

空间电荷阻抗和纵向束团定态解*

刘勇^{1,2;1)}

1 (中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

2 (中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要 回顾了加速器的阻抗模型,讨论了空间电荷阻抗和管道壁阻的高频衰减特性.从 Vlasov-Maxwell 方程出发提出了当存在类似空间电荷阻抗时,在任意外场、任意分布下,束团定态分布的一般解法,并以两种重要分布为例,给出重离子加速器强流参数下的定态分布.解得的定态分布可以进一步应用于稳定性分析和计算机模拟计算.由定态分布的求解得出对束团中的朗道阻尼和稳定性研究非常重要的纵向“色散”函数.

关键词 重离子加速器 空间电荷 定态分布 稳定性 纵向色散函数

引言

定态性和稳定性是束团稳定性研究的两大问题,定态性是指在一定外场和阻抗下,束流不随时间变化的“定态分布”的存在性.稳定性则是在定态性满足的条件下,有微扰的定态分布如何演化的问题.本文着重研究空间电荷为主导阻抗的重离子加速器中的纵向定态性问题.

束流自治理论的核心是 Vlasov-Maxwell 方程,求解不含微扰的 Vlasov-Maxwell 方程可以得到定态分布.在加速器中,粒子运动由外电磁场及粒子和周围电磁环境(包括其他粒子)相互作用下的感应场决定.耦合阻抗的概念最早在研究 CERN 的 ISR (Intersecting Storage Rings) 的不稳定性问题时提出^[1],随后被普遍应用于束流动力学和表述及测量加速器电磁特性上.

关于空间电荷主导的重离子加速器中的纵向流体力学,目前还有一些不太清楚的问题.一是空间电荷的频率特性,一般认为空间电荷的带宽直到管道的截止频率,然而在许多束流动力学计算中,空间电荷阻抗截止在远远低于管道截止频率以下,但计算结果仍然是正确的.因此阻抗频率截止曲线,及其

对束流动力学的影响有待探究.二是有任意外场下的束团自治模型,在自治理论分析中,通常取线性外场下加抛物线分布^[2],这样空间电荷场也是线性的.而实际上,在纵向外场主要来自一个或数个高频腔,场形是正弦函数或更复杂,特别对于较长的重离子束团,外场及感应场往往不能取线性近似.因此需要在任意外场下,任意束团模型定态分布的一般解法,及相应的数值算法.得出定态解就可以进一步进行理论分析和模拟.本文的目的就在于解决这两个问题.此外,粒子同步振荡频率分布,即纵向“色散”函数反映粒子的动量分散和场的非线性,得出定态解后,可以积分得到纵向“色散”函数.

作者一部分工作是在德国 GSI 完成的,在计算中以即将建成的兰州重离子储存环 CSR^[3]和 GSI 的重离子同步加速器 SIS 这两台相似类型的机器作为例子.由于 SIS 正在运行,而且有强流运行的经验,因此凡涉及强流束流参数的问题均用 SIS 的参数.

2 加速器纵向电磁感应模型及空间电荷和壁阻性质的讨论

为讨论方便我们先给出有关定义和概念.考虑

2003-01-23 收稿

* 德国教育及研究部 WTZ 项目资助

1) E-mail: y.liu@impcas.ac.cn

环形加速器周长为 L , 束流粒子中心速度 $v_0 = \beta_0 c$, 回旋周期及角频率为 T_0 和 ω_0 . 为方便讨论感应场及其势函数, 相空间坐标取作 (z, \dot{z}) , 即一般粒子相对参考粒子的纵向位置及变化率. 束流分布函数定义为 $\Psi(z, \dot{z})$, 则束流线密度为 $\lambda(z) = \int \Psi(z, \dot{z}) d\dot{z}$, 束流的电流强度为 $I(z, t) = NQe \int \dot{z} \Psi(z, \dot{z}; t) d\dot{z} \approx NQev_0 \lambda(z, t)$, 其中 Q, N 分别为粒子电荷数和粒子数, e 是基本电荷. 在实验室坐标系, 以放置在 z_0 , 与参考粒子距离为 $v_0 t$ 的 pick-up 电极为基准, 束流电流为 $I(z_0 - v_0 t) \approx NQev_0 \lambda(z_0 - v_0 t)$.

