Noether 定理与黑洞的质量公式及黑洞熵*

黄超光[1;1)] 郭汉英[2;2)] 吴小宁[3;3)]

1 (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

2 (中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

3 (Max-Plank-Insitut für Gravitationsphysik, 14476 Golm, Germany)

摘要 运用并发展了协变相空间的 Noether 荷方法,对于真空广义相对论稳态轴对称黑洞得到:黑洞质量公式是关于 Killing 向量场和完整 Cauchy 面上的零 Noether 荷以及黑洞力学第一定律. 对于一大类向量场,利用零标架方法证明在视界附近的约化代数的中心项为零. 这表明,Carlip 用纯粹对称性分析的方法来解释黑洞熵的微观起源值得商榷.

关键词 Noether 定理 黑洞质量公式 黑洞熵 Virasoro 代数 微分同胚不变性 Killing 对称性

1 引言

Noether 定理给出了对称性与守恒律之间的关系,它在物理学中起着重要的作用. 在广义相对论中,引力场($\mathscr{M}^{1,3}, g$)的作用量具有微分同胚不变性,记作 Diff ($\mathscr{M}^{1,3}$)不变性;稳态轴对称时空具有相应的保持度规不变的 Killing 对称性,记作 $\mathscr{KS}$. 什么守恒律相应于这些对称性呢?

我们知道,在 Minkowski 时空中,Diff($\mathscr{M}^{1,3}$)不变性导致物质场的能量动量张量协变守恒律. 而对广义相对论中具有黑洞的真空稳态轴对称时空($\mathscr{M}^{1,3}, g$),黑洞质量公式(本文取 $c = \hbar = G = 1$)

$$M - \frac{\kappa}{4\pi}A - 2\Omega_{\rm H}J = 0$$

和黑洞力学第一定律

$$\delta M - \frac{\kappa}{8\pi}\delta A - \Omega_{\rm H}\delta J = 0$$

成立. 它们和 Killing 对称性 $\mathscr{KS}(\mathscr{M}^{1,3}, g) \subset$ Diff ($\mathscr{M}^{1,3}$)之间是否有内在联系呢? 能否用 Noether 定理的处理导出这些公式? 显然,这些都值得研究.

Wald 在 90 年代初期提出:"黑洞熵是 Noether 荷"[1]. 如果这是正确的话,与黑洞熵密切联系的黑洞质量和角动量,以及黑洞质量公式是不是也应该有类似的解释呢? 90 年代中期以来,关于黑洞熵的微观起源取得了不小进展. 其中,从 90 年代末以来,Carlip 发表了一系列文章[2]. 特别是,他借助协变相空间方法(例如文献[1]),把事件视界作为从 i^0 出发的 Cauchy 面的边界,得到:(1) 对一类向量场,视界附近的微分同胚代数 $\mathrm{diff}_{\rm H}(\mathscr{M})$具有非零中心荷. (2) 黑洞熵出现在视界附近的 Virasoro 代数 $\mathscr{V}_{\rm H}^{c} \subset \mathrm{diff}(\mathscr{M})$的中心项中. 借用共形场论的 Cardy 公式[3],于是就给出黑洞熵的微观起源. Carlip 将这种对于黑洞熵微观起源的处理,称为"没有量子引力的量子引力". 但是,这些工作存在一些不清楚之处,例如,在协变相空间方法中引用 Poisson 括号来实现 $\mathrm{diff}_{\rm H}^{c}(\mathscr{M})$和 $\mathscr{V}_{\rm H}^{c}$, Carlip 所用的 Cauchy 面并不是完整的 Cauchy 面,等等. 这些都需要仔细考察.

我们运用并发展了协变相空间处理中的 Noether 荷方法. 从拉氏量的水平变分导出 Killing 对称性 $\mathscr{KS}$和微分同胚对称性 Diff($\mathscr{M}^{1,3}$)的 Noether 荷实现,即得到相应的守恒方程、守恒荷,以及代数关

2003-03-19 收稿

* 国家自然科学基金(90103004,10175070),国家重点基础研究发展规划项目(G1998030601)及德国 Alexander von Humboldt 基金会资助

1) E-mail: huangcg@mail.ihep.ac.cn

2) E-mail: hyguo@itp.ac.cn

3) E-mail: wuxn@aei.mpg.de

系 $\mathrm{diff}_{\mathrm{H}}(\mathscr{M})$等;并从拉氏量的水平—垂直变分导出守恒荷变化量之间的关系.为了仔细估算代数的中心项是否非零,采用了在视界附近可以明确定义的零标架方法.

