第 27 卷 第 1 期
2003 年 1 月
高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.27, No.1
Jan., 2003

动力论方法计算包含化学势的硬热圈自能*

张超　郑小平
（华中师范大学物理系　武汉　430079）

摘要　介绍了经典非 Abel 等离子体满足的动力论方程及求解的方法. 同时考虑夸克与反夸克贡献得到解析的有效质量(同时包含温度和化学势)的表达式,进而推出包含化学势的硬热圈自能,和场论所得结果完全一致.

关键词　动力论　硬热圈　化学势　非 Abel 效应

1　前言

像温度场论一样,动力论理论(或输运理论)也是研究夸克－胶子等离子体(QGP)的重要理论工具. 在高温规范理论中,由于软模式有大的集体效应,人们发现朴素微扰论失效,亦即微扰计算结果是规范相关的. 可 Klimov[1] 和 Weldon[2] 又分别发现在热平衡下单圈自能具有领头阶贡献,这种单圈图就是所谓"硬热圈"(HTL). 很快地,Braaten 和 Pisarski 提出了"硬热圈"重求和微扰论[3],这使得原来朴素微扰论得到改善. 自此,研究者使用场论方法开展了许多与 HTL 相关的研究工作[4—6]. 然而 1994 年,Kelly 等[7] 用动力论方法同样成功地导出了 HTL 有效作用量,这深刻地揭示了 HTL 与动力论理论的某种联系,更是激发人们继续探讨场论与动力论的关系. 在另一极端条件(有限化学势和零温)下,"硬密圈"(HDL)微扰论也相应发展起来,而 1996 年 Manuel 又用动力论方法方便地得到了 HDL 的结果[8]. 在未来 LHC 能量范围,理论上认为碰撞中心快度区完全透明,即化学势 $\mu/T\approx 0$,但在 RHIC 中,中心快度区密度效应是不能忽略的,必须考虑化学势的影响[9]. 实际上,用场论的方法研究过包含化学势的 HTL(即温度和化学势都是有限的)问题. 本文的目地就是在这一条件下,使用动力论理论重生包含化学势的 HTL 的结果,进一步揭示动力论与温度场论的关系.

2　经典动力论方程及其渐进解法

对于一个非 Abel 等离子体系统,处于相空间 (x,p,Q) 的粒子的经典轨迹 $x(\tau),p(\tau),Q(\tau)$ 是 Wong 方程的解[10],从这个基本方程出发我们便可得到经典非 Abel 等离子体所满足的动力论方程[11]

$$p^{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-gQ_aF^a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}-gf_{abc}A^b_{\mu}Q^c\frac{\partial}{\partial Q_a}\right]f(x,p,Q)=0. \tag{1}$$

注意到上式的第二项为一个非线性项,这增加了对方程解析求解的困难. 但是正是这一项的出现使得方程满足 $SU(3)$ 规范[7]. 其中背景场满足 Yang-Mills 方程

$$[D_{\mu}F^{\mu\nu}]^a(x)=J^{\nu a}(x), \tag{2}$$

$$J^{\mu a}(x)=g\int \mathrm{d}P\mathrm{d}Qp^{\mu}Q^af(x,p,Q). \tag{3}$$

这里 J^{μ} 为色流,协变导数 $D^{ac}_{\mu}[A]=\partial_{\mu}\delta^{ac}+gf^{abc}A^b_{\mu}$.

以上 3 个方程就组成了经典非 Abel 输运理论基础,它们是一套完备的方程组. 要解决由于非线性项而造成的困难,必须选定小的参量,采用渐近展开的方法来求解. 但众所周知,对于一个规范理论,计算结果必须具有规范不变性. 这样对于一个平衡态附近的系统,选取耦合常数 g 作为展开小量,即分布函数按耦合常数 g 展开为

$$f(x,p,Q)=f^{(0)}(p_0)+gf^{(1)}(x,p,Q)+g^2f^{(2)}(x,p,Q)+\cdots. \tag{4}$$

2002－03－11 收稿
* 华中师范大学自然科学基金资助

其中 $f^{(0)}$ 是系统处于平衡态时的分布函数.

