

周期轨道的量子化与 量子能谱中的长程关联*

李希国^{1,2} 宋建军² 邢永忠² 左维^{1,2}

1(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心 兰州 730000)

2(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

摘要 用二维可积系统的半经典量子化方案和二维无关联振子系统的量子能级与周期轨道之间的对应关系,讨论了一组量子能级之间具有长程关联的内在机制,在二维无关联振子系统中,发现了具有相同拓扑 $M(M_1, M_2)$ 的周期轨道相对应的量子能级之间存在着长程关联,并以二维 4 次无关联振子系统为例做了具体说明.

关键词 求迹公式 回归谱 长程关联

1 引言

近年来人们广泛采用量子能谱 Fourier 变换后得到的回归谱研究量子经典对应. 回归谱在周期轨道对应的作用量处呈现峰,一方面,在半经典的周期轨道理论框架下^[1],每一个峰的出现都可以用周期轨道来解释;另一方面,量子理论指出,每一个峰都是无数量子能级相干的结果,无数能级相干成峰显示量子能谱中存在着长程关联. 量子与半经典理论的不同解释显示了量子能级间存在的长程关联与周期轨道的拓扑性质紧密相关. 最近,Main^[2]等发展的“谐波反演技术”克服了传统 Fourier 变换的不确定性,在提供了轨道分叉和“鬼轨道”等信息的同时,为分析能级长程关联提供了高分辨度的回归谱^[3]. 这种新方法被用来研究一些混沌和混杂系统,尤其是外场中的氢原子系统^[4]. 半经典理论与实验结果较好地符合显示了周期轨道理论的有效性,但是,具有长程关联的能级之间以及与之相对应的周期轨道存在着什么样的内在关联,是一个值得探讨的问题.

另一方面,20 世纪 60 年代末,Gutzwiller^[5]从 Schrödinger 方程出发,采用 Fynman 路径积分和稳相近似方法,导出了混沌系统的求迹公式,并给出了周期轨道作用量的半经典量子化条件,对混沌系统轨道作用量进行了量子化.但是,他在这种量子化过程中没有考虑轨

2001-6-11 收稿

* 国家教委留校回国人员基金,中国科学院知识创新工程重要方向性项目基金(KJCX2-SW-N02),中国科学院“百人计划”基金和国家重点基础研究发展规划(G200077400)资助

道的周期性,因而,Gutzwiller的量子周期轨道中实际上包含了非周期轨道.后来,Berry和Tabor采用角动量坐标,给出了二维可积系统的Berry-Tabor求迹公式^[6].最近,我们在Berry-Tabor公式的基础上,考虑周期性条件,讨论了二维可积系统周期轨道的量子化问题,给出了二维4次无关联振子系统周期轨道作用量的量子化条件和系统的半经典能级公式^[7].与此同时,在讨论周期轨道作用量量子化过程中,我们发现了量子能级与量子周期轨道之间存在一定的对应关系^[8].在此基础上,分析了二维无关联振子系统回归谱的峰值所对应的一组量子能级之间存在长程关联的内在性质^[9].

在上述工作的基础上,本文首先讨论二维 ν 次无关联振子系统周期轨道作用量量子化条件以及回归函数,讨论量子能级与周期轨道之间的对应关系,并由此论证了二维无关联振子系统量子能谱中的长程关联,以二维4次无关联振子系统为例,做了进一步说明.

2 周期轨道作用量量子化条件与量子经典对应

从可积系统的Berry-Tabor公式出发,来分析二维 ν 次无关联振子系统中量子能级和经典周期轨道之间的对应关系.

二维 ν 次无关联振子系统的Hamiltonians一般可写为^[10]

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + a \frac{q_1^\nu}{b} + abq_2^\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

其中, p_1 和 p_2 , q_1 和 q_2 分别是每一维上的动量和坐标, a , b 是两个常数,它们的选取与系统的对称性有关.