为了简单起见,集中讨论了广义相对论中的真空稳态轴对称黑洞.得到以下结果[4,5]:

(1) 考虑具有稳态轴对称性 $\mathscr{KS}(\mathscr{M}^{1,3},g)\simeq R^1\times SO(2)\subset \mathrm{Diff}(\mathscr{M}^{1,3})$的时空中的类时 Killing 向量场 t_{K}^a 和类空 Killing 向量场 ϕ_{K}^a 以及它们的组合

$$\xi_{\mathrm{K}}^a = t_{\mathrm{K}}^a + \Omega_{\mathrm{H}}\phi_{\mathrm{K}}^a. \tag{1}$$

黑洞质量公式是完整的 Cauchy 面 Σ 上对应于 Killing 向量场(1)的零 Noether 荷.如果引进分别具有紧致无限远和紧致内部的有条件的 Cauchy 面 Σ_{H} 和 Σ_∞,则黑洞熵正比于 Σ_{H} 上的 Noether 荷 $Q_{\mathrm{H}}(\xi_{\mathrm{K}}^a)$的负值;而黑洞质量和角动量则分别是 Σ_∞上对应于类时和类空 Killing 向量场的 Noether 荷 $Q_\infty(t_{\mathrm{K}}^a)$和 $Q_\infty(\phi_{\mathrm{K}}^a)$.(2)从拉氏量的水平—垂直变分导出守恒荷变化量之间的关系出发,可以导出黑洞质量公式的微分形式,即黑洞力学第一定律.(3) 即使在 Carlip 的部分 Cauchy 面上,对一类比 Carlip 所用的向量场更为一般的向量场,利用零标架方法证明,视界附近代数 $\mathrm{diff}_{\mathrm{H}}(\mathscr{M})$的中心项为零,进而 Virasoro 代数的中心项也就为零.因此,Carlip 对黑洞熵微观起源的"没有量子引力的量子引力"解释值得商榷.

2 diff($\mathscr{M}$)代数和 Killing 对称性的 Noether 荷实现

2.1 diff($\mathscr{M}$)和 $\mathscr{KS}$通过 Lie 导数的实现

考虑 n 维微分流形 $\mathscr{M}^{1,n-1}$.向量场 $\xi\in T(\mathscr{M}^{1,n-1})$生成一单参数微分同胚群 $\{f(\xi)_\lambda \mid \forall\lambda\in[-1,1]\}\subset \mathrm{Diff}(\mathscr{M}^{1,n-1})$,且 $f(\xi)_{\lambda=0}=I$ 是恒等映射.由度规构成的几何量 $\mathbf{F}$ 沿该向量场的 Lie 导数为

$$\mathscr{L}_\xi \mathbf{F}(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{F}(f(\xi)_\lambda^* g)\big|_{\lambda=0}. \tag{2}$$

另一方面,量 $\mathbf{F}$ 关于 f 沿 ξ 方向的水平变分由其对于 ξ 的 Lie 导数给出

$$\hat{\delta}_\xi \mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{F}(f(\xi)_\lambda^* g)\big|_{\lambda=0} = \mathscr{L}_\xi \mathbf{F}(g).$$

对于一对向量场(ξ_2,ξ_1),由于 $\hat{\delta}_\xi=\mathscr{L}_\xi$,由 Lie 导数的性质$[\mathscr{L}_{\xi_2},\mathscr{L}_{\xi_1}]=\mathscr{L}_{[\xi_2,\xi_1]}$就可得到

$$[\hat{\delta}_{\xi_2},\hat{\delta}_{\xi_1}]\mathbf{F} = \hat{\delta}_{[\xi_2,\xi_1]}\mathbf{F}. \tag{3}$$

进而,对于 Lie 导数的 Jacobi 恒等式导致对于水平变分的恒等式

$$([\hat{\delta}_{\xi_1},[\hat{\delta}_{\xi_2},\hat{\delta}_{\xi_3}]] + [\hat{\delta}_{\xi_2},[\hat{\delta}_{\xi_3},\hat{\delta}_{\xi_1}]] + [\hat{\delta}_{\xi_3},[\hat{\delta}_{\xi_1},\hat{\delta}_{\xi_2}]])\mathbf{F} = 0. \tag{4}$$

该式给出代数 $\mathrm{diff}(\mathscr{M}^{1,n-1})$的封闭性.