将(4)式代入玻尔兹曼方程(1)式,可以获得一个近似到 $f^{(1)}$ 级的协变方程

$$p^{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - gf_{abc}A^{b}_{\mu}Q^{c}\frac{\partial}{\partial Q_{a}}\right]f^{(1)}(x,p,Q) = p^{\mu}Q_{a}F^{a}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}f^{(0)}(p_0). \qquad (5)$$

关于热涨落我们有 $\partial_{\mu}\sim gT$,而 $gA_{gT}\sim g^{3/2}T$[9],那么(5)式第二项同 ∂_{μ} 相比具有更高的量级,因而(5)式可在平面波 Ansatz 下求解.

3 色流方程及包含温度和化学势的 Debye 质量

现就方程(5),对其两边同乘 p^{μ} 和 Q_a,然后对色荷进行积分则可得到色流密度 $J^{\mu}(x,p)$ 所满足的方程

$$[p\cdot DJ^{\mu}(x,p)]^{a} = 2g^{2}p^{\mu}P^{\nu}F^{a}_{\nu0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_0}f^{(0)}(p_0). \qquad (6)$$

相似的结果在量子场背景中[6,12]也被获得.

为了解方程(6)式,对等式两边动量的大小进行积分后得到

$$[v\cdot D\mathscr{J}^{\mu}(x,v)]^{a} = -M^{2}v^{\mu}v^{\rho}F^{a}_{\rho0}(x). \qquad (7)$$

其中 $v^{\mu}=(1,\boldsymbol{v})$ 为四动量的单位矢量,并定义(忽略质量的影响)

$$\mathscr{J}^{\mu}_{a}(x,v) = \int\frac{|\boldsymbol{p}|^{2}\mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\mathrm{d}p_0}{2\pi^{2}}2\theta(p_0)\times\delta(p^{2})J^{\mu}_{a}(x,p),$$

且有

$$J^{\mu}_{a}(x) \quad \int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\mathscr{J}^{\mu}_{a}(x,v). \qquad (9)$$

Debye 质量其表达式为

$$M^{2} = \frac{2g^{2}}{\pi^{2}}\int p_0^{2}\mathrm{d}p_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_0}f^{(0)}(p_0). \qquad (10)$$

为了解出(7)中的色流,现在将它变换到动量空间

$$\mathscr{J}^{\mu}_{a}(k,v) = \int\frac{\mathrm{d}^{4}x}{(2\pi)^{4}}\mathrm{e}^{ik\cdot x}\mathscr{J}^{\mu}_{a}(x,v),$$

再将上式应用到(7)式可得

$$v\cdot k\mathscr{J}^{\mu}_{a}(k,v) + igf_{abc}\int\frac{\mathrm{d}^{4}q}{(2\pi)^{4}}v\cdot A^{b}(k-q)\mathscr{J}^{\mu c}(q,v) = -M^{2}v^{\mu}\Big[v\cdot kA^{a}_{0}(k) - k_0v\cdot A^{a}(k) + igf_{abc}\int\frac{\mathrm{d}^{4}q}{(2\pi)^{4}}v\cdot A^{b}(k-q)A^{c}_{0}(q)\Big].$$

只要按(10)式给出 Debye 质量 M,那么就可以通过这一方程确定流 $\mathscr{J}^{\mu}$ 的解. 对于玻色子,分布函数 $f^{(0)}$ 取 $n_{B}(p_0)=\frac{1}{\exp(\beta p_0)-1}$ 可算出

$$M^{2}_{B} = \frac{2}{3}Ng^{2}T. \qquad (13)$$

对于费米子,我们有 $n_{F,\bar{F}}=\frac{1}{\exp[\beta(p_0\mp\mu)]+1}$,其中化学势 μ 前的 $\mp$ 号分别表示正反夸克情形,如果化学势 $\mu=0$,类似于玻色子的计算很容易分别算出正反粒子的 M^{2}_{F}. 而现在由于 $\mu\neq0$,将分布函数分别代入(10)中计算得

