

Bohr-Mottelson 转动谱公式参数之间的新关系式*

李明亮 徐辅新

(安徽大学物理系 合肥 230039)

摘要 在利用 Harris 两参数公式研究 Bohr-Mottelson 转动谱公式参数之间的关系的基础上,改用 Harris 三参数公式,并由此提出了 Bohr-Mottelson 转动谱公式参数之间的新关系式,进而用 $I(I+1)$ 四参数展开式计算了 $A \sim 60, 80, 130, 140, 150, 190$ 区超形变偶偶核的基带和铜系和稀土区正常形变核基带,讨论了参数之间的关系,发现新关系式与实验较好地符合。

关键词 转动谱 超形变带 正常形变带 Mathematica 软件包

1 引言

Bohr 和 Mottelson 根据对称性考虑,证明^[1]轴对称核的转动能是 $I(I+1)$ 的函数,可以表示为幂级数展开形式. 对于偶偶核基带($K=0$)

$$E(I) = AI(I+1) + B[I(I+1)]^2 + C[I(I+1)]^3 + D[I(I+1)]^4 + \dots \quad (1)$$

Harris 建议^[2]有 ω^2 展开代替 $I(I+1)$ 展开,即

$$E = \alpha\omega^2 + \beta\omega^4 + \gamma\omega^6 + \delta\omega^8 + \dots \quad (2)$$

ω 是原子核绕转动轴(取为 x 轴)的角频率. ω 可以从转动谱提取

$$\hbar\omega = \frac{dE}{dI_x}$$

$$I_x = \left[\left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2} \approx \sqrt{I(I+1)}$$

令 $\xi = \sqrt{I(I+1)}$, 按(2)式和(3)式,

$$\hbar\xi = \frac{dE}{d\xi} = \int \frac{1}{\omega} \frac{dE}{d\omega} d\omega = \int (2\alpha + 4\beta\omega^2 + 6\gamma\omega^4 + \dots) d\omega,$$

即,

$$\sqrt{I(I+1)} \hbar = 2\alpha\omega + \frac{4}{3}\beta\omega^3 + \frac{6}{5}\gamma\omega^5 + \dots \quad (5)$$

对转动谱数据的系统分析表明, ω^2 展开的收敛

性比 $I(I+1)$ 展开的收敛性好^[3]. Bohr 和 Mottelson 指出^[4] 如果 ω^2 展开比 $I(I+1)$ 展开有更好的收敛性,我们可以研究 $I(I+1)$ 展开系数之间的关系. 他们从 Harris 两参数展开

$$E = \alpha\omega^2 + \beta\omega^4$$

得出 A, B, C, D 有下列关系^[1]:

$$\frac{AC}{4B^2} = 1, \quad \frac{A^2D}{24B^3} = 1,$$

$$\frac{AC}{4B^2} - \frac{A^2D}{24B^3} = 0.$$

Bohr 和 Mottelson 对一些变形核做了分析,证明四参数 $I(I+1)$ 展开系数 A, B, C, D 近似满足(7)式.

根据曾谨言等提出的一个封闭性的转动谱公式^[5](简称 ab 公式)^[6-8],

$$E(I) = a[\sqrt{1 + bI(I+1)} - 1],$$

徐辅新等导出了 A, B, C, D 之间的关系^[9],

$$\frac{AC}{4B^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{A^2D}{24B^3} = \frac{5}{24}, \quad (10)$$

$$\frac{AC}{AB^2} - \frac{A^2D}{24B^3} = \frac{7}{24}. \quad (11)$$

他们根据对变形核基带的高自旋能级系统分析,发现(8)式不成立,而(11)式符合得很好.

我们最近对正常形变和超形变的转动谱分析表明^[10]:从 Harris 两参数展开导出的(8)式不能符合得

2002-10-23 收稿, 2003-01-13 收修改稿

* 安徽省自然科学基金和省教委基金(9722006)资助

很好,甚至有系统性的偏离.文献[11—14]也得到类似的结论.本文将把 Harris 公式的第三项也考虑进来,即取 Harris 三参数展开,重新审视 A, B, C, D 之间的关系,考察 Harris 公式的收敛性.