于是,利用 Lie 导数或水平变分实现了几何量 $\mathbf{F}$ 对于映射 f 通过向量场 ξ_i,$(i=1,2,3)$诱导的微分同胚对称性.如果 ξ_{K} 是 Killing 向量场,则实现了 Killing 对称性.

2.2 diff($\mathscr{M}$) 和 $\mathscr{KS}$的 Noether 荷实现

考虑在时空流形$(\mathscr{M}^{1,n-1},g)$(度规的号差为 $\mathrm{sign}(g)=2-n$)上,具有 n 维微分同胚不变性的度规引力理论.令 $\mathbf{L}$ 为其拉氏量 n 形式,亦即 $\mathbf{L}$ 满足

$$f^*(\mathbf{L}(g_{ab})) = \mathbf{L}(f^*(g_{ab})). \tag{5}$$

不难证明下式成立(参见文献[1]):

$$\hat{\delta}_\xi \mathbf{L} = \mathbf{E}\hat{\delta}_\xi g + \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}(g,\hat{\delta}_\xi g), \tag{6}$$

其中 $\mathbf{E}=0$ 给出引力场方程,$\boldsymbol{\Theta}$ 为辛势.此外,$\hat{\delta}_\xi\mathbf{L}=\mathscr{L}_\xi\mathbf{L}=\mathrm{d}(\xi\cdot\mathbf{L})$.这两个方程导致守恒方程:

$$\mathrm{d}*\mathbf{j}(\xi) + \mathbf{E}\hat{\delta}_\xi g = 0,\quad \forall\xi\in T(\mathscr{M}^{1,n-1}), \tag{7}$$

其中 $\mathbf{j}(\xi)$是对于单参数微分同胚群的 Noether 流 1 形式.其对偶为

$$*\mathbf{j}(\xi) := \boldsymbol{\Theta}(g,\hat{\delta}_\xi g) - \xi\cdot\mathbf{L},\quad \mathrm{mod}(\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}). \tag{8}$$

如果 ξ_{K} 是 Killing 向量场,则

$$*\mathbf{j}(\xi_{\mathrm{K}}) := \boldsymbol{\Theta}(g,\hat{\delta}_{\xi_{\mathrm{K}}} g),\quad \mathrm{mod}(\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}). \tag{9}$$

对于一对向量场(ξ_2,ξ_1),则有守恒方程

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}*\mathscr{J}(\xi_2,\xi_1) = \delta_{\xi_2}(\mathbf{E}\delta_{\xi_1}g) - \delta_{\xi_1}(\mathbf{E}\delta_{\xi_2}g) - \mathbf{E}\delta_{[\xi_2,\xi_1]}g,\\
&\mathscr{J}(\xi_2,\xi_1) := *\delta_{\xi_2}*\mathbf{j}(\xi_1) - *\delta_{\xi_1}*\mathbf{j}(\xi_2) - \mathbf{j}([\xi_2,\xi_1])\\
&\qquad \mathrm{mod}(*\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_{(\xi_2,\xi_1)}),
\end{aligned} \tag{10}$$

$\mathscr{J}(\xi_2,\xi_1)$是一个 1 形式,对于(ξ_2,ξ_1)是反对称的.

在流形的一完整 Cauchy 面 $\Sigma^{n-1}(\subset\mathscr{M}^{1,n-1})$上,关于 ξ 的 Noether 荷为

$$Q(\xi) := \int_{\Sigma^{n-1}} *\mathbf{j}(\xi), \tag{11}$$

对于向量场对(ξ_2,ξ_1),则有

$$K(\xi_2,\xi_1) := \int_{\Sigma^{n-1}} *\mathscr{J}(\xi_2,\xi_1). \tag{12}$$

进而,水平变分的 Jacobi 恒等式(4)将导致可能存在

的"中心项"应满足的 2 上闭链条件.