在频域, 束流与自身及周围环境的作用可表述为耦合阻抗 $Z(\omega)$, 感应场 $V(\omega) = Z(\omega) I(\omega)$. 变换到时域,

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z(n\omega_0) I(n\omega_0) \exp\left(in \frac{\omega_0}{v_0} z\right), \quad (1)$$

场函数定义为 $E(z) = V(z)/L$. 定义整个环上的势函数为 $U(z) = \frac{1}{L} \int_L V(z) dz$.

计算阻抗的方法分两类^[4]. 一类是“电工技术”方法, 即等效回路方法; 另一类是“电动力学”方法, 即解束流加边界条件的麦克斯韦方程. 阻抗的测量也有两种途径, 一是逐个测量加速器部件的高频特性, 用于未安装的加速器部件; 二是利用束流为探针, 观测束流的相干模式. 加速器主要阻抗来源是: 空间电荷, 壁阻, 腔体及类似腔体的共振结构. 其表达式及推导参见文献[5], 一般取均匀连续束和圆柱管道的简化近似.

各类阻抗中, 来自腔体及类似结构的阻抗由于其共振特性, 高频截止效应不明显. 而空间电荷阻抗和壁阻则为宽带的, 直到截止频率. 高频截止谐波数由加速器周长和管道截面尺寸估算出. 如即将建成的兰州重离子储存环 CSR^[3], 主环周长约 161m, 管道直径中间值为 0.15m, 截止谐波数可估计为 1000. 空间电荷阻抗和壁阻的频率特性可由 Alkhatteed 公式^[6] 算出, 结果如图 1 所示, 电磁波频率 (横轴) 用谐波数 n 即回旋频率的倍数表示. 假设为连续束在圆柱管道内. 取 CSR 主环的机器参数: 周长 $L = 161.00\text{m}$, 束流截面半径 $r_b = 0.04\text{m}$, 管道截面半径 $r_w = 0.075\text{m}$, 管壁厚 $\delta_w = 0.5\text{mm}$.

在图 1(a)中, 空间电荷的带宽一直到上千谐波数. 在文献[6]中所用例子是周长仅为 20m 的小环, 管道半径为 0.3m, 因此其截止频率为 60 左右. 然而这并不能

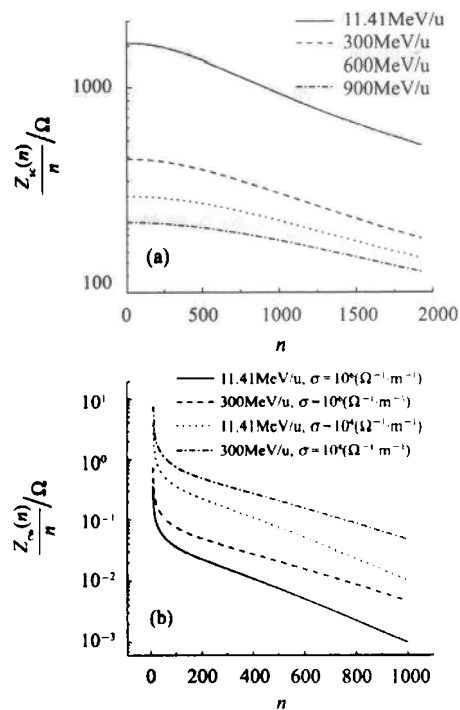


图 1 空间电荷阻抗 Z_{sc} 和壁阻抗 Z_w 频率特性的分析解

佐证在一般情况下稳定性分析和模拟中实际可以选取的谐波数(“束流动力学截止谐波数”)远低于“高频截止谐波数”的通常作法. 实际选取的谐波数往往受限于数值运算. 举例来说, 束团不稳定性分析需要解含退化核的积分方程, 所考虑到的最高谐波数正比于方程组的阶数, 阶数过高则会由于数值精度限制而不可解; 再加计算机模拟中所考虑的谐波数过高则导致人为的高阶噪声不稳定性. 实际操作中可能会出现“高频截止谐波数”成百上千, 计算中只能考虑到几十次谐波, 而计算结果符合实际的费解现象.