可积系统的Berry-Tabor求迹公式^[6]

$$\rho_M^{\text{sc}} = \frac{T_M}{\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g''_E|^{1/2}} \cos\left(\frac{S_M}{\hbar} - \frac{\eta_M \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2)$$

考虑到粒子在一条周期轨道上可以运动 n ($n = 1, 2, \dots$)个周期而不止一个周期,这条周期轨道对态密度的总贡献为各个周期贡献的和,因此,

$$\begin{aligned} \rho_M^{\text{sc}}(E) &= \sum_n \frac{T_M}{\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g''_E|^{1/2}} \cos\left(\frac{nS_M}{\hbar} - \frac{n\eta_M \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2} T_M}{4\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g''_E|^{1/2}} \left[\cot\left(\frac{S_M}{2\hbar} - \frac{\eta_M \pi}{4}\right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式表示当周期轨道的作用量和Maslov指数满足条件

$$S_M^q = (m + \eta_M/4)h \quad (m \text{ 取整数, } q \text{ 表示量子化}) \quad (4)$$

时,此周期轨道导致态密度取奇点(一个无穷大的半经典态密度),即对应一个可能的量子能级.1958年,Keller从量子力学方程出发,也曾得到过类似的公式^[11],但是对于二维可积系统,他没有注意到这一公式仅仅给出了周期轨道作用量量子化的必要条件.(3)式说明周期轨道作用量只能取一些分立值,不是任意能量下的周期轨道的作用量都导致态密度函数成为奇点.另外,(4)式是在对周期轨道的作用量进行量子化,因此,在作用量量子化过程中,必须考虑周期轨道的周期条件,而不同的系统其周期条件是不同的.

对于二维 ν 次无关联振子系统,其周期轨道满足的周期性条件是 $M_1 T_1 = M_2 T_2$ (T_1 ,

T_2 分别为 ν 次振子在每一个不等价拓扑圆上运动的周期), 运用 EBK (Einstein-Brillouin-Keller) 量子化条件, 由 (4) 式得到作用量量子化条件

$$S_M^q = M_1(n_1 + 1/2)h + M_2(n_2 + 1/2)h. \quad (5)$$

由周期性条件给出:

$$\left(\frac{E^1}{E^2}\right)^{\frac{2-\nu}{2\nu}} b^{\frac{2}{\nu}} = \frac{M_2}{M_1},$$

$$\frac{n_1 + \frac{1}{2}}{n_2 + \frac{1}{2}} \approx \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2-\nu}{2\nu}} b^{\frac{4}{\nu-2}},$$

其中 E^1, E^2 和 n_1, n_2 分别为每一维上的能量和量子数^[7]. 如果 E^1, E^2 取量子能级在每一维上的分量, 且 $(E_1/E_2)^{\frac{2-\nu}{2\nu}} b^{\frac{2}{\nu}}$ 取实数, 总可以找到一组 (M_1, M_2) 满足 (7) 式. 也就是说, 对于任意一条能级, 总可以找到一条周期轨道与它相对应; 对于任意一组 (M_1, M_2) , 总可以找到多组 E^1, E^2 近似的满足 (7) 式. 换言之, 对于任意一条周期轨道, 总可以找到多条能级与之相对应.

3 二维振子系统回归函数与回归谱

1986 年, Wintgen^[12] 对量子态密度进行 Fourier 变换得到了回归函数, 相应的谱称为回归谱. 用公式表示为

$$R(S, E) = \int_0^\infty dt u^{-1/2} e^{-iSt} \rho(t, E), \quad (8)$$

其中

$$\rho(t, E) = \sum_0^\infty \delta(E - E_n(t)) \quad (9)$$

是量子态密度. 这里 $R(S, E)$ 是量子回归函数, S 是作用量, $t = 1/\hbar$. 加进一个 $t^{-1/2}$ 因子是为了使回归函数形式更紧凑. 如果将量子态密度换成半经典态密度, 所得到的回归函数就是半经典回归函数. Main 应用“谐波反演技术”, 对磁场中的氢原子系统进行了研究, 得到了高分辨度回归谱^[3].

文献[2]的图 4 中的峰大致出现在周期轨道所对应的作用量处. 因为系统在周期轨道上的运动经过整数个周期后又回到其起始点, 所以该图被称作回归谱, (8) 式被称作回归函数.

