第 26 卷 增刊 高 能 物 理 与 核 物 理 Vo1.26，Supp.
2002 年 12 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Dec.，2002

对称性关系与研究强子物理的自洽非微扰途径*

何汉新

(中国原子能科学研究院 北京 102413)

摘要 讨论了对称性导致的格林函数间的关系——横向及通常的纵向 Ward-Takahashi 关系. 自洽求解这组 WT 关系，导出了非微扰的费米子－玻色子项角函数. 应用非微扰顶角函数，得到了自洽截断的对传播子封闭的 Dyson-Schwinger 方程，构成了研究强子物理的自洽非微扰途径.

关键词 Ward-Takahashi 关系 非微扰顶角 非微扰途径

1 引言

应用量子色动力学(QCD)研究和理解强子物理是当代粒子物理和核物理的重要前沿. 但在低能标时，QCD是高度非微扰的，因而发展QCD非微扰途径以研究色禁闭、手征对称性的动力学破缺及其它强子问题成为我们面临最重要的挑战之一. 除了格点QCD理论外，Dyson-Schwinger(DS)方程是适合这种研究的非微扰途径[1]. 但DS方程是连接n点与n+1 点格林函数的无限积分方程组；最简单的是传播子与 3 点顶角连接的DS方程，而该 3 点项角满足与 4 点顶角相连的DS方程.因此必需找到截断DS方程组的合适途径以实际求解. 最简单而平凡的方法是将费米子－玻色子顶角取为裸顶角γ_μ——顶角函数的微扰极限. 用微扰极限下的相互作用来研究非微扰的问题，显然是不自洽的.除外，简单的采用裸顶角形式破坏了规范不变性的一个基本结果——Ward-Takahashi(WT)关系[2]. 人们认识到了这些问题，在近 20 年来一直努力试图改进顶角形式[1,3]. 然而，这些工作是基于人为的假设基础上[1]. 如何严格地导出非微扰的顶角已成为DS方程途径中严厉的问题.

近年来, 我们提出应用场论中的对称性导致的格林函数间的关系——Ward-Takahashi 关系来推导非微扰的顶角函数的途径[4−8]. 我们熟知的费米子－玻色子顶角(即矢量顶角)与传播之间关系的WT恒等式

$$q_\mu \Gamma_V^\mu(p_1, p_2) = S_F^{-1}(p_1) - S_F^{-1}(p_2) \tag{1}$$

* 国家自然科学基金资助

只是对矢量顶角的纵向分量的约束关系，而顶角的横向分量未被决定. 因此问题首先归纳为如何推导顶角横向分量的约束关系——横向WT关系. 我们导出了矢量顶角的横向WT关系[4,5]，发现矢量顶角的横向分量与轴矢量顶角及张量顶角的横向分量相连系. 因而要完全决定矢量顶角，必须同时导出轴矢量顶角和张量顶角的横向与纵向WT关系.应用这组WT关系，不用任何假设，我们导出了完全的矢量顶角函数. 由于WT关系是规范不变的结果，在微扰论和非微扰论都满足，因此所导出的矢量顶角函数也是微扰和非微扰上都满足的规范不变的顶角形式. 应用这一非微扰顶角到DS方程将导致方程组的自洽截断，构成了研究强子物理的自洽非微扰途径.

在本文的第 2 节讨论横向 WT 关系. 利用这些 WT 关系，在第 3 节给出非微扰的矢量顶角函数. 第 4 节则简要讨论自洽的非微扰途径的构成及量子反常问题.

