

Fokker-Planck 方程与 Vlasov 方程在模耦合 理论研究中的比较

葛军^{1,1)} 国智元² 林郁正¹

1 (清华大学工程物理系 北京 100084)

2 (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 模耦合理论比较成功地解释了微波不稳定性的发生,其理论基础是 Vlasov 方程. Fokker-Planck 方程包含了束团的辐射阻尼效应和量子激发效应,是比较完备地描述粒子运动状态的束团分布方程. 比较了 Fokker-Planck 方程和 Vlasov 方程在来源、意义和解法方面的关联和不同,同时介绍了一种多项式展开束团耦合模式来求解 Fokker-Planck 方程的方法,并在静态分布中包含了势阱畸变的效应.

关键词 不稳定性 模耦合理论 Fokker-Planck 方程 多项式展开

1 引言

自从 20 世纪 70 年代初 CERN 的 Sacherer 最早提出了基于 Vlasov 方程解释纵向束流微波不稳定性的模耦合理论^[1]之后,许多相关的工作都是在这种理论框架下利用 Vlasov 方程展开,如 SLAC 的 A. Chao 提出的 Scaling law,比较成功地解释了很多环形加速器中束流在阈值以上附近的束团拉伸规律^[2],并提出了束团静态分布的水袋模型和双水袋模型. 90 年代初 KEK 的 Oide 和 Yokoya 进一步发展了模耦合理论,提出束流静态分布的势阱畸变效应对束流扰动分布的影响是不可忽略的^[3].

早期典型的微波不稳定性现象是在束流流强在超过阈值之后首先发生束长增长,当流强继续增大到一定程度后才发生束团的能散增长. 传统理论认为微波不稳定性是由于束团与纵向阻抗的相互作用引起的,而且不稳定性发生之后,束团的束长和能散都是随指数增长,直至最后大部分粒子丢失. 随着现代加速器中束流流强的进一步提高,在一些机器上发现了微波不稳定性新现象,如锯齿不稳定性(即当流强在阈值之上时束流并不一直遵循指数增

长的规律,而是重新达到一个平衡态或是表现出类简谐振荡)^[4]. 人们为了寻求对新现象的解释,逐步从 Vlasov 方程转向 Fokker-Planck 方程.

Fokker-Planck 方程包含了束团的辐射阻尼效应和量子激发效应,是比较完备地描述粒子运动状态的束团分布方程,当束团不稳定性增长率远大于辐射阻尼,如果忽略阻尼作用和量子激发的随机过程,这样 Fokker-Planck 方程就转化到 Vlasov 方程. 在近年来的研究中人们逐渐发现 Fokker-Planck 方程更能准确地描述束团的状态.

本文比较了 Fokker-Planck 方程和 Vlasov 方程在来源、物理意义和解法方面的不同和相互之间的关联,同时介绍了一种多项式展开束团耦合模式来求解 Fokker-Planck 方程的方法,并在静态分布中包含了势阱畸变的效应.

2 方程来源

Fokker-Planck 方程最初产生于对随机运动的研究. 1827 年植物学家罗伯特·布朗首先观察到了在水中悬浮的花粉微粒呈现出无规则运动. 随后,朗

2002-03-18 收稿

1) E-mail: gejun98@mails.tsinghua.edu.cn

之万(Langevin)、福克(Fokker)、普朗克(Planck)和大科学家爱因斯坦(Einstein)对布朗运动的描述进行了开创性的研究. Fokker-Planck 方程本身是从描述在液体中粒子的布朗运动的 Langevin 方程导出的,但并不需要 Langevin 方程的存在为前提.事实上, Fokker-Planck 方程有着更广泛的应用,不仅涉及到物理学自身的各个领域,同时也已经推广到天文学、化学、生物学、经济学等各个学科.在随机数学中可以由条件概率的定义得到 Fokker-Planck 方程,将条件概率的定义方程(1)用泰勒级数展开后截取到二阶项即可得一般的 Fokker-Planck 方程(2):

$$W(x, t + \tau) = \int W(x', t) \Phi(x' + \Delta x | x') dx', \quad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^i D^{(i)}(x) W. \quad (2)$$