为了讨论二维 ν 次无关联振子系统回归谱中的峰与周期轨道的关系, 运用系统标度不变性^[11], 对态密度进行 Fourier 变换, 得到二维 ν 次无关联振子系统的量子回归函数

$$R(S, E) = -\frac{\nu+2}{2\nu} \sum_{n=0}^\infty E_n^{(\nu+2)/4\nu} E^{-(5\nu+2)/(2\nu+4)} e^{-iS\left(\frac{E_n}{E}\right)^{(\nu+2)/2\nu}}, \quad (10)$$

其中 E_n, E 分别是系统的量子能级能量和总能量. (10) 式表明每一条量子能级对回归函数都有贡献. 回归谱中每一个峰的出现都是许多能级贡献相干的结果, 能谱中的长程关

联可能与每一条能级对回归函数贡献项的相位项紧密相关. 另一方面, 回归谱中的峰出现在周期轨道对应的作用量处, 这可能意味着能级间的长程关联与量子经典对应关系相联系.

4 长程关联的理论解释

利用上述的量子经典对应关系来解释二维无关联振子系统量子能谱中的长程关联.

(4)式表明, 每一条能级对回归函数有一个贡献, 贡献项的相位是 $e^{-is\left(\frac{E}{F}\right)^{(\nu+2)/2\nu}}$.

二维无关联振子系统这样的齐次系统, 其标度不变性^[12]使得某一条具有拓扑数 $M(M_1, M_2)$ 周期轨道的作用量与系统能量具有简单的正比关系

$$S_M(E) \propto E^{\frac{\nu+2}{2\nu}}. \quad (11)$$

假设某两能级 E_n, E_k 对应轨道拓扑数都是 $M(M_1, M_2)$, 亦即能级 E_n, E_k 每一维上的能量分量 $E_n^1, E_n^2, E_k^1, E_k^2$ 与周期轨道拓扑数 $M(M_1, M_2)$ 满足关系:

$$\frac{n_1 + \frac{1}{2}}{n_2 + \frac{1}{2}} \approx \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2+\nu}{2-\nu}} b^{\frac{4}{\nu-2}}, \quad \frac{k_1 + \frac{1}{2}}{k_2 + \frac{1}{2}} \approx \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2+\nu}{2-\nu}} b^{\frac{4}{\nu-2}}.$$

当(10)式中的 S 取周期轨道的作用量 $S_M^q(E)$ 时, 由(5)式和(11)式, 得到 E_n 贡献的相位

$$-S_M^q(E) \left(\frac{E_n}{E}\right)^{(\nu+2)/2\nu} = -S_M^q(E_n) \approx -2\pi \left[M_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + M_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \right] \hbar, \quad (12)$$

E_k 贡献的相位是

$$-S_M^q(E) \left(\frac{E_k}{E}\right)^{(\nu+2)/2\nu} = -S_M^q(E_k) \approx -2\pi \left[M_1 \left(k_1 + \frac{1}{2} \right) + M_2 \left(k_2 + \frac{1}{2} \right) \right] \hbar, \quad (13)$$

两相位相差是 $2\pi [M_1(k_1 - n_1) + M_2(k_2 - n_2)] \hbar$. 取 $\hbar = 1$, 注意到 $M_1, M_2, k_1, k_2, n_1, n_2$ 都是整数, 这两条能级对回归函数贡献的相位差近似为 $2j\pi (j \in Z)$. 前面提到过, 对于某一拓扑数 $M(M_1, M_2)$, 总能找到数条能级与之关联. 这些能级对回归函数的贡献相干, 使得在回归谱上出现一个峰.

