有限维希尔伯特空间 q 广义相干态振幅平方压缩

卢道明
(南平师范高等专科学校 福建南平 353000)

摘要 构造了有限维希尔伯特空间 q 变形非简谐振子广义相干态，研究了它的振幅平方压缩效应．结果表明，该量子态存在振幅平方压缩效应，并且给出了压缩条件与参数 s,r,q 之间的关系．

关键词 有限维希尔伯特空间 q 变形 广义相干态 振幅平方压缩

1 引言

随着量子通讯和量子计算等领域研究的快速发展，有限维希尔伯特空间谐振子研究倍受关注，人们已对有限维希尔伯特空间的谐振子代数、相干态的构造做出了大量的研究[1—4]．近年来人们把对谐振子研究的思想推广到非简谐振子，构造了非简谐振子广义相干态，并对其量子特性进行了研究[5—8]，研究表明非简谐振子广义相干态及其 q 变形都可以出现压缩和反聚束效应[7,9]．自从 Buzek 等人[3]首次提出有限维希尔伯特空间相干态以来，朱久运等人将普通奇偶相干态[10,11]进行推广，提出了有限维希尔伯特空间偶奇相干态并研究了其压缩特性[12]．本文把 q 变形的对应研究推广到有限维希尔伯特空间．讨论有限维希尔伯特空间 q 变形非简谐振子广义相干态的振幅平方压缩，并且给出了压缩条件．

2 有限维希尔伯特空间 q 变形非简谐振子的广义相干态

2.1 q 变形非简谐振子广义相干态

按照文献[12]，非简谐振子哈密顿算符的无量纲形式为

$$H=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2+\frac{A}{2x^2},A>0, \tag{1}$$

与之对应的自然坐标算符和自然动量算符为

$$Q=x^2-H,\ P=\frac{1}{2i}\left(x\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx}x\right), \tag{2}$$

它们满足对易关系．

$$[H,Q]=-2ip,\ [H,P]=2iQ,\ [Q,P]=2iH. \tag{3}$$

引入相对应的湮没和产生算符

$$a=\frac{1}{2}(Q+ip),\quad a^+=\frac{1}{2}(Q-ip), \tag{4}$$

它们满足对易关系

$$[H,a]=-2a,\ [H,a^+]=2a^+,\ [a,a^+]=H. \tag{5}$$

按照文献[8]引入 q 变形的湮没和产生算符

$$a_q=a\varphi(N),\qquad a_q^+=\varphi(N)a^+$$
$$\varphi(N)=\sqrt{\frac{[N][N+2k-1]}{N(N+2k-1)}}, \tag{6}$$

式中 $N=\frac{1}{2}H-k$ 为粒子数算符，

$$k=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2A+\frac{1}{4}}\right),$$

$$[x]=\frac{q^x-1}{q-1},\ q\in[0,1].$$

q 变形算符之间的对易关系式为

$$[a_q,a_q^+]_q=a_qa_q^+-qa_q^+a_q=[2N+2k],$$
$$[N,a_q^+]=+a_q^+,\quad [N,a_q]=-a_q, \tag{7}$$

它们对 Fock 态 $|n\rangle$ 的作用为

$$N|n\rangle=n|n\rangle,$$
$$a_q|n\rangle=\sqrt{[n][n+2k-1]}|n-1\rangle, \tag{8}$$
$$a_q^+|n\rangle=\sqrt{[n+1][n+2k]}|n+1\rangle,$$

q 变形非简谐振子广义相干态为

2003-04-14 收稿

$$|\beta\rangle_q = \{F_q(|\beta|)\}^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}}|n\rangle. \quad (9)$$

其中, $F_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{[n]![2k]_n}$,

$$[n]! = [n]\cdot[n-1]\cdots[2][1],$$
$$[x]_n = [x]\cdot[x+1]\cdots[x+n-1],$$
$$\beta = r\exp(\mathrm{i}\varphi).$$

2.2 有限维希尔伯特空间 q 变形非简谐振子的广义相干态

按文献[12,13]的方法,考虑由 $|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |2S\rangle$ 展开的 $(2S+1)$ 维希尔伯特空间,其中 S 为任意正整数. 在这空间中, q 变形非简谐振子的湮没、产生算符分别为

$$a_q = \sum_{n=1}^{2S}\sqrt{[n][n+2k-1]}\ |n-1\rangle\langle n|,$$
$$a_q^+ = \sum_{n=0}^{2S-1}\sqrt{[n+1][n+2k]}\ |n+1\rangle\langle n|. \quad (10)$$

满足对易关系

$$[a_q, a_q^+]_q = \sum_{n=0}^{2S}[2n+2k]|n\rangle\langle n| - [2S+1][2S+2k]|2S\rangle\langle 2S|, \quad (11)$$

