

周期轨道与求迹公式 – 可积系统*

宋建军¹ 李希国^{1,2} 刘芳³ 李树伟¹

1(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

2(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心 兰州 730000)

3(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 选择二维无关联四次振子系统作为理论模型来验证 Berry-Tabor 公式的有效性. 在有理环面上积分 Hamiltonian 运动方程得到一系列的周期轨道, 细致构造有理环面附近的轨道得到能量面上的曲率, 并应用 Berry-Tabor 求迹公式经过 Fourier 变换得到的作用量函数, 在作用量 $S < 30$ 的区间上, 与得到的相应量子作用量函数进行了比较, 其结果的一致性验证了求迹公式的有效性. 最后, 对量子作用量函数 $R^{QM}(S, E) - S$ 图上经典周期轨道作用量处出现的 δ 峰进行了讨论.

关键词 可积系统 周期轨道 求迹公式 态密度

1 引言

60 年代末, M. C. Gutzwiller^[1] 从 Schrodinger 方程出发, 运用 Fynman 路径积分和稳相近似 (stationary phase approximation), 给出 Green 函数的半经典表达式, 然后对 Green 函数求迹, 再一次运用稳相近似, 得到了著名的 Gutzwiller 求迹公式. 其虚部即为态密度, 能量轴上的奇点给出分立的能级, 近似 Green 函数的留数给出系统的波函数. 他将他的理论用于氢原子系统, 所得结果与量子结果符合得较好. 但是, Gutzwiller 在推导求迹公式时作了周期轨道是分立的假定. 几年后, Berry 和 Tabor^[2] 发现这一假定限制了 Gutzwiller 公式的适用范围. 对于混沌系统, 周期轨道是孤立的, Gutzwiller 公式有效, 而对于可积系统, 由于每个有理环面上一簇拓扑等价的周期轨道是连续的, Gutzwiller 公式不成立. 他们运用作用量-角变量坐标, 导出了新的求迹公式即 Berry-Tabor 公式. Berry-Tabor 公式适用于可积系统, 实质上等价于 EBK (Einstein-Brillouin-Keller) 量子化条件. 后来, Berry^[3] 等用它来分析量子能谱. A. M. Ozorio de Almeida^[4] 等于 80 年代末给出了用于处理混杂系统这一物理学中最常见系统的理论形式. 前不久, 在他们工作的基础上, Denis Ullmo^[5] 等给出了近可积系统的求迹公式.

2000-08-16 收稿

* 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心基金, 中国科学院近代物理研究所所长基金, 中国科学院“百人计划”基金和国家重点基础研究发展规划(G2000077400)资助

近年来,这一领域的工作主要集中在解决各种动力学系统求迹公式的发散问题上.最近, Jorg Main^[6]等发展的谐波反演技术(Harmonic inversion technique)为研究各种动力学系统提供了一种高分辨度的普适方法.详细内容参考文献[7].

虽然利用上述方法可以从经典动力学出发得到量子系统半经典的态密度,但是经典系统与量子系统间更直接的对应是许多物理学家长期关注的问题.本文从经典动力学出发,计算了系统的周期轨道和其他经典量,给出求迹公式 Fourier 变换得到的半经典作用量函数在某一区间上的值,与量子态密度 Fourier 变换后得到的量子作用量函数值进行比较,验证了 Berry-Tabor 公式的有效性,并对量子经典结果进行了分析.

2 齐次势系统的量子作用量函数

在 Gutzwiller 工作的基础上, Berry^[8]等运用作用量 - 角变量坐标,导出了可积系统的 Berry - Tabor 公式

$$\rho_M^{\text{SC}}(E) = \frac{T_M}{\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g'_E|^{1/2}} \cos\left(\frac{S_M}{\hbar} - \frac{\eta_M \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (1)$$

它给出了有理环面 $M(M_1, M_2)$ 上的一条周期轨道对半经典态密度的贡献 ρ_M^{SC} , 其中 T_M , S_M , η_M 分别是这条周期轨道的周期, 作用量, Maslov 指数. 拓扑指数 (M_1, M_2) 表示系统沿周期轨道运动一周, 系统在每一个不等价拓扑圆上分别运动了 M_1, M_2 周. g'_E 是能量面上的曲率.