为了导出微分质量公式,需要这些 Noether 流及其变更之间的关系. 这可以从 $\mathbf{L}$ 的垂直和水平双变分得到. 其实,不难证明

$$0 = \delta(\mathbf{E}\hat{\delta}_\xi g) + \mathrm{d}\delta * \mathbf{j}(\xi). \tag{13}$$

综上所述,证明了如下定理:

(1) 关于生成单参数微分同胚群 $f(\xi)_\lambda \subset \mathrm{Diff}(\mathscr{M}^{1,n-1})$ 的向量场 ξ 的 Noether 流 $\mathbf{j}(\xi)$ 守恒

$$\mathrm{d} * \mathbf{j}(\xi) = 0,\ * \mathbf{j}(\xi) := \boldsymbol{\Theta}(\hat{\delta}_\xi g) - \xi \cdot \mathbf{L},$$
$$\mathrm{mod}(\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \xi \in T(\mathscr{M}^{1,n-1})$$

的充要条件是 $\mathbf{E}\hat{\delta}_\xi g = 0$ 成立.

(2) 微分同胚代数的 Noether 荷实现为

$$\hat{\delta}_{\xi_2} Q(\xi_1) - \hat{\delta}_{\xi_1} Q(\xi_2) = Q([\xi_2, \xi_1]) + K(\xi_2, \xi_1), \tag{14}$$

这里,可能的"中心项"满足

$$K([\xi_1, \xi_2], \xi_3) + K([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + K([\xi_3, \xi_1], \xi_2) = 0. \tag{15}$$

(3) 对偶 Noether 流的改变量守恒,即 $\mathrm{d}\delta * \mathbf{j}(\xi) = 0$ 的充要条件是 $\delta(\mathbf{E}\hat{\delta}_\xi g) = 0$.

3　黑洞质量公式、熵作为 Noether 荷[4,5]

对于真空广义相对论,直接利用上节的公式可得 $f(\xi)_\lambda \subset \mathrm{Diff}(\mathscr{M}^{1,3})$ 不变性诱导的 Noether 流

$$\mathbf{j}(\xi)_a = \frac{1}{8\pi} G_{ab}\xi^b + \frac{1}{16\pi}[\nabla^b\nabla_a\xi_b \quad \nabla^b\nabla_b\xi_a], \tag{16}$$

满足协变守恒方程:

$$0 = \frac{1}{16\pi} G_{ab}\hat{\delta}_\xi g^{ab} \quad \nabla^a \mathbf{j}(\xi)_a.$$

对于真空稳态轴对称黑洞和(1)式所给 Killing 向量场 ξ_K,相应的守恒流为 $\mathbf{j}(\xi_K)$:

$$\mathbf{j}(\xi_K)_a = \frac{1}{4\pi} R_{ab}\xi^b_K - \frac{1}{16\pi} R g_{ab}\xi^b_K, \tag{18}$$

其中已用到公式

$$R_{cb}\xi^b_K = \nabla^b\nabla_{[c}\xi^K_{b]} \tag{19}$$

一个重要事实是:对于真空稳态轴对称黑洞 ($R = 0$),该 Noether 流及其在完整 Cauchy 面 Σ 上的 Noether 荷为零

$$Q(\xi_K) := \int_\Sigma * \mathbf{j}(\xi_K) = 0. \tag{20}$$

尽管如此,这个为零的 Noether 荷却仍必然导致黑洞质量公式. 这是因为,根据定义必然得到

$$0 \equiv Q = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left(\nabla^b\nabla_{[a}\xi_{b]} \quad - \frac{1}{4} R g_{ab}\xi^b\right)\mathrm{d}\sigma^a$$

其中第一项为全散度,要约化到 Σ 的边界 $\partial\Sigma = S_\infty \cup S_H^{(-)}$ 上. 这里 $S_\infty \cong i^0$ 为类空无限远,$S_H^{(-)}$ 为视界分支面,但取 Cauchy 面诱导的反定向. 于是该零 Noether 荷就由在 $S_H^{(-)}$ 和 S_∞ 的 $\mathcal{Q}_H$ 和 $\mathcal{Q}_\infty$ 两项构成:

$$Q := Q_\infty + Q_H = \mathcal{Q}_\infty - \mathcal{Q}_H = -\frac{1}{8\pi}\int_{S_\infty} * \mathrm{d}\xi_K$$

根据定义,引力场的 Komar 质量和角动量为

$$M := -\frac{1}{8\pi}\int_{S_\infty} * \mathrm{d}t_K,\ J := \frac{1}{16\pi}\int_{S_\infty} * \mathrm{d}\phi_K. \tag{22}$$