另一方面, 周期轨道作用量 $S_M(E)$ 与系统能量之间的关系是

$$S_M(E) = E^{\frac{\nu+2}{2\nu}} \frac{M_1(n_1 + 1/2)\hbar + M_2(n_2 + 1/2)\hbar}{E_n^{\frac{\nu+2}{2\nu}}},$$

能级的表达式是

$$E_n = f \cdot \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{\nu+2}} \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2\nu}{\nu+2}} + (ab)^{\frac{2}{\nu+2}} \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2\nu}{\nu+2}} \right],$$

其中

$$f = \left(\frac{\hbar^2}{2}\right)^{\frac{\nu}{\nu+2}} \left[\frac{\sqrt{\pi} \nu \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \right]^{\frac{2\nu}{\nu+2}}$$

将(15)式代入上式得

$$S_M(E) = E^{\frac{\nu+2}{2\nu}} \frac{M_1 \frac{n_1 + 1/2}{n_2 + 1/2} h + M_2 h}{\left(f \cdot \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{\nu+2}} \left(\frac{n_1 + 1/2}{n_2 + 1/2} \right)^{\frac{2\nu}{\nu+2}} + (ab)^{\frac{2}{\nu+2}} \right] \right)^{\frac{\nu+2}{2\nu}}}, \quad (16)$$

再将(7)式代入得

$$S_M(E) = E^{\frac{\nu+2}{2\nu}} \frac{M_1 M_2^{\frac{2+\nu}{2-\nu}} b^{\frac{4}{\nu-2}} h + M_2 M_1^{\frac{2+\nu}{2-\nu}} h}{\left(f \cdot \left[a^{\frac{2}{\nu+2}} b^{\frac{4}{\nu-2}} M_2^{\frac{2\nu}{2-\nu}} + (ab)^{\frac{2}{\nu+2}} M_1^{\frac{2\nu}{2-\nu}} \right] \right)^{\frac{\nu+2}{2\nu}}}. \quad (17)$$

上式表明周期轨道作用量与拓扑数 $M(M_1, M_2)$ 所对应的量子能级无关,这与经典结果一致.

以二维无关联 4 次振子为例,来验证我们对能级间长程关联的理论解释. 对于二维无关联 4 次振子($\nu = 4$), (1), (10), (6)式分别变为:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + a \frac{q_1^4}{b} + abq_2^4, \quad (18)$$

$$R(S, E) = -\frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{3/8} E^{-11/6} e^{-iS \left(\frac{E_n}{E} \right)^{3/4}} \quad (19)$$

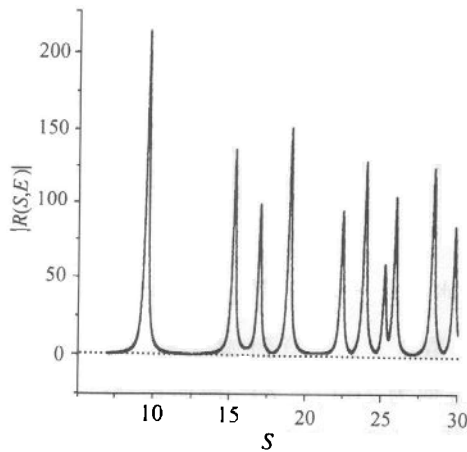


图 1 二维无关联 4 次振子系统的回归谱

$$\left(\frac{E^1}{E^2} \right)^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}} = \frac{M_2}{M_1}. \quad (20)$$

图 1 是在 $E = 1$ 的条件下,使用(19)式,经过数值计算给出的二维无关联 4 次振子系统的回归谱.

在(17)式中,取系统能量 $E = 1$ 和 $\nu = 4$ 时,计算了当 $M(M_1, M_2)$ 取不同值时周期轨道的作用量值,并将之与回归谱中的那些峰(如图 1 所示)对应的轨道作用量相比较. 从表 1 中可以看出,对于二维无关联 4 次振子系统,(17)式给出的作用量的值与回归谱中的峰对应的轨道作用量的值符合得较好,这说明我们对长程关联的解释是正确的.