在加速器物理中, Fokker-Planck 方程也应用于各个方面的研究,例如双高频系统的稳定性对束流的影响,束-束相互作用^[5],非线性共振等.在束流纵向稳定性的研究中, Fokker-Planck 方程和 Vlasov 方程都是描述束团分布 $\psi(z, \delta, s)$ 函数的方程,是从系统角度来考察束团在环形加速器中运动的状态,在方程中包含加速器的基本参数.耦合理论采用 Vlasov 方程作为基本方程,但是随着现代加速器的发展,粒子辐射的随机效应在束流稳定性问题中起到越来越大的影响,尤其是新的锯齿不稳定性现象的出现使得我们不得不在耦合问题中引入阻尼和扩散的作用.

2.1 Fokker-Planck 方程

通过粒子纵向运动方程可以得到束团纵向分布的 Fokker-Planck 方程.

在环形加速器中完整的粒子纵向运动方程^[6]是

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{e\hat{V}_r}{CE_0} \sin\left(\omega_r \frac{z}{c} + \phi_s\right) - \frac{U_0}{CE_0} - \\ &\quad \frac{2}{c\tau_s} \delta + \Gamma(s) - \frac{eV(z)}{CE_0}, \\ \frac{dz}{ds} &= -\eta\delta. \end{aligned} \quad (3)$$

在相位振荡小振幅的情况下,(3)式简化之后成为

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\omega_s}{c} \right)^2 z - \frac{2}{c\tau_s} \delta + \Gamma(s) - \frac{eV(z)}{CE_0}, \\ \frac{dz}{ds} &= -\eta\delta. \end{aligned} \quad (4)$$

其中滑移因子 $\eta = \frac{1}{\beta^2} \left(\alpha + \frac{1}{\gamma^2} \right)$, $\delta = \frac{\Delta E}{E_0}$; δ, z, s 分

别是粒子的相对能散、相对位移和纵向位置; c 是光速; ω_s 表示同步振荡频率; τ_s 是阻尼时间; C 是周长; $\Gamma(s)$ 表示的量子激发项,认为满足马尔可夫过程; $V(z)$ 是纵向尾场势.(4)式中包含了粒子的辐射阻尼效应、量子激发效应以及尾场的作用.

可以看出粒子纵向运动方程是典型的二维 Langevin 方程,可以利用 Langevin 方程到 Fokker-Planck 方程的转换公式 $\dot{x}_i = f(x_i, t) + \sum_{j=1}^m g_{ij} \Gamma_j(t)$, 获得粒子纵向运动的 Fokker-Planck 方程^[6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} - \eta\delta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\omega_s^2}{\eta c^2} z \frac{\partial \psi}{\partial \delta} - \frac{eV(z)}{CE_0} \frac{\partial \psi}{\partial \delta} = \\ \frac{2}{c\tau_s} \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial \delta} + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial \delta^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 ψ 是纵向运动的束团分布函数, D 被称为扩散常数,由粒子量子激发的随机性所产生,相对于束团来说是一种扩散效应.

当阻尼时间足够长,即阻尼效应非常大时,可以忽略辐射阻尼和量子激发对束流分布的影响,(5)式右边趋近于零, Fokker-Planck 方程就转化成常见的 Vlasov 方程:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} - \eta\delta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\omega_s^2}{\eta c^2} z \frac{\partial \psi}{\partial \delta} - \frac{eV(z)}{CE_0} \frac{\partial \psi}{\partial \delta} = 0. \quad (6)$$