2 新关系式的提出

Harris 三参数展开

$$E = \alpha\omega^2 + \beta\omega^4 + \gamma\omega^6 \quad (12)$$

$$\sqrt{I(I+1)}\hbar = 2\alpha\omega + \frac{4}{3}\beta\omega^3 + \frac{6}{5}\gamma\omega^5 \quad (13)$$

把(13)代入(1),得到(按 ω 的升幂排列)

$$\begin{aligned} E = & \frac{4A\alpha^2}{\hbar^2}\omega^2 + \left(\frac{16\alpha^4 B}{\hbar^4} + \frac{16A\alpha\beta}{3\hbar^2}\right)\omega^4 + \\ & \left(\frac{64\alpha^6 C}{\hbar^6} + \frac{128\alpha^3 B\beta}{3\hbar^4} + \frac{16A\beta^2}{9\hbar^2} + \frac{24A\alpha\gamma}{5\hbar^2}\right)\omega^6 + \\ & \left(\frac{256\alpha^8 D}{\hbar^8} + \frac{256\alpha^5\beta C}{\hbar^6} + \frac{128\alpha^2 B\beta^2}{3\hbar^4} + \right. \\ & \left. \frac{192\alpha^3 B\gamma}{5\hbar^4} + \frac{16A\beta\gamma}{5}\right)\omega^8 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

ω^2 展开的收敛性优于 $I(I+1)$ 展开,则(14)式前三项的系数分别等于(12)的系数 α, β, γ ,而且要求(14)式第4项系数等于0.这样得到4个方程.对于这样4个字母方程式,假定 α, β, γ, D 为未知量,用 Mathematica 软件包解出 α, β, γ, D 的表达式如下:

$$\alpha = \frac{\hbar^2}{4A}, \quad \beta = -\frac{3B\hbar^4}{16A^4}, \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{5(4B^2\hbar^6 - AC\hbar^6)}{64A^7},$$

$$D = \frac{12(ABC - 2B^3)}{A^2}. \quad (16)$$

(16)式即,

$$12(ABC - 2B^3)/A^2 D = 1, \quad (17)$$

这就是我们从 Harris 三参数展开提出的新关系式.

如果取 $\gamma = 0$, (15)式和(7)的前一式等价.再结合(16)式,容易得到(7)的后一式.这正好验证了演算的正确性.

而从(10)式不难得到

$$12(ABC - 2B^3)/A^2 D = 0. \quad (18)$$

3 拟合转动谱,讨论 $I(I+1)$ 展开的参数关系

用 Bohr-Mottelson 转动谱四参数公式对 $A \sim 60, 80,$

130, 140, 150, 190 几个区超形变(SD)偶偶核的基带进行最小二乘法拟合,获得参数 A, B, C, D ,然后提取 $12(ABC - 2B^3)/A^2 D$ 的值,结果如表 1.

根据表 1 数据,给出 $12(ABC - 2B^3)/A^2 D$ 对 A 的关系(后一个 A 不是展开系数,是质量数,下同),如图 1.

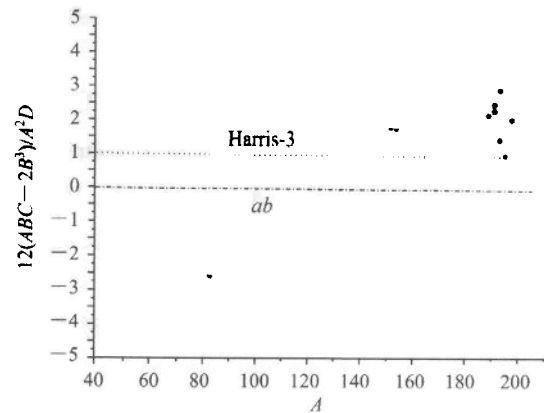


图 1 超形变核 $12(ABC - 2B^3)/A^2 D$ 对 A 的关系

文献[9]用四参数 $I(I+1)$ 展开拟合了铜系和稀土区正常形变核基带,得到参数 A, B, C, D .