而对于 Killing 向量场 ξ_K, Komar 质量 M 就是黑洞引力场的 ADM 质量. 于是,得到

$$Q_\infty = \mathcal{Q}_\infty := -\frac{1}{8\pi}\int_{S_\infty} * \mathrm{d}\xi_K = M - 2\Omega_H J.$$

另一方面,对于 Killing 向量场 ξ_K,在 S_H 上有 $\nabla^a\xi^b_K = \kappa\epsilon^{ab}$. 这里 κ 为表面引力,ϵ^{ab} 为双法向量. 于是

$$Q_H = -\mathcal{Q}_H := \frac{1}{4\pi}\int_{S_H} * \mathrm{d}\xi_K = -\frac{\kappa}{4\pi}A,$$

A 是事件视界分支面 S_H 的面积. 这里应该指出, Wald 把 $A/4$ 称为 Noether 荷[1]是不妥当的. 其实,它不是 Noether 荷. 即使对于特殊的有条件的无限远紧致的 Cauchy 面 Σ_H,即 $\partial\Sigma_H = S_H^{(-)}$, $\partial\Sigma_H|_\infty = \varnothing$,其上的 Noether 荷也不是 $A/4$,而是(24).

综上所述,我们证明了:零 Noether 荷 $Q(\xi_K)$ 作为一个整体,就是黑洞质量公式:

$$Q = 0 \Leftrightarrow M - \frac{\kappa}{4\pi}A - 2\Omega_H J = 0. \tag{25}$$

4　黑洞力学第一定律[4,5]

利用第 2.2 节的定理(3),可导出真空广义相对论黑洞力学第一定律. 此时,变分关系为

$$0 = \frac{1}{16\pi}\delta(G_{ab}\hat{\delta}_{\xi_K} g^{ab}) + \delta[\nabla^a \mathbf{j}_a(\xi_K)],$$

注意,对于 Killing 向量场 ξ^a_K,如果 Einstein 方程成立,守恒流 $\mathbf{j}(\xi_K)$ 为零. 进而,如果限制度规的变分或扰动 δg,使得 g 和 $g + \delta g$ 均为具有(1)式所给的 Killing 向量场 ξ^a_K 的稳态轴对称黑洞,则 Noether 流(18)及其变更均为零. 即 $\delta\mathbf{j}(\xi_K) = 0$. 于是,得到

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\delta[R_{ab}\xi^b_{\mathrm{K}}\mathrm{d}\sigma^a]$$

$$= \delta\left[M - \frac{\kappa}{4\pi}A - 2\Omega_{\mathrm{H}}J\right], \quad (26)$$

同时以下方程得以满足：

$$\delta(\mathbf{E}\hat{\delta}_{\xi_{\mathrm{K}}g}) = 0.$$

应该指出，这恰恰是 Bardeen 等人[6]计算黑洞力学第一定律的出发点. 于是，重复他们往后的计算，在不改变黑洞视界的位置和 Killing 向量场的扰动下，就直接得到真空稳态轴对称黑洞力学的第一定律：

$$\delta M - \frac{\kappa}{8\pi}\delta A - \Omega_{\mathrm{H}}\delta J = 0. \quad (27)$$

5 关于稳态轴对称黑洞视界附近约化代数的中心项

仿照 Carlip，考虑如图 1 所示的一个部分 Cauchy 面 Σ_p：由类空无穷远 i^0 出发，止于延展(stretched) Killing 视界的某处 B_ϵ. 在计算的最后，取 $\epsilon\to0$ 使得 B_ϵ 趋于事件视界(也是 Killing 视界)上的某一点 B. 注意，一个完整的 Cauchy 面 Σ 应由上述部分 Cauchy 面和一个连接分支面 S_{H} 与 B_ϵ 的部分 Cauchy 面两部分构成. 下面的分析的方法和结果，也同样适用于连接分支面与 B_ϵ 的部分 Cauchy 面.