它们对广义 Fock 态的作用为

$$a_q|n\rangle = \sqrt{[n][n+2k-1]}|n-1\rangle, \quad a_q|0\rangle = 0,$$
$$a_q^+|n\rangle = \sqrt{[n+1][n+2k]}|n-1\rangle, \quad a_q^+|2S\rangle = 0, \quad (12)$$

定义有限维希尔伯特空间 q 形变非简谐振子的广义相干态:

$$|\beta, S\rangle_q = \{F_q(r,2s)\}^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{2s}\frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}}|n\rangle, \quad (13)$$

其中, $F_q(r,m) = \sum_{n=0}^{m}\frac{r^{2n}}{[n]![2k]_n}$.

3 振幅平方压缩

类似于通常单模光场振幅平方压缩的定义,引入 q 光场的 q 振幅平方压缩概念,定义 q 光场的两个正交振幅平方分量为

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_q^2 + a_q^{+2}), \quad x_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(a_q^2 - a_q^{+2}), \quad (14)$$

以下为方便起见省略所有符号下标 q,即计作 $a_q = a, a_q^+ = a^+, F_q(r,m) = F(r,m), |\beta, S\rangle_q = |\beta, S\rangle$,它们满足对易关系和测不准关系

$$[x_1, x_2] = \frac{\mathrm{i}}{2}(a^2 a^{+2} - a^{+2}a^2),$$
$$\langle(\Delta x_1)^2\rangle\langle(\Delta x_2)^2 \geqslant \frac{1}{4}|\langle[x_1, x_2]\rangle|^2,$$

定义

$$\Delta x_1 = \langle(\Delta x_1)^2\rangle - \frac{1}{2}|\langle[x_1, x_2]\rangle| = \frac{1}{4}[\langle a^4 + a^{+4}\rangle + 2\langle a^{+2}a^2\rangle - \langle a^2 + a^{+2}\rangle^2],$$
$$\Delta x_2 = \langle(\Delta x_2)^2\rangle - \frac{1}{2}|\langle[x_1, x_2]\rangle| = \frac{1}{4}[-\langle a^4 + a^{+4}\rangle + 2\langle a^{+2}a^2\rangle + \langle a^2 - a^{+2}\rangle^2], \quad (16)$$

若 $\Delta x_1 < 0$ 或 $\Delta x_2 < 0$ 则称 x_1 分量或 x_2 分量出现平方压缩效应. 根据(12)和(13)式可求出:

$$\langle a^2 + a^{+2}\rangle = 2r^2[F(r,2s)]^{-1}F(r,2s-2)\cos2\varphi,$$
$$\langle a^4 + a^{+4}\rangle = 2r^4[F(r,2s)]^{-1}F(r,2s-4)\cos4\varphi,$$
$$\langle a^2 - a^{+2}\rangle = 2\mathrm{i}r^2[F(r,2s)]^{-1}F(r,2s-2)\sin2\varphi,$$
$$\langle a^{+2}a^2\rangle = r^4[F(r,2s)]^{-1}F(r,2s-2),$$

将(17)式代入(16)式可得

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}r^4[F(r,2s)]^{-2}\{[F(r,2s-4)\cos4\varphi + F(r,2s-2)]F(r,2s) - 2[F(r,2s-2)]^2\cos^2 2\varphi\},$$
$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}r^4[F(r,2s)]^{-2}\{F(r,2s)\times[-F(r,2s-4)\cos4\varphi + F(r,2s-2)] - 2[F(r,2s-2)]^2\sin^2 2\varphi\}. \quad (18)$$

由(18)式可知,当 $\varphi \to \varphi + \frac{\pi}{4}$ 时, $\Delta x_1 \to \Delta x_2$,即 $\Delta x_2 = \Delta x_1|_{\varphi=\varphi+\frac{\pi}{4}}$,因此只要讨论 Δx_1 的压缩情况即可,下面具体讨论两个特例.

1) $S=2,\ k=1\left(A=\frac{3}{8}\right)$时

$$\Delta x_1 = \frac{r^4}{2}[F(r,2s)]^{-2}\{[F(r,2)F(r,4) - F^2(r,2)] + [F(r,4) \quad F^2(r,2)]\cos4\varphi\}$$

上式已利用 $F(r,0)=1$,若要使 $\Delta x_1 < 0$,则要求

$$[F^2(r,2) - F(r,4)]\cos4\varphi > F(r,2)F(r,4) - F^2(r,2) \quad (20)$$

利用 $[2k]_0 = 1, [0]! = 1, [n] = \frac{q^n - 1}{q-1}$,可知 $[F^2(r,2) - F(r,4)] > 0$,所以选择适当的参数使

$$\frac{F(r,2)F(r,4) - F^2(r,2)}{F^2(r,2) - F(r,4)} < 1,$$

x_1 分量出现振幅平方压缩的条件为

$$\cos 4\varphi > \frac{F(r,2)F(r,4)-F^2(r,2)}{F^2(r,2)-F(r,4)} = \frac{Ar^4+Br^6+Cr^8+Dr^{10}}{E+Fr^2+Gr^4+Hr^6}, \tag{21}$$