2.2 Vlasov 方程

除了从 Fokker-Planck 方程获得 Vlasov 方程之外,主要还从哈密顿系统的相空间守恒定律(即刘维定律)中得到 Vlasov 方程.传统认为“束流-环境”是一个保守系统,不用考虑辐射阻尼和量子激发,由(4)式可得粒子纵向运动方程是

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\omega_s}{c} \right)^2 z - \frac{eV(z)}{CE_0}, \\ \frac{dz}{ds} &= -\eta\delta. \end{aligned} \quad (7)$$

设相空间的正则坐标是 $(z, p_z) = \left(z, -\frac{\eta c \delta}{\omega_s} \right)$, 系统的哈密顿量就是

$$H(z, p_z, s) = \frac{1}{2} \omega_s^2 (z^2 + p_z^2) - \frac{\eta c^2 r_0}{\omega_s \gamma C} \int_0^s V(z) dz' \quad (8)$$

分布函数满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + \{H, \psi\} = \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial \psi}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

将(8)代入(9)式同样可以得到如同(6)式的 Vlasov

方程形式.

2.3 两者比较

虽然形式上两个方程的差别仅仅在于是否考虑了束流的辐射阻尼和量子激发,但实际上代表了两种不同的研究角度. Fokker-Planck 方程从粒子随机运动的角度描述束流的分布演化过程,包含了束流的宏观变量和微观变量,是一个完备的分布方程. 而 Vlasov 方程则是从粒子微观的角度来考察宏观的束流稳定性问题,忽略了辐射和随机效应对束流的影响,认为束流与环境是一个保守系统,所以只有在一定条件下才能成立.

对于绝大多数电子环形加速器来说阻尼时间足够长,完全可以采用 Vlasov 方程对系统进行近似. 但是随着现代加速器的发展,电子的能量越来越高,阻尼时间越来越小,量子激发的随机效应逐渐影响到束流不稳定性的发生、发展,因此需要从 Fokker-Planck 方程出发来研究束流纵向微波不稳定性,尤其是在阻尼和扩散的共同作用下,探讨束流的不稳定性发展有什么新的变化.

3 方程求解

在模耦合理论中,无论 Vlasov 方程还是 Fokker-Planck 方程的求解,目的都是为了获得分立的振荡模式,求得模式频率,以及在不同的阻抗模型下振荡模式随着束流流强的变化,分析不同的模式之间的耦合关系. 因此一般采用传统的扰动法求解方程,利用完备的正交系来展开束团分布函数,最后利用数值计算来获得结果.

求解 Fokker-Planck 方程有很多种方法,但是在模耦合理论中一般采用多项式展开的方法. 下面的解法中包含了静态分布的势阱畸变效应,分布函数的角向模式用傅里叶展开,径向模式采用拉盖尔多项式正交展开,这种方式的好处是展开模式比较清楚,物理意义明确.

3.1 Fokker-Planck 方程

在相空间中引入极坐标

$$\begin{aligned} z &= r \cos \phi, \\ \frac{\eta c \delta}{\omega_s} &= r \sin \phi. \end{aligned} \quad (10)$$

通过转换坐标系,(5)式可化为

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\omega_s}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \frac{eV(z)}{CE_0} \frac{\eta c}{\omega_s} \left(\sin \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{c\tau_s} \left(\psi + r \sin^2 \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\sin 2\phi}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) + D \left(\frac{\eta c}{\omega_s} \right)^2 \times \\ & \left(\sin^2 \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\phi}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\sin 2\phi}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \phi} + \right. \\ & \left. \frac{\cos^2 \phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

静态解是 $\psi = \psi_0(r)$,代入方程(11),如果忽略尾场 $eV(z,s)$ 产生的势阱畸变,可以得到

$$\psi_0(r) = C \exp \left[- \frac{r^2}{c\tau_s D} \left(\frac{\omega_s}{\eta c} \right)^2 \right], \quad (12)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{c\tau_s D}{2} \left(\frac{\eta c}{\omega_s} \right)^2 = \left(\frac{\eta c}{\omega_s} \right)^2 \sigma_s^2, \quad (13)$$