“束流动力学截止”的物理意义在于: 波长远远短于束团长度的电磁波与束流相互作用趋于零(这里的束团应有正常的、光滑均匀的分布, 有破损的束团应取其等效长度), 因为波长比束团长度短得多的谐波在束团内部积分为零, 因而总体效应为零. 当然取“束流动力学截止”必须包含所研究的频谱范围; “束流动力学截止”还应该取数值计算所能达到的上限, 以减小误差.

设高频腔谐波数即束团个数为 h , 相对束长(即束长与纵向聚焦单元的比值)为 B_L , “束流动力学截止谐波数”参考下限应为 h/B_L . 比如德国 GSI 的重离子同步加速器 SIS, 高频腔谐波数 $h = 4$, 相对束长 $B_L > 0.2$, “束流动力学截止谐波数”应不小于 20. CSR 主环运行在一次谐波, 实验环运行在一次或二次谐

波,“束流动力学截止谐波数”下限相应更低.在计算中首先必须明确“束流动力学截止谐波数”和“高频截止谐波数”,两者分别是计算中应取的谐波数下限和上限.另外值得注意的是,在高端,空间电荷效应仍是不可忽略的,如 900MeV/u 下, $Z_{sc}(p)/p \approx 100\Omega$.

在图 1(b)中,对于一般金属管道的电导率($\sigma_w \approx 10^6(\Omega^{-1}m^{-1})$),壁阻小到可以忽略.但是实际加速器由成百上千个不同材料的元件焊接或连接而成,接触状态很复杂.这样管道的等效电导率应该较低.

空间电荷场的势函数满足^[7]

$$\frac{\partial U_{sc}}{\partial z} = \frac{g}{4\pi\epsilon_0} \left(NQe \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} \right) \approx \frac{g}{4\pi\epsilon_0} \frac{NQe}{\gamma_0^2} \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

其中用到 $\frac{\partial I}{\partial t} \approx v_0^2 NQe \frac{\partial \lambda}{\partial z}$,几何因子 g 被用来表述管道及束团形状影响阻抗的平均效应.

文献[7]的作者推导了一类轴对称、线密度为抛物线分布的束团模型的几何因子,其在 (r, z) 平面分布为 $\rho(r, z) = \rho_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_b}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_m}\right)^2}$,具有抛物线形线密度 $\lambda(z) = 2 \int_0^{r_b \sqrt{1 - (z/z_m)^2}} \rho(r, z) dr$

$\pi\rho_0 r_b^2 (1 - (z/z_m)^2)$. r_b 为束团截面半径. z_m 是束团的半长.

在重离子环中通常是长束团,即束团长度远大于其截面尺寸, $z_m/r_b \rightarrow \infty$,在此条件下束团中有 $g \rightarrow 0.67 + 2\ln(r_s/r_b)$. r_s 为管道截面半径.例如德国 GSI 的重离子同步加速器 SIS 周长 $L = 216.72m$,运行在高频谐波数 $h = 4$,典型的 $z_m = 5.4 - 10.8m$,即相对束长 $B_t = 2z_m/(L/h) = 0.2 - 0.4$, $r_s = 0.05m$, $r_b = 0.02m$.几何参数 $z_m/r_b \approx 200$.在此情况下连续束的结果可应用于束团.作为对照,文献[5]中基于均匀连续束的经典公式中,轴上几何因子 $g^{***} = 1 + 2\ln(r_s/r_b)$,束流表面几何因子 $g^{***} = 2\ln(r_s/r_b)$.取粗略的平均, $g = 0.5 + 2\ln(r_s/r_b)$.

3 束团自洽模型和定态分布的一般解法

忽略粒子碰撞条件下, Vlasov 方程^[5]是分析束流演化的数学工具.设 (q, p) 相空间中束流分布函数为 $\Psi(q, p; t)$, Vlasov 方程为

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + q \frac{\partial \Psi}{\partial q} + p \frac{\partial \Psi}{\partial p} = 0,$$

即束流在相空间中表现为不可压缩的流体.

