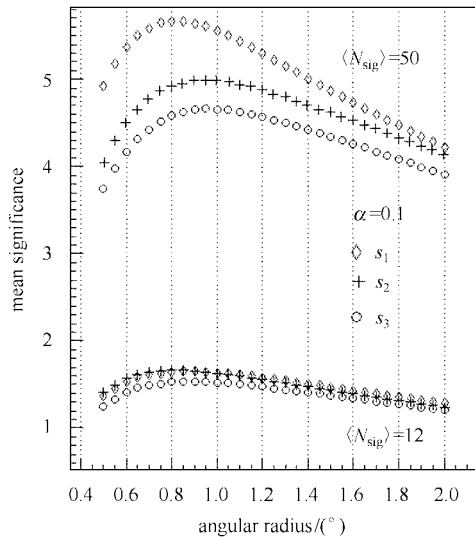


图 4 入射信号强度不同时,不同角半径的显著性分布 s_1 为由(4)式计算出的显著性分布; s_2 为泊松概率转高斯概率计算出的显著性分布; s_3 为由李-马公式计算出的显著性分布.

射信号强度较小(平均入射信号为 12 个)时,3 种方法得到的最优窗口的结果,处于 0.9° 附近,而入射信号强度较大(平均入射信号为 50 个)时,3 种方法计算出的平均显著性有差别,相对另两种求显著性方法,由(4)式得出的平均显著性普遍偏高,最佳角半径处于 0.9° 附近,另两种方法得出的最佳角半径处于 0.95° 附近,与角半径为 0.9° 窗口的平均显著性值非常接近.这也说明:无论入射信号强弱,角半径为 0.9° 的窗口都有相对较好的显著性.针对信号强度较大时,显著性出现差异的现象,作一些分析说明.由于(8)式计算出的显著性较为准确,以其值为基准并同其他两种求显著性方法比较.图 5 显示:在背景

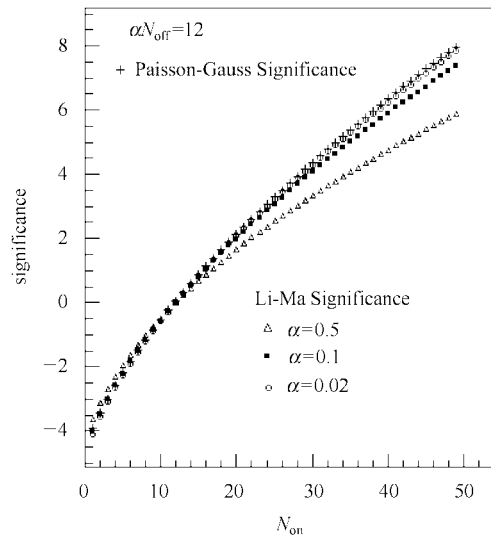


图 5 不同 α 值显著性分布

数一定的情况下, α 值不同,李-马公式计算的显著性结果相差较大, α 值越小,其显著性越接近由(8)式计算出的基准值.对于来自某一方向的 γ 射线暴,其背景值的获取采用等天顶角的方法^[7].即在向源窗口左右天顶角相等的方位角环带上选择 5 至 10 个同样大小的区域作为背源窗口,统计其中的事例数.由此可知 α 值不能足够小,通常取 $\alpha = 0.1$.在此情况下,李-马公式计算的显著性略偏小,考虑李-马公式与公式(4)的互补性,得到一经验公式: $s_4 = (3s_3 + s_1)/4$.图 6 给出了在 $\alpha = 0.1$,平均背景值不

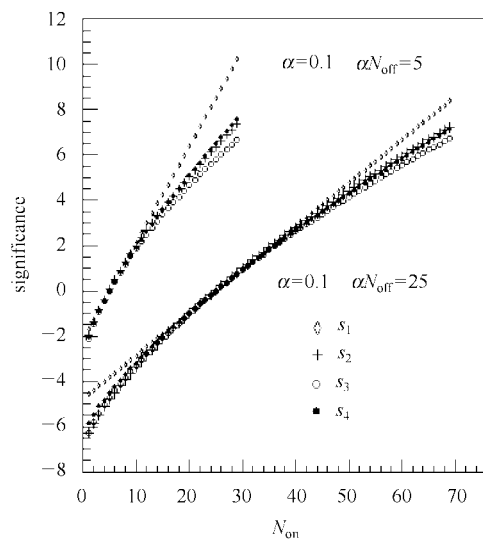


图 6 不同平均背景值,显著性分布 s_1 为由(4)式计算出的显著性分布; s_2 为泊松概率转高斯概率计算出的显著性分布; s_3 为由李-马公式计算出的显著性分布; s_4 为经验公式计算出的显著性分布.