$$M^{2}_{q} = \frac{2g^{2}N_{F}}{\pi^{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{p_0\mathrm{d}p_0}{\exp[\beta(p_0-\mu)]+1} = \frac{2g^{2}N_{F}}{\pi^{2}}\left[\frac{T^{2}\pi^{2}}{12} + T^{2}\int_{\frac{\mu}{T}}^{0}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\exp(\xi)+1} + \mu T\ln\left(\exp\left(\frac{\mu}{T}\right)+1\right)\right], \qquad (14)$$

$$M^{2}_{\bar{q}} = \frac{2g^{2}N_{F}}{\pi^{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{p_0\mathrm{d}p_0}{\exp[\beta(p_0+\mu)]+1} = \frac{2g^{2}N_{F}}{\pi^{2}}\left[\frac{T^{2}\pi^{2}}{12} + T^{2}\int_{\frac{\mu}{T}}^{0}\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\exp(\xi)+1} + \mu T\ln\frac{\exp\left(\frac{\mu}{T}\right)}{\exp\left(\frac{\mu}{T}\right)+1}\right]. \qquad (15)$$

与零化学势情形不同,显然不能得到解析结果. 但是如果同时考虑正反粒子的贡献,(14),(15)式方括号中的第二项恰好可以抵消,因此将(14)和(15)相加得

$$M^{2}_{F}(\mu,T) = \frac{2g^{2}}{\pi^{2}}\int p_0^{2}\mathrm{d}p_0\frac{\partial}{\partial p_0}[N_{F}n_{F} + N_{F}n_{\bar{F}}] = \frac{1}{3}N_{F}g^{2}\left(T^{2} + \frac{3}{\pi^{2}}\mu^{2}\right). \qquad (16)$$

当 $\mu\to0$ 时,$M^{2}_{F}\to\frac{1}{3}N_{F}g^{2}T^{2}$ 为 HTL 近似下的结果,而当 $T\to0$ 时,$M^{2}_{F}\to\frac{1}{\pi^{2}}N_{F}g^{2}\mu^{2}$,为 HDL 近似下的结果. 稍微改写一下(16)式的形式有

$$M^{2}_{F}(\mu,T) = \frac{1}{3}N_{F}g^{2}T^{2}\left(1 + \frac{3}{\pi^{2}}\frac{\mu^{2}}{T^{2}}\right). \qquad (17)$$

显然如果 μ/T 不能极小于1时,密度效应是不能忽略的,但我们知道相变温比化学势要高,因而在讨论 HTL 重求和有效微扰时必须考虑包含化学势 HTL 的结果.

4 胶子自能

确定了 M,利用边界条件 $p_0\to p_0+i\varepsilon$(其中 $\varepsilon\to0^{+}$),容易求得方程(12)的一级近似解为

$$\mathscr{J}_a^{\mu(1)}(k,v) = M^2(\mu,T)v^\mu\left(k_0\frac{v\cdot A_a(k)}{v\cdot k} - A_a^0(k)\right). \tag{18}$$

用下面的关系式就可以算出极化张量

$$J_a^{\mu(1)}(k) = \Pi_{ab}^{\mu\nu}(k)A_\nu^b(k), \tag{19}$$

它可以表示为

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu}(k) = M^2(\mu,T)\left(-g^{\mu0}g^{\nu0} + k_0\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\frac{v^\mu v^\nu}{v\cdot k}\right)\delta_{ab}. \tag{20}$$

为了避开积分式中的奇点,这里用 $k_0 + \mathrm{i}\varepsilon$ 来代替 k_0. 上式满足 Ward 恒等式 $k_\mu\Pi_{ab}^{\mu\nu} = 0$,并且由于输运方程的规范不变性,它也是规范独立的.