2 横向的 Ward-Takahashi 关系

在正则量子场论中，通常WT恒等式(1)在坐标空间中的形式由包含矢量流的 3 点格林函数时序乘积的散度所导出. 我们发现，在坐标空间横向WT关系则可由包含矢量流的 3 点格林函数时序乘积的旋度运算导出[5]. 然后通过傅里叶变换可得到动量空间矢量顶角的横向WT关系：

$$\begin{aligned}\mathrm{i}q^{\mu}\Gamma_V^{\nu}(p_1,p_2)-\mathrm{i}q^{\nu}\Gamma_V^{\mu}(p_1,p_2)=S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\sigma^{\mu\nu}+\sigma^{\mu\nu}S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)+\\2m\Gamma_T^{\mu\nu}(p_1,p_2)+(p_{1\lambda},p_{2\lambda})\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\Gamma_{A\rho}(p_1,p_2)\ ,\end{aligned}\qquad(2)$$

这里 Γ_V^{μ}，Γ_A^{μ} 和 Γ_T^{μ} 分别是矢量、轴矢量和张量顶角在动量空间的表示. 公式(2)表明，矢量顶角的横向分量与轴矢量顶角和张量顶角相耦合. 因而矢量顶角的 WT 关系不足以完全决定矢量顶角. 为此，我们要研究对轴矢量顶角和张量顶角的横向 WT 关系. 在费米子质量为零(m=0)的情况，张量顶角无贡献. 由类似的方法，可以导出轴矢量顶角的横向 WT 关系在动量空间的表示

$$\mathrm{i}q^{\mu}\Gamma_A^{\nu}(p_1,p_2)-\mathrm{i}q^{\nu}\Gamma_A^{\mu}(p_1,p_2)=S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5-\sigma^{\mu\nu}S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)+(p_{1\lambda},p_{2\lambda})\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\Gamma_{A\rho}(p_1,p_2),\qquad(3)$$

对轴矢量顶角通常的（纵向）WT 关系为

$$q^{\mu}\Gamma_A^{\nu}(p_1,p_2)=S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\gamma_5+\gamma_5S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)+2m\Gamma_5(p_1,p_2).\qquad(4)$$

当m=0 时，赝标顶角Γ_5的贡献消失. 在不考虑量子反常等圈修正时，WT关系(1)—(4)式构成了零质量费米子情况下对矢量顶角和轴矢量顶角完备的WT型约束关系.

3 非微扰的费米子–玻色子顶角函数

自洽求解m=0 时的WT关系(1)—(4)式，可得到完全的顶角函数 Γ_V^{μ} 和 Γ_A^{μ}. 矢量顶角即费米子–玻色子顶角函数为[6]

$$\Gamma_V^{\mu}(p_1,p_2)=\Gamma_{V(L)}^{\mu}(p_1,p_2)+\Gamma_{V(T)}^{\mu}(p_1,p_2),\qquad(5)$$

其中

$$\Gamma^{\mu}_{V(L)}(p_1,p_2)=q^{-2}q^{\mu}[S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)-S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)], \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{V(L)}(p_1,p_2)=&[q^2+(p_1+p_2)^2-((p_1+p_2)\cdot q)^2q^{-2}]^{-1}\times\\ &\{\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\sigma^{\mu\nu}q_\nu+\sigma^{\mu\nu}q_\nu S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)+\\ &\mathrm{i}[S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\sigma^{\mu\lambda}-\sigma^{\mu\lambda}S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)](p_{1\lambda}+p_{2\lambda})+\\ &\mathrm{i}[S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\sigma^{\lambda\nu}-\sigma^{\lambda\nu}S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)]q_\nu(p_{1\lambda}+p_{2\lambda})q^{\mu}q^{-2}-\\ &\mathrm{i}[S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\sigma^{\mu\nu}-\sigma^{\mu\nu}S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)]\cdot q_\nu(p_1+p_2)\cdot qq^{-2}+\\ &\mathrm{i}[S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_1)\sigma^{\lambda\nu}+\sigma^{\lambda\nu}S_{\mathrm{F}}^{-1}(p_2)]q_\nu(p_{1\lambda}+p_{2\lambda})\times\\ &(p_1^{\mu}+p_2^{\mu}-q^{\mu}(p_1+p_2)\cdot qq^{-2})q^{-2}\}\ .\end{aligned} \tag{7}$$

我们看到，完全的矢量顶角是完全的费米子传播子的函数. 在费米子传播子取为裸传播子极限，得到

$$\Gamma^{\mu}_{V}(p_1,p_2)\to\gamma^{\mu}\ , \tag{8}$$

表明γ^{μ}是矢量顶角的微扰极限.