同时 4 种方法求出的显著性分布,经验公式得到的结果更接近由(8)式计算出的基准值,且相对于(8)式求显著性的方法,它的运行步骤更简捷、快速。

5 小结

从实测信号的角分辨为单个正态分布的分析出发,根据对羊八井阵列所作的 MC 模拟和月亮阴影的观测结果,推及到用 3 个正态分布拟合的入射信号的实测角分辨.在一定时间段一定向源区域内,模拟不同情况下的 γ 射线暴,统计不同角半径窗口得到的平均显著性值,依此判断最佳角半径窗口的值约在 0.9° 附近.并结合入射信号强度、背景强度、进行了讨论,归结为几点:(1)入射信号强度发生改变,

最佳角半径窗口在 0.9° 附近小范围内稍有变化,但 s_1 方法推出的 0.9° 最佳角半径窗口很好地适用于各种信号强度.(2)入射信号的实测角分布对最佳角半径的选取有影响.单个正态分布与 3 个正态分布拟合的入射信号实测角分辨,有不同的最佳角半径结果.(3)对 3 种计算显著性的方法进行比较,在 $\alpha = 0.1$ 的情况下,结合公式(4)得到一个求显著性的经验公式,该经验公式得到的结果更接近真值并有较快的计算速度.

感谢丁林恺研究员对本工作的有益建议及讨论,感谢常年驻守在西藏羊八井观测站的工作人员辛勤工作.

参考文献 (References)

- 1 Klebesadel R W, Strong I B, Olson R A. *Astrophys. J.*, 1973, **182**: L85
- 2 Esposito J A et al. *APJS*, 1999, **123**: 203
- 3 Dingus B L, Catelli J R, Schneid E J. In: *AIP Conf. Proc.*, 1998, 428
- 4 Pilla R P, Loeb A. *APJ*, 1998, **494**: L167
- 5 ZHOU Xun-Xiu et al. Search for TeV GRBs Using the Tibet-III AS γ Data. In: *IUPAP. Proc. 28th ICRC. Tsukuba: 2003, 2757*
- 6 LI T P et al. *Astrophys. J.*, 1983, **272**: 317
- 7 DING Lin-Kai et al. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, 1997, **21**(8): 678 (in Chinese)
(丁林恺等. *高能物理与核物理*, 1997, **21**(8): 678)

Study on the Optimum Angular Radius of Windows in Searching for TeV GRBs*

CHEN Xin^{1,2;1)} ZHOU Xun-Xiu^{1,3} HU Hong-Bo¹ LIU Kun^{1,2} YANG Qun-Yu^{1,2} MU Jun²

1(Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China)

2(Department of Physics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

3(Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract TeV GRBs are so far only searched by EAS arrays which typically have an angular resolution at about 1° . With the limited power in identifying γ ray events from proton background events, a search window in the size of angular resolution is often chosen in many experiments. In attempting to optimize the average search sensitivity, an analytic method to determine the window size is proposed and verified by Monte Carlo method in various conditions, including different signal, background intensities and different significance calculation methods. Finally, at the situation of low statistics, an empirical significance calculation formula seems to be possible.

Key words gamma ray bursts (GRBs), angular radius, Monte Carlo method, significance, angular resolution

Received 30 December 2003, Revised 31 March 2004

* Supported by NSFC(10120130794), Chinese Ministry of Science and Technology, The Chinese Academy of Sciences, Key Laboratory of Astro-Particle Physics

1) E-mail: chenxin@mail.ihep.ac.cn