表 1 周期轨道作用量和回归谱中峰对应的作用量

(M_1, M_2)	周期轨道作用量	回归谱中的峰对应的轨道作用量	(M_1, M_2)	周期轨道作用量	回归谱中的峰对应的轨道作用量
(1, 1)	9.44582	9.44320	(2, 3)	25.89588	25.85215
(1, 2)	16.93980	16.90504	(3, 1)	22.31918	22.37263
(1, 3)	25.22181	25.16926	(3, 2)	23.83804	23.86204
(2, 1)	15.17261	15.20476	(3, 3)	28.33747	28.32967
(2, 2)	18.89164	18.88633			

5 结论

简要讨论了二维无关联振子量子化条件,进一步研究了二维无关联 ν 次振子周期轨道与能级之间的对应关系,并用这种对应关系解释了二维无关联 4 次振子和二维谐振子量子能谱中的长程关联.研究表明,那些对应于具有相同拓扑的周期轨道的量子能级间存在着长程关联,正是这些能级对回归函数的贡献相干,使得回归谱在周期轨道作用量处出现峰.为了验证我们对能级间长程关联解释的合理性,我们从周期轨道作用量与系统能级之间的关系出发,从与某一条周期轨道相对应的量子能级导出周期轨道作用量,并与回归谱中的峰对应的作用量进行比较.它们之间较好的符合证明了我们的解释是合理的.对二维无关联 4 次振子回归谱的成功解释也验证了这一点.

参考文献 (References)

- 1 Berry M V, Tabor M. Proc. R. Soc., Lond., 1976, **A349**:101; J. Phys., 1977, **A10**:371
- 2 Main J. Phys. Rep., 1999, **316**:233
- 3 Main J, Wunner G. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**:3038
- 4 Haggerty M R et al. Phys. Rev. Lett., 1998, **81**:1592
- 5 Gutzwiller M C J. Math. Phys., 1971, **12**:343—358
- 6 Ullmo D, Maurice G, Steven T. Phys. Rev., 1996, **E54**:136—152
- 7 SONG Jian-Jun, LI Xi-Guo. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2001, **25**(10):958 (in Chinese)
(宋建军,李希国.高能物理与核物理,2001,**25**(10):958)
- 8 SONG Jian-Jun, Quantization Way in a Two-Dimensional Integrable System and the Long-Range Correlation Among the Quantum Levels. Master Dissertation, Institute of Modern Physics, CAS, 2001 (in Chinese)
(宋建军.二维可积系统量子化方案和量子能级中的长程关联.硕士论文,中国科学院近代物理研究所,2001)
- 9 SONG Jian-Jun, LI Xi-Guo. Acta Physica Sinica, 2001, **50**(10):1661 (in Chinese)
(宋建军,李希国.物理学报,2001,**50**(10):1661)
- 10 Friedrich H, Wintgen D. Phys. Rep., 1989, **183**:37
- 11 Keller J B. Ann. Phys., 1958, **4**:180—188
- 12 Wintgen D. Phys. Rev. Lett., 1987, **58**:1589
- 13 Bohigas O, Tomsovic S, Ullmo D. Phys. Rep., 1993, **223**:43

Quantization of the Periodic Orbits and Long-Range Correlations in Quantum Spectra *

LI Xi-Guo^{1,2} SONG Jian-Jun² XING Yong-Zhong² ZUO Wei^{1,2}

¹(Research Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Collisions, Lanzhou 730000, China)

²(Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

Abstract Using the classical quantization way in a two-dimensional integrable system and quantized energies-periodic orbits correspondence relationship, the long-range correlation among the quantum levels has been discussed in detail. Making use of Berry-Tabor trace formula, the quantization conditions of the action of the periodic orbits in two dimensional integrable systems have been obtained. Furthermore, considering the periodicity conditions for the periodic orbits on reasonable torus, the correspondence relations between quantum levels and classical periodic orbits in the two dimensional uncoupled oscillators have been established. It is also shown that there exist the long-range correlations among these quantum levels which correspond to the group of the classical periodic orbits with same topology $M (M_1, M_2)$. To concert state the new points, an example has been given.

Key words trace formula, recurrence spectra, long-range correlation

Received 11 June 2001

* Supported by Sciences Foundation of Chinese Education Commission, The CAS Knowledge Innovation Project (KJCX2-SW-N02), 100 Talent Programme of CAS and Major State Basic Research Development Program(G200077400)