顿量来表示则为

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + [\Psi, H] = 0, \quad (4)$$

其中泊松括号 $[\Psi, H] = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial \Psi}{\partial p}$. 由

(4)式可推知定态分布,即不依赖于时间的分布应形如 $\Psi(H(q, p))$. 单个粒子总能量的哈密顿量为

$$\tilde{H} = \frac{P^2}{2m^*} + QeU \quad (5)$$

这里 $m^* \equiv \Delta p/\Delta v = m_0\gamma/\eta$ 是粒子纵向等效质量,其中 m_0 是静止质量, η 为滑相因子; $U = U_{ex} + U_{ind}$ 是电势,来自外场和感应场; $P = \Delta p$ 是该粒子相对参考粒子的动量偏移.

定态分布 $\Psi(\tilde{H})$ 的求解,须给定分布形式即 $\Psi(\tilde{H})$ 与 \tilde{H} 的依赖关系,并需(5)式及外场和感应场表达式.

归一化的电荷线密度

$$\lambda(z) = \int A\Psi(H(z, P))dP = \lambda'(U_{ind}), \quad (6)$$

其中 A 为归一化常数,归一化条件为

$$\iint A\Psi(\tilde{H}(z, P))dzdP = \int \lambda(z)dz \quad (7)$$

由(2)式可以得到空间电荷的势函数

$$U_{sc} = \frac{g}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qe}{\gamma_0^2} \lambda + C, \quad (8)$$

式中常数 C 一般取作使得 $\tilde{H} \geq 0$, 或者由阻抗来表示:

$$U_{sc} = \frac{1}{2\pi} \frac{Z_{sc}(n\omega_0)}{n} Qev_0 \lambda + C, \quad (9)$$

空间电荷或类似空间电荷的阻抗有局域作用的特性,即由(8)式,势函数只依赖于本地电荷密度,而与其他位置的电荷密度无关.

现在有三个方程:(8)式或(9)式,(6)式以及归一化条件(7),及“三个”未知数:归一化系数 A , 线密度 $\lambda(z)$ 和感应场势函数 $U_{ind}(z)$. 由于归一化条件(7)是积分式,要求知道整个区域的线密度和感应场势函数,因此必须用数值方法来求解.

数值计算分三步,第一步由(8)式或(9)式以及(6)式,由任意假设的归一化常数 A ,解得在任意一点的依赖于 A 的线密度 $\lambda^A(z)$ 及感应场势函数 $U_{ind}^A(z)$. 第二步由不同的 A 计算(7)式中的积分,看是否满足归一化条件,以此求得 A ,同时得到定态分布函数 $\Psi(H(z, P))$. 第三步由求得的 A 代回(8)式及(6)式求得各点的线密度、感应场.

得到定态解之后,不同能量的同步振荡频率由粒子同步运动轨道上的积分求得. 由微分式 $dt = \frac{dt}{dz} dz = \frac{dz}{P}$, 粒子同步运动的周期

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s(\tilde{H})} = \oint_{\tilde{H}} dz \sqrt{\frac{m}{2(\tilde{H} - U(z))}}, \quad (10)$$

能量 \tilde{H} 对应的振幅 ζ 定义为 $U(\zeta) = \tilde{H}$. 由式(10)可以得到不同振幅(即不同动量)粒子的同步振荡频率 $\omega_s(\zeta)$. 由于 $\omega_s(\zeta)$ 反映不同动量的粒子的同步振荡特性,因此被称为纵向的“色散”函数. 与不稳定性密切相关的朗道阻尼效应来自感应场与粒子共振作用,因此“色散”函数 $\omega_s(\zeta)$ 的分布(相当于粒子的频谱)与稳定性的关系重大.