从 A, B, C, D 提取 $12(ABC - 2B^3)/A^2 D$,如图 2 所示.

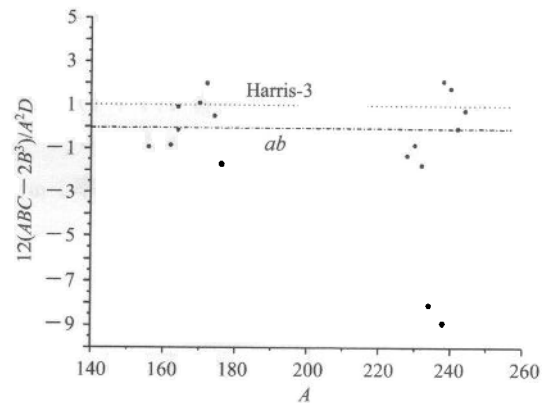


图 2 正常形变核 $12(ABC - 2B^3)/A^2 D$ 对 A 的关系

图 1,图 2 表明正常形变带和超形变带都不会系统地偏离式(17),说明三参数 Harris 公式收敛较好.对正常形变核,(18)式与(17)式的符合程度相当.对超形变核,(17)式明显地更好地接近实验.

$R (= 12(ABC - 2B^3)/A^2 D)$ 的实验值与理论值的方均根差定义为

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i^e - R^t)^2} \quad (19)$$

R_i^e 指 R 的实验提取值. R^t 是理论值,对我们提出的新关系式 $R^t = 1$,对 ab 公式 $R^t = 0$.

表 1 用 Bohr-Mottelson 公式拟合 SD 带所得的参数, 相对方均根差和 $12(ABC - 2B^3)/A^2D$ 实验提取值

Nuclei	A	$B \times 10^4$	$C \times 10^8$	$D \times 10^{12}$	$\sigma \times 10^2$	$12(ABC - 2B^3)/A^2D$
^{60}Zn	35.0174	-223.8	2550	-8231	1.5479	-2.9004
^{62}Zn	23.8342	34.39	-339.4	1927	0.1292	-3.9401
^{82}Sr	15.833	48.72	-380.2	1104	0.0524	-22.7367
^{84}Sr	19.2086	-44.45	396.4	-1119	0.1271	4.7305
^{136}Sm	9.7525	-6.035	52.23	-138.6	0.0673	2.3986
^{146}Gd	5.1046	5.345	-12.32	10.5	0.2114	-28.1338
^{148}Gd	5.5657	0.6859	1.404	-1.785	0.073	-1.0232
^{150}Gd	6.9011	-5.289	11	-7.865	0.1832	3.3853
^{152}Dy	5.9741	-0.8365	2.332	-2.015	0.0931	1.749
^{154}Dy	6.0575	-0.8871	2.366	-2.154	0.0458	1.718
^{154}Er	6.8763	-6.147	23.78	-30.32	0.3655	4.5257
^{190}Hg	6.0875	-6.04	20	-43.06	0.0205	2.2155
^{192}Hg	5.7289	-4.581	10.16	-11.62	0.0781	2.3379
^{194}Hg	5.6252	-3.829	5.816	-3.438	0.0346	1.4363
^{192}Pb	5.8264	-5.935	21.65	-46.35	0.3838	2.5205
^{194}Pb	5.7019	-4.714	13.81	-20.57	0.0365	2.9012
^{196}Pb	5.7312	-3.123	5.09	-10.78	0.116	1.0225
^{198}Pb	5.762	-3.118	9.751	-19.75	0.0646	2.0967

对表 1 中 190 区的 7 个核, R 的实验提取值对新关系式和对 ab 公式的理论预言值的方均根差分别为: 1.2298, 2.1596. 前者的方均根差小于后者, 可见, 新关系式对超形变带更符合.