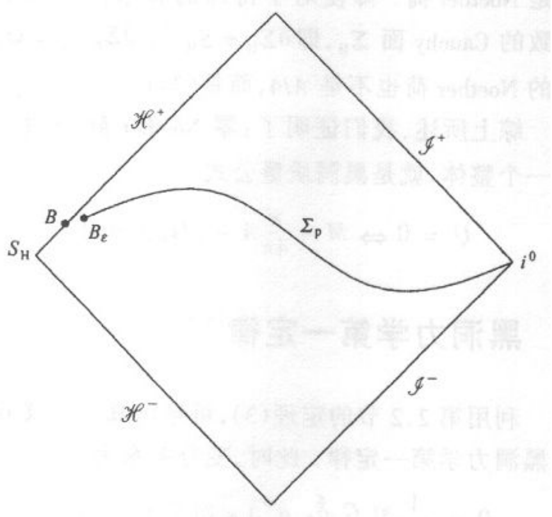

图 1 黑洞外渐近平直区的 Penrose 图

$\mathscr{I}^+$，$\mathscr{I}^-$ 和 i^0 分别是未来类光无穷远、过去类光无穷远和类空无穷远，$\mathscr{H}^+$，$\mathscr{H}^-$ 和 S_{H} 分别是黑洞的未来事件视界、过去事件视界和分支视界，B 是未来事件视界上的任一点，Σ_p 是部分 Cauchy 面，B_ϵ 是部分 Cauchy 面的内边界，随着 $\epsilon\to0$，$B_\epsilon\to B$.

定义如下正交于 Killing 向量场(1)的向量场：

$$\rho_a := -\frac{1}{2\kappa}\nabla_a\xi^2_{\mathrm{K}}. \quad (28)$$

ξ^a_{K} 和 ρ^a 可以组合为两个零向量场，

$$l^a = \frac{1}{2}\left(\xi^a_{\mathrm{K}} + \frac{|\xi_{\mathrm{K}}|}{\rho}\rho^a\right),$$
$$n^a = -\frac{1}{\xi^2_{\mathrm{K}}}\left(\xi^a_{\mathrm{K}} - \frac{|\xi_{\mathrm{K}}|}{\rho}\rho^a\right), \quad (29)$$

它们满足如下对易关系：$[l,n]^a = -\kappa\frac{\rho}{|\xi_{\mathrm{K}}|}n^a$.

l^a，n^a 以及 m^a，$\bar{m}^a$ 构成一组零标架；且在视界的邻域内处处有定义. 不难核实以下渐近行为

$$\mathrm{D}\xi^2_{\mathrm{K}} := l^a\nabla_a\xi^2_{\mathrm{K}} = \mathrm{O}(\xi^2_{\mathrm{K}}),$$
$$\Delta\xi^2_{\mathrm{K}} := n^a\nabla_a\xi^2_{\mathrm{K}} = \mathrm{O}(1). \quad (30)$$

考虑一类在 Lie 括号下构成封闭代数的向量场：

$$\xi^a = Tl^a + Rn^a,\ T\sim\mathrm{O}(1),\ R\sim\mathrm{O}(\xi^2_{\mathrm{K}}). \quad (31)$$

可以证明，这类向量场包括了 Carlip 所考虑的向量场. 对于这类向量场，当场方程成立时，在 Σ_p 的内边界上的部分 Noether 荷为

$$\mathcal{Q}_S(\xi) = -\frac{1}{16\pi}\int_S\hat{\epsilon}_{ab}(\mathrm{D}T + \kappa T - \Delta R),$$

这里 $S = \lim_{\epsilon\to0}B_\epsilon$. 可以证明，在视界上哈密顿泛函[1,2]与 Noether 荷之间满足：

$$H_S([\xi_1,\xi_2]) = \mathcal{Q}_S([\xi_1,\xi_2]),$$
$$\hat{\delta}_{\xi_2}H_S(\xi_1) = \hat{\delta}_{\xi_2}\mathcal{Q}_S(\xi_1) - \hat{\delta}_{\xi_1}\mathcal{Q}_S(\xi_2).$$

Carlip 提出[2]，哈密顿泛函应构成代数

$$\hat{\delta}_{\xi_2}H_S(\xi_1) = H_S([\xi_1,\xi_2]) + K_S(\xi_1,\xi_2). \quad (32)$$