4 两个束团自洽模型的定态分布求解

为了进一步说明上面所述的一般解法,下面给出两个在理论分析中非常重要的例子,热分布(麦克斯韦-玻耳兹曼分布,MB)和局域幂函数分布. 定义均方根动能 $kT = \frac{P_{rms}^2}{m}$, 其中 T 是温度, k 是玻耳兹曼常数. 麦克斯韦-玻耳兹曼分布形式为

$$\Psi(\tilde{H}) = A \exp\left(-\frac{\tilde{H}}{kT}\right), \quad (11)$$

其线密度为

$$\lambda = A \int \Psi(\tilde{H}) dp = A \sqrt{2\pi m^* kT} \left(\exp\left(-\frac{Qe(U_{ind} + U_{ex})}{kT}\right) + C \right).$$

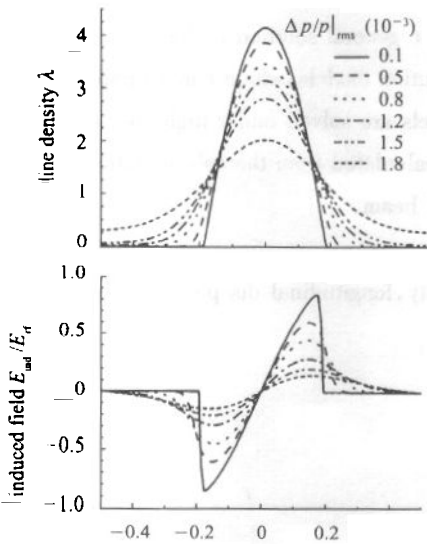


图 2

图 2 绘制了 SIS(周长 $L = 216.72\text{m}$) 中环内粒子数 2×10^{11} 的 U_{238}^{28+} 束, $\Delta p/p|_{rms} = 0.1 - 1.8 \times 10^{-3}$, 在注入能量 $E_{inj} = 11.4\text{MeV/u}$, 空间电荷阻抗 $Z_{sc}(p)/p = -3\text{k}\Omega$, 高频为正弦波形, 在电压 $V_{rf} = 16\text{kV}$, 高频谐波数 $h = 4$ 下解得热分布的线密度和场.

对于局域幂函数分布, 定义最大动能 $kT_m = \frac{P^2}{2m^*}$, 及模型指数 μ , 其发布为

$$\Psi(\tilde{H}) = A(kT_m - \tilde{H})^\mu \quad (12)$$

线密度为

$$\lambda = A \int \Psi(\tilde{H}) dp = A \sqrt{2m^*} B\left(-\frac{1}{2}, \mu + 1\right) \times (kT_m - Qe(U_{ind} + U_{ex}))^{\mu + \frac{1}{2}},$$

其中 $B(x, y)$ 是 beta 函数.