σ_z, σ_s 分别是束团长度和能散,由(13)式中可以导出

$$D = \frac{2}{c\tau_s} \left(\frac{\omega_s}{\eta c} \right)^2 \sigma_z^2. \quad (14)$$

从(14)式可以看出扩散常数 D 和 σ_z, τ_s 以及机器参数有关,(12)式又可写成

$$\psi_0(z, \delta) = C \exp \left(- \frac{\delta^2}{2\sigma_s^2} \right) \exp \left(- \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right), \quad (15)$$

C 是归一化常数. 很明显在不考虑尾场的情况下由粒子的同步辐射阻尼和量子激发效应的共同作用下导致的束流静态分布为双高斯分布,束长和能散由加速器参数、束团阻尼和量子激发共同决定. 若考虑尾场作用,假设在 δ 方向没有影响,仍然保持高斯分布,但在 z 方向分布产生势阱畸变,因此求得

$$\begin{aligned} \psi_0(z, \delta) &= C' \exp \left(- \frac{\delta^2}{2\sigma_s^2} \right) \exp \left(- \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right) \times \\ & \exp \left(\frac{r_0}{\eta \sigma_s^2 \gamma C} \int_0^z V(z') dz' \right), \end{aligned} \quad (16)$$

其中 C' 是归一化常数,定义 σ_z, σ_s 仍然具有(13)式的关系. 上式称为 Haïssinski 方程,是一个束流分布与尾场相自洽的方程.

根据微扰理论,可以将束团分布函数 ψ 分解为静态分布 ψ_0 和扰动分布 $\psi_1 \exp \left(-i\Omega \frac{s}{c} \right)$, 即

$$\psi(r, \phi, s) = \psi_0(r) + \psi_1(r, \phi) \exp \left(-i\Omega \frac{s}{c} \right). \quad (17)$$

将(17)代入(11),保留 ψ_1 的一阶项,得到

$$\begin{aligned} & \left(-i\Omega \psi_1 + \omega_s \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} \right) - \frac{eV_1(z,s)}{T_0 E_0} e^{i\omega_s s/c} \frac{\eta c}{\omega_s} \sin \phi \frac{d\psi_0}{dr} = \\ & \frac{2}{c\tau_s} \left(\psi_1 + r \sin^2 \phi \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\sin 2\phi}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} \right) + D c \left(\frac{\eta c}{\omega_s} \right)^2 \times \\ & \left(\sin^2 \phi \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\phi}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} + \frac{\sin 2\phi}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \phi} + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\cos^2 \phi}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \phi^2} \right). \quad (18)$$

对 ψ_1 进行角向傅里叶展开, 径向用拉盖尔多项式展开, 即

$$\psi_1(r, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_l(r) e^{il\phi} \quad (19)$$

$$R_l(x) = \exp(-x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k^l f_k^l(x), \quad (20)$$

其中 $f_k^l(x) = \sqrt{\frac{k!}{(l+k)!}} r^{|l|/2} L_k^l(x)$, $L_k(x)$ 是 l -义 Laguerre 多项式, $f_k^l(x)$ 符合正交关系. 将式(14), (19), (20)代入式(18)中, 然后两边乘以 $f_m^l(x)$, 对 x 积分, 利用正交性整理得到:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda - l + i \frac{2m + |l|}{\tau_s \omega_s} \right) a_m^{(l)} = \\ & - \sum_r \sum_{k=0}^{\infty} i \frac{2\pi r_0 c}{\gamma T_0^2 \omega_s} l M_{r,k}^{l,m} a_k^{(r)} + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i}{\tau_s \omega_s} \left[\frac{1}{2} \left(k + \frac{|l-2|}{2} - \frac{l-2}{2} \right) K_{k,m}^{(|l-2|, |l|, 0)} - \right. \\ & \left. \frac{l-1}{4} (l-2 - |l-2| - 2k) K_{k,m}^{(|l-2|, |l|, -1)} \right. \\ & \left. \frac{l-1}{2} \sqrt{k(k+|l-2|)} K_{k-1,m}^{(|l-2|, |l|, -1)} \right] a_k^{(l-2)} + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i}{\tau_s \omega_s} \left[\frac{1}{2} \left(k + \frac{|l+2|}{2} + \frac{l+2}{2} \right) K_{k,m}^{(|l+2|, |l|, 0)} \right. \\ & \left. \frac{l+1}{4} (l+2 + |l+2| + 2k) K_{k,m}^{(|l+2|, |l|, -1)} \right. \\ & \left. \frac{l+1}{2} \sqrt{k(k+|l+2|)} K_{k-1,m}^{(|l+2|, |l|, -1)} \right] a_k^{(l+2)} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\lambda = \frac{\Omega}{\omega_s}$,