如果采用上述零标架，当 $l_{a;b}(m^am^b + \bar{m}^am^b)|_S = 0$ 时，在视界面上，有

$$H_S([\xi_1,\xi_2]) = -\frac{1}{8\pi}\int_S\hat{\epsilon}_{ab}(-T_{[1}\mathrm{D}\Delta R_{2]} + T_{[1}\mathrm{D}^2T_{2]} + \kappa T_{[1}\mathrm{D}T_{2]}),$$

$$\hat{\delta}_{\xi_2}H_S(\xi_1) = \frac{1}{8\pi}\int_S\hat{\epsilon}_{ab}(T_{[1}\mathrm{D}\Delta R_{2]} - T_{[1}\mathrm{D}^2T_{2]} - \kappa T_{[1}\mathrm{D}T_{2]}),$$

两者严格相等. 于是，可以得到结论：在真空广义相对论中，对于稳态轴对称黑洞，类型(31)式的向量场 ξ_1，ξ_2 在视界上的约化代数(32)式的中心项为零. 事实上，对于这类向量场，约化代数(14)式的中心项也是零[5].

6 结语

总之，本文运用并发展了协变相空间的 Noether

荷方法,对于真空广义相对论稳态轴对称黑洞得到:黑洞质量公式是关于 Killing 向量场和完整 Cauchy 面上的零 Noether 荷. 黑洞熵不是 Noether 荷,而是正比于不考虑无限远边界的有条件的 Cauchy 面的 Noether 荷的负号;而黑洞质量和角动量则分别是不考虑内边界的有条件的 Cauchy 面上对应于类时和类空 Killing 向量场的 Noether 荷. 黑洞力学第一定律也可以利用这一方法导出. 即使按照 Carlip 采用部分 Cauchy 面的做法,对于一大类向量场,我们利用零标架方法证明了,在视界附近的约化代数的中心项为零;进而,Virasoro 代数的中心项也为零. 因此,用 Carlip 的方法并不能解释黑洞熵的微观起源. 其实,最终判断约化代数是否具有"中心",应在完整的 Cauchy 面上考虑,这个问题正在进一步研究之中.

应该指出,我们的方法在原则上可以推广到有物质场的情形以及其它维黑洞的情形. 其实,第二节的定理,在原则上就适用于具有物质场和任意维的情形. 另外,有些条件有可能放宽:例如,考虑渐近对称性和孤立视界(isolated horizon)的情形等等.

感谢周彬博士阅读本文的初稿并提出有价值的意见.

参考文献(References)

1 Wald R M. Phys. Rev., 1993, **D48**: R3427; Living Rev. Rel., 2001, **4**(6):1

2 Carlip S. Class. Quan. Grav., 1999, **16**:3327; Nucl. Phys. Proc. Suppl., 2000, **88**:10; Phys. Rev. Lett., 2002, **88**:241301

3 Cardy J A. Nucl. Phys. 1986, **B270**:186

4 WU Xiao-Ning, GUO Han-Ying, HUANG Chao-Guang et al. Commun. Theor. Phys., 2002, **38**:309

5 GUO Han-Ying, HUANG Chao-Guang, WU Xiaoning. Phys. Rev. 2003, **D67**:024031

6 Bardeen J M et al. Commun. Math. Phys., 1973, **31**:161

Noether Theorem and Black Hole's Mass Formula and Entropy*

HUANG Chao-Guang[1;1)] GUO Han-Ying[2;2)] WU Xiao-Ning[3;3)]

1 (Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China)

2 (Institute of Theoretical Physics, CAS, Beijing 100080, China)

3 (Max-Plank-Insitut für Gravitationsphysik, 14476, Golm, Germany)

Abstract The Noether charge formalism on the covariant phase space is used and developed For a stationary axisymmetric black hole in vacuum general relativity, the mass formula is the vanishing Noether charge with respect to the Killing vector field $\xi^a_K = t^a_K + \Omega_H \phi^a_K$ on an entire Cauchy surface. Its differential form gives the first law of black hole mechanics. For a large class of vector fields, the central term of the reduced algebra near the horizon is proved to be zero by use of the null tetrad formalism. It implies that the microscopic interpretation of the black hole entropy based on the symmetry analysis proposed by Carlip is debatable.

Key words Noether theorem, mass formula of black hole, black hole entropy, Virasoro algebra, diffeomorphism invariance, Killing symmetry

Received 19 March 2003

* Supported by National Natural Science Foundation of China (90103004, 10175070), Major State Basic Research Development Program (G1998030601) and Alexander von Humboldt Foundation in Germany

1) Email: huangcg@mail.ihep.ac.cn

2) Email: hyguo@itp.ac.cn

3) Email: wuxn@aei.mpg.de