第26卷 第4期
2002年4月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.26, No.4
Apr.,2002

轴对称静电场中粒子非线性轨道的 Lie 代数分析

吕 建 钦
(北京大学重离子物理研究所 北京 100871)

摘要 用Lie代数方法分析了相对论脉冲束在轴对称静电场中的非线性传输，得到粒子在六维相空间(x,x',y,y',τ,p_τ)中的三级近似轨迹．在分析中，以静电加速管为例，把静电加速管分成三个单元，即入口膜片透镜－匀加速场－出口膜片透镜，对每个单元施加Lie变换，从而得到轨迹的各级近似．此方法可以推广到一般的轴对称静电场．

关键词 轴对称静电场 Lie映射 三级近似

1 引言

静电透镜与静电加速管常用作带电粒子的聚焦与加速，粒子运动的一级近似轨迹一般可用传输矩阵表示，并为大家所熟悉[1,2]．粒子在这类元件中的二级和三级轨迹早已有人做过研究，但都是在横向平面中进行的，很少有人把粒子的纵向运动包含在内．当考虑脉冲束在轴对称静电场中运动的高级近似时，以往的研究结果就显得有不足之处．本工作的目的就是用Lie代数方法在六维相空间中研究粒子运动的三级近似轨迹．

Lie代数方法本质上是将带电粒子的运动看成是六维相空间中的连续无限小正则变换．从群论的角度上讲，这种变换是一种单参数Lie群，与此Lie群相对应的是Poisson括号Lie代数．这种连续无限小正则变换可用一指数映射，即Lie映射表示．Lie映射又可以展开成Lie算符的幂级数，由此可得到映射的各级近似．

2 Hamilton 函数和 Lie 变换

根据经典力学原理[3]，当带电粒子在轴对称静电场中沿 z 方向运动时，在直角坐标系中以时间 t 为独立变量的 Hamilton 函数为

$$H_t = [m_0^2c^4 + (p_x - qA_x)^2c^2 + (p_y - qA_y)^2c^2 + (p_z - qA_z)^2c^2]^{\frac{1}{2}} + q\psi \tag{1}$$

2001-05-29 收稿

其中 m_0 为粒子的静质量,q 为电荷,p_x,p_y 和 p_z 分别为粒子动量的 x,y 和 z 分量,ψ 为静电势. 由于场的对称性,ψ 可以表示为

$$\psi = \phi(z) - \frac{1}{2}\phi''(z)(x^2 + y^2) + \frac{1}{64}\phi^{(4)}(z)(x^4 + x^2y^2 + y^4) - \frac{1}{2304}\phi^{(6)}(z)(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6) + \cdots, \tag{2}$$

其中 $\phi(z)$ 为轴上电位分布. 与 H_t 相应的正则变量为 (x,p_x,y,p_y,z,p_z).

现在引入函数 p_t:

$$p_t = -H_t(x,p_x,y,p_y,z,p_z) \tag{3}$$

从式(3)中解出 p_z 得

$$p_z = -K(t,x,p_x,y,p_y,z,p_z) \tag{4}$$

其中

$$K = -p_z = -[(p_t + q\psi)^2/c^2 - p_x^2 - p_y^2 - m_0^2c^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

式(5)就是以 (x,p_x,y,p_y,t,p_t) 为正则变量,且以 z 为独立变量的 Hamilton 函数. 令

$$\begin{aligned} &x = x,\quad p_x = p_x,\quad y = y,\quad p_y = p_y,\\ &\tau = t - z/v_s,\quad p_\tau = p_t - p_t^0, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 v_s 为参考粒子的速度,p_t^0 是参考粒子的 p_t 的值. 从式(6)可以看出,在相空间 $\zeta = (x,p_x,y,,p_y,\tau,p_\tau)$ 中,参考粒子的坐标总是为零,所以有

$$p_\tau^0 = -H_t|_{\text{referencr orbit}} = -(m_0^2c^4 + p_s^2c^2)^{\frac{1}{2}} - q\phi = -m_0\gamma_sc^2 - q\phi, \tag{7}$$

其中 p_s 为参考粒子的动量,$\gamma_s = [1 - (v_s/c)^2]^{-1/2}$.