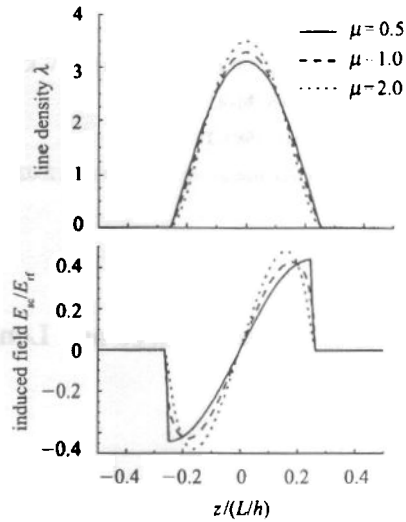


图 3 SIS 参数下, 给定模型指数 $\mu = 0.5, 1.0, 2.0$, 解出的局域幂函数分布的线密度和感应场

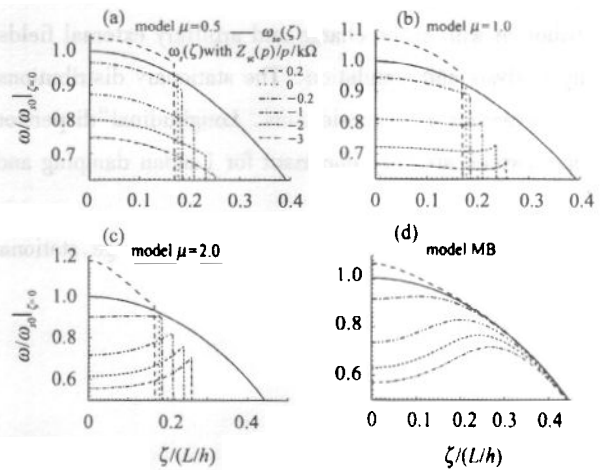


图 4 不同模型的纵向色散函数 (a) 幂函数分布, 模型指数 $\mu = 0.5$; (b) 幂函数分布, 模型指数 $\mu = 1.0$; (c) 幂函数分布, 模型指数 $\mu = 2.0$; (d) 麦克斯韦-玻耳兹曼分布.

图 3 绘制了 SIS 中的 $2 \times 10^{11} U_{238}^{28+}$ 束, $\Delta p/p = \pm 2 \times 10^{-3}$, 在注入能量 $E_{inj} = 11.4 \text{ MeV/u}$, 空间电荷阻抗 $Z_{sc}(p)/p = -3 \text{ k}\Omega$, 高频为正弦波, $V_{rf} = 16 \text{ kV}$, 谐波数 $h = 4$ 下解得幂函数分布的线密度和场.

仍以 SIS 中的 $2 \times 10^{11} U_{238}^{28+}$ 束为例, 高频电压 $V_{rf} = 10 \text{ kV}$, 谐波数 $h = 4$, 解得各种模型不同振幅下的粒子同步振荡频率 ω_s , 即纵向“色散”函数, 绘于图 4. ω_{s0} 为零流强下同步振荡频率, 各量以束团中心点的零流强同步振荡频率 $\omega_{s0}|_{z=0}$ 为单位. 其中对于幂函数分布有 $\Delta p/p = \pm 2 \times 10^{-3}$, 对于麦克斯韦-玻耳兹曼分布 $\Delta p/p|_{rms} = 0.892 \times 10^{-3}$, 这个值是幂

函数模型 $\mu = 0.5$ 的均方根动量.

5 小结和讨论

定态解是在不考虑其他因素如绝热性及实际技术问题的条件下给定外场和阻抗的理想束缚解, 是进一步用微扰方法研究束团稳定性的基础. 文中给出了有空间电荷阻抗情况下定态分布的一般解法和例子, 并给出如何由定态解得到束团的纵向色散函数. 纵向色散函数直接与束团中的朗道阻尼效应有关, 是影响束团稳定性的重要函数.

参考文献 (References)

- 1 Vaccaro V G. CERN ISR-RF 65 - 35, 1966; Neil V K, Sessler A M. Rev. Sci. Instrum., 1965, 36: 429
- 2 Neuffer D. Part. Accel., 1980, 11: 23
- 3 XLA J W et al. Nuclear Instruments and Methods, 2002, A488: 522-527
- 4 CHAO A W, Tigner M. Handbook of Accelerator Physics and Engineering, Singapore: World Scientific, 1998, 194
- 5 Wiedemann H. Particle Accelerator Physics II, New York: Springer Verlag, 1995
- 6 Al-Khateeb A M et al. Phys. Rev., 2001, E63: 026503
- 7 Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams, New York: Wiley, 1994

Space Charge and Longitudinal Stationarity in Bunched Beams*

LIU Yong^{1,2,1)}

1 (Institute of Modern Physics, CAS, Lanzhou 730000, China)

2 (Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract Impedance modelling in an accelerator is reviewed in this paper, cutoff effects is discussed both from electro-dynamics and beam dynamics points of view. From Vlasov-Maxwell equation, the general solution is derived for stationary distribution with space charge and arbitrary external fields and arbitrary distribution models, which can be applied in stability analysis and simulation. The stationary distributions of two example models are solved under high current parameters of heavy-ion ring-accelerators. Longitudinal “dispersion” functions are also calculated from the solved stationary distributions, which are very important for Landau damping and stability in bunched beam.

Key words heavy-ion accelerator, space charge, stationary distribution, stability, longitudinal dispersion function

Received 23 January 2003

* Supported by WTZ project of the German Federal Ministry of Education and Research

1) E-mail: y.liu@impcas.ac.cn