式中 $A=(1+q)^{-3}(1+q^2)^{-1}(1+q+q^2)^{-2}$,

$$B=\frac{1+(1+q^2)(1+q+q^2+q^3+q^4)}{(1+q)^4(1+q^2)^2(1+q+q^2)^2(1+q+q^2+q^3+q^4)},$$

$$C=\frac{1+q+q^2+(1+q^2)(1+q+q^2+q^3+q^4)}{(1+q)^5(1+q+q^2)^3(1+q^2)^2(1+q+q^2+q^3+q^4)},$$

$$D=\frac{1}{(1+q)^6(1+q+q^2)^3(1+q^2)^2(1+q+q^2+q^3+q^4)},$$

$$E=(1+q)^{-1}$$

$$F=\frac{2+q+q^2}{(1+q)^2(1+q+q^2)},$$

$$G=\frac{2(1+q+q^2)(1+q^2)-1}{(1+q)^3(1+q+q^2)^2(1+q^2)},$$

$$H=\frac{(1+q^2)^2(1+q+q^2+q^3+q^4)-1}{(1+q)^4(1+q^2)^2(1+q+q^2)^2(1+q+q^2+q^3+q^4)}. \tag{22}$$

2) 当 $s\to\infty$ 时,通过计算可得, $\Delta x_1=0$, $\Delta x_2=0$, 这时态 $|\beta,s\rangle_q$ 趋向最小测不准态.

4 结论

本文把 q 变形非简谐振子广义相干态推广到了有限维希尔伯特空间中,研究了它的振幅平方压缩效应,结果表明当参数相位 φ 满足一定条件时该量子态出现振幅平方压缩. 压缩特性与 s, q 和 r 参数有关,通常的 q 变形非简谐振子广义相干态为该态 $s\to\infty$ 时的特例.

参考文献(References)

1 Roy B, Roy P.J. Phy., 1998, **A31**:(4)1307—1317

2 Pegg D T, Barnett S M. Phys. Rev., 1989, **A39**(4):1665—1675

3 Buzek V, Wilson-Gordon A D, Knight P L et al. Phys. Rev., 1992, **A45**(11):8079—8094

4 KUANG L M, WANG F B, ZHOU Y G. Phys. Lett., 1993, **A183**(1):8079(1—8)

5 XU Zi-Wen. Acta Physica Sinica., 1996, **45**(11):1807 (in Chinese)
(徐子驳. 物理学报, 1996, **45**(11):1807)

6 NI Zhi-Xiang. Acta Physica Sinica., 1997, **46**(9):1688(in Chinese)
(倪致祥. 物理学报, 1997, **46**(9):1688)

7 YU Zhao-Xian, WANG Ji-Suo, LIU Ye-Hou. Acta Physica Sinica., 1997, **46**(9):1693(in Chinese)
(于肇贤, 王继锁, 刘业厚. 物理学报, 1997, **46**(9):1693)

8 XU Zi-Wen. HEP & NP., 1999, **23**(5):436(in Chinese)
(徐子驳. 高能物理与核物理, 1999, **23**(5):436)

9 WANG Zhong-Qing. Acta Physica Sinica., 2001, **50**(4):690—692 (in Chinese)
(汪仲清. 物理学报, 2001, **50**(4):690—692)

10 Hillery M. Phys Rev., 1987, **A36**(8):3796—3802

11 XIA Y J, GUO G C. Phys Lett., 1989, **A136**(6):281—283

12 ZHU Jiu-Yun, KUANG Le-Man. Phys Lett., 1994, **A193**(3):227

13 ZHU Cong-Xu. Acta Optica Sinica., 1999, **19**(4):441(in Chinese)
(朱从旭. 光学学报, 1999, **19**(4):441)

Amplitude-Squared Squeezing of Generalized q-Deformation Coherent States of a Non-harmonic Oscillator in a Finite-Dimensional Hilbert Space

LU Dao-Ming

(Department of Physics, Nanping Teachers College, Fujian Nanping 353000, China)

Abstract Generalized q-deformation coherent states of a non-harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert Space are constructed. Their amplitude-squared squeezing are discussed. The result shows that there are squeezing effects in these quantum states. The relationship between condition of squeezing and parameters S, r, q is found.

Key words finite-dimensional Hilbert space, q-deformation, generalized coherent states, amplitude-squared squeezing

Received 14 April 2003