从以上分析, 得出结论: 取 Harris 三参数展开,

我们提出一个 Bohr-Mottelson 转动谱公式的参数之间的新关系式. 对正常形变核, 新关系式与 ab 公式的推论的符合程度相当, 但对超形变核, 新关系式较 ab 公式符合的更好. 新关系式不逊于 ab 公式得出的结果. Harris 三参数展开收敛性可能更可靠.

参考文献 (References)

- Bohr A, Mottelson B R. Nuclear Structure, Vol. II, Nuclear Deformations New York: Benjamin, 1975
- Harris S M. Phys. Rev. Lett., 1964, **13**: 663—666; Phys. Rev., 1965, **B138**: 509
- Seathre S A et al. Nucl. Phys., 1973, **A207**: 486
- Mottelson B R. Proceedings of the Nuclear Structure Symposium of the Thousan Lakes, Joutsa, 1970 Nordisk Institut for Theoretisk Atomfysik, Nordita, Report No. 417 (unpublished)
- WU C S, ZENG J Y. Commun. in Theor. Phys., 1987, **8**: 51—74
- CHEN X Q, XING Z, WANG Y L. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1994, **18**: 256—262 (in Chinese)
(陈星棻, 邢正, 王养丽. 高能物理与核物理, 1994, **18**: 256—262)
- WU C S. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1998, **22**: 71—77 (in Chinese)
(吴崇试. 高能物理与核物理, 1998, **22**: 71—77)
- WU C S, ZHOU Z N. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**: 1209—1215 (in Chinese)
(吴崇试, 周治宁. 高能物理与核物理, 1999, **23**: 1209—1215)
- XU F X, WU C S, ZENG J Y. Phys. Rev., 1989, **C40**: 2337—2342
- XU Fu-Xin, LI Ming-Liang, WEN Yu-Yuan. Journal of Anhui University (Natural Science Edition), 2002, **26**: 35—39 (in Chinese)
(徐辅新, 李明亮, 温亚媛. 安徽大学学报 (自然科学版), 2002, **26**: 35—39)
- MENG J, WU C S, ZENG J Y. Phys. Rev., 1991, **C44**: 2545—2551
- ZHOU Xian-Rong, XU Fu-Xin. Journal of Ningxia University (Natural Science Edition), 1998, **19**: 319—320 (in Chinese)
(周先荣, 徐辅新. 宁夏大学学报 (自然科学版), 1998, **19**: 319—320)
- HU Zuo-Xian, ZENG J Y. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1998, **22**: 446—451 (in Chinese)
(胡佐贤, 曾谨言. 高能物理与核物理, 1998, **22**: 446—451)
- GUO Jian-You, XU Fu-Xin, RUAN Tu-Nan. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**: 829—838 (in Chinese)
(郭建友, 徐辅新, 阮图南. 高能物理与核物理, 2000, **24**: 829—838)

A New Relation of Parameters of Bohr-Mottelson Rotational Spectra Formula *

LI Ming-Liang XU Fu-Xin

(Department of Physics, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract With the first three terms of Harris formula included and Mottelson's method followed, a new relation of the parameters of Bohr-Mottelson rotational spectra formula is brought forward. Superdeformed bands of even-even nuclei and normal deformed bands of nuclei in actinide and rare-earth are fitted with four-parameter Bohr-Mottelson rotational spectra formula. The relations of the parameters A , B , C , D are studied. The result show, for normal deformed bands, the new relation approach the experiment value in the same degree as the relation deduced from ab formula, but for super-deformed bands, the new relation is closer to the experiment than the relation deduced from ab formula. Three-parameter Harris formula may have better convergence than two-parameter Harris formula.

Key words rotational spectra, superdeformed band, normal deformed band, mathematic software

Received 23 October 2002, Revised 13 January 2003

* Supported by Nature Science Foundation of Anhui Province and Education Committee Foundation(9722006)