解(20)式可以得到极化张量的实部为

$$\mathrm{Re}\Pi_{ab}^{00}(k_0,\boldsymbol{k}) = \delta_{ab}\Pi_1(k_0,\boldsymbol{k}), \tag{21}$$

$$\mathrm{Re}\Pi_{ab}^{0i}(k_0,\boldsymbol{k}) = \delta_{ab}k_0\frac{k^i}{|\boldsymbol{k}|^2}\Pi_1(k_0,\boldsymbol{k}), \tag{22}$$

$$\mathrm{Re}\Pi_{ab}^{ij}(k_0,\boldsymbol{k}) = \delta_{ab}\left[\left(\delta^{ij} - \frac{k^ik^j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\Pi_t(k_0,\boldsymbol{k}) + \frac{k^ik^j}{|\boldsymbol{k}|^2}\frac{k_0^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\Pi_1(k_0,\boldsymbol{k})\right] \tag{23}$$

其中

$$\Pi_1(k_0,\boldsymbol{k}) = M^2(\mu,T)\left(\frac{k_0}{2|\boldsymbol{k}|}\ln\left|\frac{k_0+|\boldsymbol{k}|}{k_0-|\boldsymbol{k}|}\right| - 1\right), \tag{24}$$

$$\Pi_t(k_0,\boldsymbol{k}) = M^2(\mu,T)\frac{k_0^2}{2|\boldsymbol{k}|^2}\times\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{k_0} - \frac{k_0}{|\boldsymbol{k}|}\right)\ln\left|\frac{k_0+|\boldsymbol{k}|}{k_0-|\boldsymbol{k}|}\right|\right]. \tag{25}$$

而虚部可以表示为

$$\mathrm{Im}\Pi_{ab}^{\mu\nu}(k_0,\boldsymbol{k}) = -\delta_{ab}M^2(\mu,T)\pi k_0\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}v^\mu v^\nu\delta(k\cdot v).$$

这样我们便得到了包含化学势的硬热圈自能 $\Pi^{\mu\nu}$ 的解析表达式.

5 结论

我们完全采用动力论的方法求解得到了包含化学势的硬热圈自能的表达式,和用场论计算的结果有完全相同的形式[12,13]. 业已证明[7] 硬热圈近似是经典效应,而使用经典动力论方法避免了场论中对量子自由度的处理. 因而,我们的计算与场论相比要简单得多.

值得指出的是,要得到包含化学势"硬热圈"自能的解析结果,必须同时考虑夸克和反夸克的贡献,这与零化学势或零温时的计算有所不同.

参考文献(References)

1 Klimov V V,Sov J. Nucl. Phys.,1981,**33**:934
2 Weldon H A. Phys. Rev.,1982,**D26**:1394;2789
3 Braaten E,Pisarski R D. Nucl. Phys.,1990,**B337**:569;**B339**:310
4 Taylor J C,Wong S. Nucl. Phys.,1990,**B346**:135
5 Efraty R,Nair V P. Phys. Rev. Lett.,1992,**68**:2891;Phys. Rev.,1993,**D47**:5601
6 Blaizot J P,Iancu E. Phys. Rev. Lett.,1993,**70**:3376;Nucl. Phys.,1994,**B417**:608
7 Kelly P F,LIU Q,Lucchesi C et al. Phys. Rev. Lett.,1994,**72**:3461;Phys. Rev.,1994,**D50**:4209
8 Manuel C. Phys. Rev.,1996,**D53**:5866
9 Blaizot J P,Iancu E. Phys. Rep.,2002,**359**:355—528
10 Wong S. Nuovo Cim.,1970,**65A**:689
11 Heinz U. Phys. Rev. Lett.,1983,**51**:81;Elze H T,Heinz U. Phys. Rep.,1989,**183**:81
12 Jackiw R,LIU Q,Lucchesi C. Phys. Rev.,1994,**D49**:6787
13 Silin V P. Zh. Eksp. Teor. Fiz.,1960,**38**:1577

Kinetic-Theory Approach to the "Hard Thermal Loop" Self-Energy Including Chemical Potential*

ZHANG Chao ZHENG Xiao-Ping

(Department of Physics,Central China Normal University,Wuhan 430079,China)

Abstract We briefly review the kinetic equations obeyed by classical non-Abelian plasmas. We get analytical effective mass including the effects of temperature and chemical potential when the contributions of both quark and anti-quark are considered. We derive the "Hard Thermal Loop" self-energy by solving these equations after the mass value is given. Our result is completely the same with the one from field theory.

Key words kinetic theory,Hard Thermal Loop,chemical potential,non-Abelian effect.

Received 11 March 2002

* Supported by NSF of Central China Normal University