在式(6)所表示的正则变换下,新的 Hamilton 函数为

$$H = -[(p_\tau + q(\psi - \phi) - m_0\gamma_sc^2)^2/c^2 - p_x^2 - p_y^2 - (m_0c)^2]^{\frac{1}{2}} - (p_\tau - q\phi)/v_s + m_0\gamma_sc^2/v_s. \tag{8}$$

将函数 H 在参考轨道附近展开成幂级数得

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n, \tag{9}$$

其中 H_n 为 n 次齐次多项式. 级数的前四项为

$$H_0 = p_s\left(\beta_s^{-2}\gamma_s^{-2} - \frac{1}{2}\right),$$

$$H_1 = 0,$$

$$H_2 = -(x^2 + y^2)\frac{q\phi''}{4v_s} + (p_x^2 + p_y^2)\frac{1}{2p_s} + p_\tau^2\frac{1}{2\gamma_s^2v_s^2p_s},$$

$$H_3 = -(x^2 + y^2)p_\tau\frac{q\phi''}{4\gamma_s^2v_s^2p_s} + (p_x^2 + p_y^2)p_\tau\frac{1}{2v_sp_s^2} + p_\tau^3\frac{1}{2\gamma_s^2v_s^3p_s^2},$$

$$H_4 = \frac{(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)}{32}\left[\frac{(q\phi'')^2}{\gamma_s^2v_s^2p_s} + \frac{q\phi^{(4)}}{2v_s}\right] - (x^2 + y^2)(p_x^2 + p_y^2)\frac{q\phi''}{8v_sp_s^2} -$$

$$(x^2+y^2)P_\tau^2\frac{3q\phi''}{8c^2\beta_s^2\gamma^2 v_s p_s^2}+(p_x^4+2p_x^2p_y^2+p_y^4)\frac{1}{8p_s^3}+(p_x^2+p_y^2)p_\tau^2\frac{1}{4c^2p_s^3}\left(\frac{3}{\beta_0^2}-1\right)+$$

$$p_\tau^4\frac{1}{8c^2\gamma_s^2v_s^2p_s^3}\left(\frac{5}{\beta_0^2}-1\right)\cdots\cdots$$

与函数 H 相关的 Lie 变换为[4,5]

$$M=\exp\left[-:\int_{z_0}^{z_f}H\mathrm{d}z:\right]=\cdots M_4M_3M_2, \tag{11}$$

其中

$$M_2=\exp(:f_2:),\ M_3=\exp(:f_3:),\ M_4=\exp(:f_4:),\ \cdots$$

而且

$$f_2=-\int_{z_0}^{z_f}H_2\mathrm{d}z,\quad f_3=-\int_{z_0}^{z_f}h_3^{\mathrm{int}}\mathrm{d}z,$$

$$f_4=-\int_{z_0}^{z_f}h_4^{\mathrm{int}}\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z_f}\mathrm{d}z_1\int_{z_0}^{z_1}\mathrm{d}z_2[-h_3^{\mathrm{int}}(z_2),-h_3^{\mathrm{int}}(z_1)]\cdots\cdots$$

这里

$$h_n^{\mathrm{int}}(z)=M_2H_n. \tag{14}$$

将 M 作用于正则变量 ζ,并令上标“(i)”表示近似的级,则有

$$\zeta_f^{(1)}=\exp(:f_2:)\zeta,\qquad \text{一级近似}$$

$$\zeta_f^{(2)}=:f_3:\zeta^{(1)},\qquad \text{二级近似}$$

$$\zeta_f^{(3)}=:f_4:\zeta^{(1)}+\frac{1}{2}:f_3:^2\zeta^{(1)},\qquad \text{三级近似}\cdots\cdots.$$

3 应用于静电加速管

现在,我们把以上运算过程应用于静电加速管的计算. 正如在引言中所提到的,在计算中,我们把加速管分成3个元件:入口膜片透镜,均匀场加速区和出口膜片透镜. 下面将分别进行讨论.

3.1 一级映射

令

$$H_{2x}=x^2\frac{qV''}{4v_s}+p_x^2\frac{1}{2p_s},\ H_{2y}=y^2\frac{qV''}{4v_s}+p_y^2\frac{1}{2p_s},\ H_{2\tau}=p_\tau^2\frac{1}{2c^2\beta_s^2\gamma_s^2p_s}$$

其中,利用了 $V=-\phi$, V 为粒子的能量规范化电位,ϕ 为一般定义下的电位.