$$K_{k,m}^{\alpha,\beta,N} = \int_0^{\infty} \exp(-x) x^N f_k^{(\alpha)}(x) f_m^{(\beta)}(x) dx,$$

$$M_{r,k}^{l,m} = \sum_p i^{l-r} \frac{Z''_0(\omega')}{\omega'} \int_0^{\infty} \frac{d\psi_0}{dx} f_m^{(|l|)}(x) \cdot$$

$$J_l \left(\frac{\omega'}{c} \sqrt{2} \sigma_s \sqrt{x} \right) dx \int_0^{\infty} \exp(-x') f_k^{(|r|)}(x')$$

$$J_r \left(\frac{\omega'}{c} \sqrt{2} \sigma_s \sqrt{x'} \right) dx'$$

对于如此复杂的矩阵方程式, 我们只有利用数值解来求得相应的模式频率数 λ , 在计算中多项式的收敛性是一个比较关键的问题. 同时阻抗模型的选取也影响最后的结果.

3.2 Vlasov 方程

Vlasov 方程的求解和 Fokker-Planck 方程类似,

也是采用多项式展开的方法来获得模式, 但是由于少了阻尼和扩散两项, 最终的矩阵方程形式比较简单, 由(21)可得

$$(\lambda - l) a_m^{(l)} = - \sum_r \sum_{k=0}^{\infty} i \frac{2\pi r_0 c}{\gamma T_0^2 \omega_s} l M_{r,k}^{l,m} a_k^{(r)}, \quad (22)$$

同样的利用数值方法来计算最后的模式频率, 收敛性也是一个关键问题.

3.3 解法比较

从上述可知, 采用多项式展开是模耦合理论中典型的方法, 对于 Fokker-Planck 方程和 Vlasov 方程都适用, 但是在不同的方向上采用何种多项式来展开是值得探讨的问题, 不同的展开方式获得的最后矩阵方程的形式不同^[3,7], 计算的收敛性也不同, 尤其对于 Fokker-Planck 方程来说, 展开形式比较复杂, 采用什么样的方法对最后的计算会带来一定的难度. 在本文中采用了傅里叶和拉盖尔多项式展开的方式来展开 Fokker-Planck 方程.

对于静态分布两个方程的处理方式不同, Fokker-Planck 方程可以直接从方程中解得静态分布的高斯形式. 而 Vlasov 方程则需要对实际的束团静态分布建立近似的模型, 因此有的直接利用从 Fokker-Planck 方程得到的高斯分布形式, 有的是水袋模型或双水袋模型, 有的则是抛物线模型^[2], 建立简化模型的目的是在不影响物理的前提下简化最后的矩阵方程.

除了静态分布模型的获得方式不同外, 在现代模耦合理论中还存在静态分布是否包含势阱畸变的区别, 如果忽略尾场的影响, 则可以利用理想的高斯模型或者建立一个实际情况的近似模型来使得解析表达更加明确, 方便计算, 如果加入了势阱畸变的效应, 则使得计算更加复杂, 无法获得一个比较明确的表达式, 而只能通过数值来代表. 本文吸收了现代模耦合理论的做法, 将尾场对静态分布产生的势阱畸变包含在内.