由于 WT 关系也是非微扰的关系,因而由 WT 关系导出的矢量顶角 Γ^{μ}_{V} 是非微扰的顶角.

4　自洽的非微扰途径

在阿贝尔规范理论情况，对传播子的DS方程包括对费米子传播子$S_{\mathrm{F}}(q)$的DS方程和对规范玻色子传播子$D_{\mu\nu}(q)$的DS方程

$$\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{-1}(q)=\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}^{(0)-1}(q)-\frac{q^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4P_1\gamma^{\mu}S_{\mathrm{F}}(p_1)\Gamma^{\nu}_{V}(p_1,p_2)D_{\mu\nu}(p_2)\quad , \tag{9}$$

$$\mathrm{i}D_{\mu\nu}^{-1}(q)=\mathrm{i}D_{\mu\nu}^{(0)-1}(q)+\frac{q^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4P_1t_r[\gamma^{\mu}S_{\mathrm{F}}(p_1)\Gamma^{\nu}_{V}(p_1,p_2)S_{\mathrm{F}}(p_2)]\quad . \tag{10}$$

现将非微扰的费米子－玻色子顶角函数(5)式代入方程(9)和(10). 由于(5)式给出的顶角函数Γ^{ν}仅是完全的费米子传播子的函数，$\Gamma^{\nu}_{V}(p_1,p_2)=\Gamma^{\nu}_{V}(S_{\mathrm{F}}(p_1),S_{\mathrm{F}}(p_2))$，因此所得到的方程形成了对传播子封闭的DS方程，构成了研究强子物理自洽的非微扰途径.

这里我们要作些说明. 为了简化讨论，在给出的WT关系中未写出可能的量子反常等圈贡献. 在量子理论中，轴矢量顶角的WT关系包含一项轴反常的贡献.最近，我们发现轴矢量顶角的横向WT关系包含一项横向轴反常的贡献[7,8]. 由于矢量顶角与轴矢量顶角通过横向WT关系相互耦合，因而导致横向轴反常也贡献矢量顶角. 应用包含横向轴反常的费米子－玻色子顶角函数到DS方程(9)和(10)，则两式的右边还出现包含反常贡献的项，它们导致DS方程封闭性的“反常”破坏. 对于非阿贝尔QCD情况，如何导出完整的非微扰顶角和自洽的非微扰途径，有待于进一步研究.

参考文献（References）

1 Roberts C D, Williams A G. Prog. Part. Nucl. Phys., 1994, **33**: 477—575

2 Ward J C. Phys. Rev., 1950, **78**: 182—185; Takahashi Y. Nuovo Cimento, 1957, **6**: 370—372

3 Bashir A et al. Phys. Rev., 1998, **D57**: 1242—1249

4 HE Han-Xin, Khanna F C, Takahashi Y. Phys. Lett., 2000, **B480**: 222—228

5 HE Han-Xin. Commun. Theor. Phys., 2001, **35**: 32—35

6 HE Han-Xin. Phys. Rev., 2001, **C63**: 025207-1-025207-6

7 HE Han-Xin. Commun. Theor. Phys., 2001, **36**: 285—286

8 HE Han-Xin. Phys. Lett., 2001, **B507**: 351—355

Symmetry Relations and the Consistent Nonperturbative Approach of Studying Hadronic Physics*

HE Han-Xin

(China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China)

Abstract We discuss the symmetry relations among Green's functions, i.e., the transverse and the normal (longitudinal) Ward-Takahashi relations. Solving consistently this set of WT relations, we obtain the nonperturbative fermion-boson vertex function, which leads to consistently truncated and closed Dyson-Schwinger equations for the propagators up to the quantum anomaly, thus providing the consistent nonperturbative approach of studying hadronic physics.

Key words ward-takahashi relations, nonperturbative vertex, nonperturbative approach

* Supported by National Natural Science Foundation of China