1) 均匀加速场单元

为了使计算更加精确,将长为 L 的加速场区分成 n 个小区间$[z_{i-1},z_i]$, $i=1,2,\cdots n$, 令区间长为 $L_i=z_i-z_{i-1}$,且令下标“$i-1$”表示在第 i 个区间开始初的量,“i”表示在此区间末端的量. 在此区间内,把电场看作是近似均匀的,即 $\phi''\approx 0$. 根据式(15),(13)和(16)可得

$$x_i^{(1)} = x_{i-1} + x'_{i-1}\frac{2L_i}{\eta_i+1}, \quad x'_{i-1} = x'_{i-1}\frac{1}{\eta_i}, \tag{17}$$

其中 $\eta_i^2 = V_i/V_{i-1}$，V_i 和 V_{i-1} 分别为粒子在点 z_i 和 z_{i-1} 处的能量规范化电势. 同样可得

$$y_i^{(1)} = y_{i-1} + y'_{i-1}\frac{2L_i}{\eta_i+1}, \quad y'_{i-1} = y'_{i-1}\frac{1}{\eta_i}, \tag{18}$$

$$\tau_i^{(1)} = \tau_{i-1} + p_{\tau i-1}\frac{1}{\overline{\gamma}_{si}^2 v_{si-1} w_{si-1}}\frac{2L_i}{\eta_i(\eta_i+1)}, p_{\tau i}^{(1)} = p_{\tau i-1}, \tag{19}$$

式(19)中的第二个等式表示,在匀加速场区中任意粒子与参考粒子之间的能量差不变. 将式(17)—(19)联立,就得到我们所熟悉的一级传输矩阵

$$\begin{bmatrix} x_i \\ x'_i \\ y_i \\ y'_i \\ \tau \\ p_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2L_i}{\eta_i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2L_i}{\eta_i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\overline{\gamma}_{si}^2 v_{si-1} p_{si-1}}\frac{2L_i}{\eta_i(\eta_i+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x'_{i-1} \\ y_{i-1} \\ y'_{i-1} \\ \\ p_\tau \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 $\overline{\gamma}_{si}^2$ 为区间内 γ_{si}^2 的平均值.

2）入口膜片

对于入口膜片,其左边(0^-)的电场为零,其右边(0^+)的电场为 $E=(V_2-V_1)/L$,这里 V_1 和 V_2 分别是参考粒子在加速管入口膜片和出口膜片的能量规范化电位. 根据式(15)中的第一个变换式得

$$x_{0^+}^{(1)} = r_{0^-}, \; p_{x0^+}^{(1)} = p_{x0^-} - \frac{x_{0^-}q}{2v_{c_1}}(V'_{0^+} - V'_{0^-}), \tag{21}$$

其中 v_{c_1} 是参考粒子在入口膜片中心处的速度,并且 $V'_{0^+}=(V_2-V_1)/L$, $V'_{0^-}=0$. 根据电子光学的知识可知,参考粒子在膜片中心处的能量规范化电位为

$$V_{c_1} = V_1 + \frac{R}{\pi}\frac{V_2-V_1}{L} = V_1\xi_1, \tag{22}$$

其中

$$\xi_1 = 1 + \frac{R}{\pi L}(\eta^2-1), \; \eta^2 = V_2/V_1, \tag{23}$$

R 是膜片的孔半径. 根据式(22)有

$$V_{c_1} = \left(\frac{2qV_{c_1}}{m_0\gamma_s}\right)^{\frac{1}{2}} = V_1\xi_1^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

将式(24)代入(21)得

$$p_{x0^+}^{(1)} = p_{x0^-} - x_{0^-}\frac{p_1}{\xi_1^{\frac{1}{2}}}\frac{\eta^2-1}{4L}, \tag{25}$$

这里 $p_1=(2m_0\gamma_3 qV_1)^{1/2}$. 将式(25)两边除以 p_{c1}(参考粒子在入口膜片处的动量),可得

$$x'_{0^+} = x'_{0^-} - x_{0^-}\frac{\eta^2-1}{4L\xi_1}. \tag{26}$$

在式(26)中,利用了关系式 $p_{c1}=p_1\xi_1^{\frac{1}{2}}$. 在 y 方向类似地有

$$y_{0^+}^{(1)} = y_{0^-},\ y'_{0^+} = y'_{0^-} - y_{0^-}\frac{\eta^2-1}{4L\xi_1},$$