同时, 不同阻抗模型的选取也是两个方程计算的难点之一, 除了理想的谐振子模型之外, 还可以选取其他的各种解析模型, 当然也可以利用实际阻抗的数值来计算.

Fokker-Planck 方程还可以利用按矩展开的方式来展开模式^[8]. 除了利用这种方法展开模式之外, 还可以利用数值方法直接求 Fokker-Planck 方程和 Vlasov 方程中的束团分布函数^[9], 直观地考察束团随时间的变化, 但这种方法不属于模耦合理论的范

畴.

利用上述公式来进行的数值计算结果及分析将另文发表.

4 讨论

模耦合理论中的 Fokker-Planck 方程和 Vlasov 方程都是把束团分布函数展开成角向和径向的模式来求得模式频率,同时来分析不稳定性增长率的变化,在这一点上两者是一致的;不同的是 Fokker-Planck 方程同时考虑了由于流强增加而引起的阻尼效应和量子激发的扩散效应对不稳定性的影响,并且在静态加入了势阱畸变的影响,从而更全面的描述了束团在加速器中的状态.

不同的展开方式对方程最后的计算结果有一定的影响,各种多项式之间以及展开的相应模式之间有什么样的关系还有待进一步的讨论和研究.当然,模耦合理论只能从系统分布的角度来揭示束团在不稳定性阈值附近的发展变化,当流强在远远超过阈值之后,束团已经进入一个混沌的状态,就已经不能完全用比较简单的方程来描述的了.然而加速器科学家对于像锯齿不稳定性这样比较有规律的现象的研究正在 Fokker-Planck 方程的基础上继续深入,力图发现其中的物理机制.

作者感谢美国 SLAC 加速器物理学家赵午教授对这项研究工作的指导以及与清华大学工程物理系加速器实验室黄文会同志的有益讨论.

参考文献 (References)

- 1 Sacherer F. IEEE Trans. Nucl. Science NS-24, 1977, (3):1393
- 2 Chao A. Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerator. New York: Wiley, 1993
- 3 Oide K, Yokoya K. Longitudinal Single-Bunch Instability in Electron Storage Rings, KEK Preprint 90-10, 1990
- 4 Podobedov B V, Siemann R H. Sawtooth Instability Studies in the Stanford Linear Collider Damping Rings, PAC97, 1997, 2:1629
- 5 Pauluhn A. Stochastic Beam Dynamics in Storage Rings, DESY 93-138, 1993
- 6 Suzuki T. Part. Accel. 1983, 14:91
- 7 CHEN Bo, Longitudinal Collective Instability of Nonlinear Hamiltonian Systems in a Circular Accelerator, Ph. D thesis, 1995, SLAC
- 8 Heifets S, Chao A. Study of Microwave Instability, SLAC-PUB-7390, 1996
- 9 Zorzano M P, Mais H. Numerical Solution for Fokker-Planck Equation in Accelerators, PAC97, 1997, 2:1825

Comparison between Fokker-Planck Equation and Vlasov Equation in the Research of the Mode Coupling Theory

GE Jun^{1,1)} GUO Zhi-Yuan² LIN Yu-Zheng¹

1 (Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

2 (Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China)

Abstract Mode coupling theory successfully explains the microwave instability, and the Vlasov equation is the basic of the theory. Fokker-Planck equation describes the distribution of the particles in bunch, which includes damping effect and the quantum excitation effect. We compare the Fokker-Planck equation with the Vlasov equation in the aspects of the origin, physics meaning, solution, and also introduce the method of polynomial expansion to solve the equation.

Key words instability, mode coupling theory, Fokker-Planck equation, polynomial expansion

Received 18 March 2002

1) E-mail: gejun98@mails.tsinghua.edu.cn