同样,根据式(15)中的第一个变换式,还可以得到纵向运动的一级表示

$$\tau_{0^+}^{(1)} = \tau_{0^-},\ P_{\tau0^+}^{(1)} = P_{\tau0^-}. \tag{28}$$

将式(23)和式(25)—(28)写成矩阵形式即为

$$\begin{bmatrix} x_{0^+} \\ x'_{0^+} \\ y_{0^+} \\ y'_{0^+} \\ \tau_{0^+} \\ p_{\tau0^+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\eta^2-1}{4L\xi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\eta^2-1}{4L\xi_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0^-} \\ x'_{0^-} \\ y_{0^-} \\ y'_{0^-} \\ \tau_{0^-} \\ p_{\tau0^-} \end{bmatrix},$$

这就是入口膜片的传输矩阵. 显然,它表示在横向聚焦.

3) 出口膜片

对于出口膜片的分析方法类似,这里只列出其结果:

$$\begin{bmatrix} x_{0^+} \\ x'_{0^+} \\ y_{0^+} \\ y'_{0^+} \\ \tau_{0^+} \\ p_{\tau0^+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta^2-1}{4L\eta^2\xi_2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta^2-1}{4L\eta^2\xi_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0^-} \\ x'_{0^-} \\ y_{0^-} \\ y'_{0^-} \\ \tau_{0^-} \\ p_{\tau0^-} \end{bmatrix},$$

其中

$$\xi_2 = 1 - \frac{R}{\pi L}\left(1-\frac{1}{\eta^2}\right),$$

而且 R 是出口膜片孔半径.

3.2 二级映射

1) 均匀加速场单元

首先,需要计算均匀加速场单元的函数 h_3^{int}. 根据式(14)得

$$h_3^{\text{int}} = (p_{xi-1}^2 + p_{yi-1}^2) p_{\tau i-1} \frac{1}{2v_s p_s^2} + p_{\tau i-1}^3 \frac{1}{2\gamma_s^2 v_s^3 p_s^2}, \tag{32}$$

从而可以算得

$$f_3 = -(p_{xi-1}^2 \quad p_{xi-1}^2) p_{\tau i-1} \frac{L_i}{v_{si-1} p_{si-1}^2 \eta_i(\eta_i + 1)} - p_{\tau i-1}^3 \frac{L_i(\eta_i^3 - 1)}{3\overline{\gamma}_{si}^2 v_{si-1}^3 p_{si-1}^2 \eta_i^3(\eta_i^2 - 1)}$$

由函数 f_3,利用式(15)中的第二个变换式可容易算出粒子轨迹的二级项:

$$x_i^{(2)} = -x'_{i-1}\Delta E_{i-1} \frac{2L_i}{m_0 c^2 \beta_{si-1}^2 \gamma_{si-1} \eta_i(\eta_i + 1)}, \qquad x_i'^{(2)} = 0,$$

$$y_i^{(2)} = -y'_{i-1}\Delta E_{i-1} \frac{2L_i}{m_0 c^2 \beta_{si-1}^2 \gamma_{si-1} \eta_i(\eta_i + 1)}, \qquad y_i'^{(2)} = 0,$$

$$\tau_i^{(2)} = (x'^2_{i-1} + y'^2_{i-1}) \frac{L_i}{\beta_{si-1} c \eta_i(\eta_i + 1)} + p_{\tau i-1}^2 \frac{L_i(\eta_i^3 - 1)}{m_0^2 c^4 \beta_{si-1}^5 \overline{\gamma}_{si}^2 \gamma_{si-1}^2 \eta_i^3(\eta_i^2 - 1)}, \quad p_{\tau i}^{(2)} = 0.$$

2) 入口膜片

将式(10)中的 H_3 代入式(14),可得 h_3^{int};再将 h_3^{int} 代入式(13),可得 f_3;将 f_3 代入式(15). 在这一系列计算中,利用膜片透镜的性质,可得入口膜片透镜的二级近似结果:

$$x_{0^+}^{(2)} = 0, \qquad x_{0^+}'^{(2)} = -x_{0^-} p_{\tau 0^-} \frac{\eta^2 - 1}{4\gamma_s^2 v_1 p_1 \xi_1^2 L}$$

$$y_{0^+}^{(2)} = 0, \qquad y_{0^+}'^{(2)} = -y_{0^-} p_{\tau 0^-} \frac{\eta^2 - 1}{4\gamma_s^2 v_1 p_1 \xi_1^2 L}$$

$$\tau_{0^+}^{(2)} = (x_{0^-}^2 + y_{0^-}^2) \frac{\eta^2 - 1}{8\gamma_s^2 v_1 L \xi_1^{\frac{3}{2}}}, \quad p_{\tau 0^+}^{(2)} = 0.$$

3) 出口膜片

类似地可以计算出口膜片处粒子轨迹的二级近似项,结果为

$$x_{0^+}^{(2)} = 0, \qquad x_{0^+}'^{(2)} = x_{0^-} p_{\tau 0^+} \frac{\eta^2 - 1}{4\gamma_s^2 v_2 p_2 \xi_2^2 L\eta^2}$$

$$y_{0^+}^{(2)} = 0, \qquad y_{0^+}'^{(2)} = y_{0^-} p_{\tau 0^+} \frac{\eta^2 - 1}{4\gamma_s^2 v_2 p_2 \xi_2^2 L\eta^2}$$

$$\tau_{0^+}^{(2)} = -(x_{0^-}^2 + y_{0^-}^2) \frac{\eta^2 - 1}{8\gamma_s^2 v_2 \xi_2^{\frac{3}{2}} L\eta^2}, \quad p_{\tau 0^+}^{(2)} = 0.$$

3.3 三级映射

类似地,根据式(15)中的第三式,我们还可以得到入口膜片、加速场区和出口膜片的三级近似项. 限于篇幅,这里不在一一列出.

4 讨论

本文用 Lie 代数方法导出了六维相空间($x, x', y, y', \tau, p_\tau$)中相对论粒子在六极透镜

中的三级轨迹. 其横向分量(x,x',y,y')与通常束流光学中所采用的横向分量的意义相同. 但需要对纵向分量(τ,p_τ)的意义作一些说明. 根据式(6)中对 τ 和p_τ 的定义

$$\tau = t - z/v_s, \quad p_\tau = p_t - p_t^0,$$

将 τ 乘以 ω 得

$$\tau\omega = \omega t - \omega z/v_s = \Delta\phi ,$$

这就是任意粒子与参考粒子之间的相位差. 由 p_τ 的定义和式(3)还可以看出,

$$p_\tau = p_t - p_t^0 = -\Delta E ,$$

ΔE 就是任意粒子与参考粒子之间的能量差.

关于静电透镜的计算与以上过程类似,只需把静电透镜的有效作用场区分成若干小段. 然后把每个小区间近似地看作匀加速场,把每个分点看作薄透镜,分别施加 Lie 变换,即可得到各区间和各分点的三级近似轨迹.

参考文献(References)

1 Septier A. Focusing of Charged Particles. New York: Academic Press, 1967. Vol. II, 297

2 LU Jian-Qin. LEADS: A Graphical Display Computer Program for Linear and Electrostatic Accelerator Beam Dynamics Simulation, Nucl. Instrum. & Methods Sec., 1995, **A 355**: 253—257

3 Goldstein H. Classical Mechanics 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980

4 Dragt A J. AIP Conf. Proc., 1982, **87**:147

5 Dragt A J, Finn J M. J. Math. Phys., 1979, **20**:2649

Nonlinear Optics of the Electrostatic Accelerator Tubes-Third Order Lie Map

LÜ Jian-Qin

(Institute of Heavy Ion Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract Lie algebraic method is used in the analysis of nonlinear transport for the relativistic charged particles in cylindrical symmetrical electrostatic fields, and particle orbits of third order approximation in the six dimensional phase space (x, x', y, y', τ, p_τ) are obtained. In the analysis, we take the electrostatic accelerating tube as an example, and divide the electrostatic accelerating tube into three elements: entrance thin lens, uniform accelerating field and exit thin lens, on which Lie map is applied, and the solutions through third order of particle orbits are obtained finally. This method can also be used for the electrostatic lenses.

Key words cylindrical symmetrical electrostatic field, Lie map, third order approximation

Received 29 May 2001