对于具有齐次势的可积系统, 由于标度不变性^[9], 能量取不同值时, 环面 $M(M_1, M_2)$ 上周期轨道的拓扑性质不变, 因而 Maslov 指数 η_M 不变. 而 S_M, T_M 是能量 E 的函数, 随着能量连续变化而连续变化. 当能量取某些值 E_k 时, 所有周期轨道对态密度的贡献 $\rho^{\text{SC}}(E) = \sum_M \rho_M^{\text{SC}}(E)$ 就会无穷大, 这些能量轴上的奇点 E_k 即为对应量子系统的能级.

为了直观地确定每条周期轨道对态密度的贡献, Denis Ullmo^[5] 将 \hbar^{-1} 和 S 看成一对 Fourier 变换量, 对态密度函数进行 Fourier 变换, 将其变换到作用量表象中. 他在变换中加入一个指数衰减因子 $e^{-\beta}$ (β 为正实数), 将变换谱由无限高降为有限高, 加入一个 $t^{-1/2}$ 因子使作用量函数的形式更紧凑. 即

$$R^{\text{SC}}(S, E) = \int_0^\infty dt t^{-1/2} e^{-(\beta - iS)t} \rho^{\text{SC}}(t, E).$$

将 $\rho^{\text{SC}}(t, E)$ 和(1)式代入, 得到半经典作用量函数

$$R^{\text{SC}}(S, E) = \sum_M \frac{T_M \exp(i\eta_M \pi/2 + i\pi/4)}{2\pi |M_2^3 g'_E|^{1/2} [\beta - i(S - S_M)]^2}.$$

对于量子态密度

$$\rho^{\text{QM}}(E, \hbar) = \sum_0^\infty \delta[E - E_n(\hbar)]. \quad (4)$$

如果系统具有齐次势 $V(aq) = a^\nu V(q)$, 则 $E_n \propto \hbar^{2\nu/(\nu+2)}$ ^[10], 经过简单运算, 可以给出

一个一般形式的量子作用量函数. 令 $t = \frac{1}{\hbar}$, 可得到 $E_n(t) = E_n(\hbar = 1) t^{-2\nu/(2\nu+2)}$, 同样加入指数衰减因子 $e^{-\beta}$ 和 $t^{-1/2}$ 因子, 经过 Fourier 变换, 得到系统的量子作用量函数

$$R^{QM}(S, E) = -\frac{\nu+2}{2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\nu+2)/4\nu} E^{-(5\nu+2)/(2\nu+4)} e^{-(\beta+iS)\left(\frac{E_n}{E}\right)^{(\nu+2)/2\nu}}. \quad (5)$$

3 理论模型的数值计算

我们选取二维无关联四次振子来验证求迹公式的有效性. 这一系统的 Hamiltonian 为

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + a\left(\frac{q_1^4}{b} + bq_2^4\right), \quad (6)$$

它是一可积系统. 系统的对称性与 b 的选取有关, 选 $b = \frac{\pi}{4}$, 系统具有对称性 C_2 . a 是为了便于计算而选取的常数, 它不影响系统的动力学性质. 图 1 给出了系统的 Poincare 截面, 它在整个相空间都是规则的.

周期轨道的计算分两步进行, 先确定有理环面, 然后再在有理环面上计算周期轨道. 对于二维可分离变量的系统, 可以用环面拓扑 (M_1, M_2) 来定义不同的有理环面, 即不同的有理环面的环面拓扑 (M_1, M_2) 是不同的. 对于二维无关联四次振子, 有理环面 $M(M_1, M_2)$ 上运动的四次振子每一维上的能量分量满足^[5]

$$E_1 = \frac{M_1^4}{M_1^4 + b^{-2}M_2^4} E, \quad E_2 = \frac{M_2^4}{M_2^4 + b^2M_1^4} E. \quad (7)$$

在每一维上的能量分量满足上式前提下(由于系统具有标度不变性, 不妨取系统总能量 $E = 1$), 积分 Hamiltonian 运动方程, 运用系统的对称性, 即可求得环面 $M(M_1, M_2)$ 上的周期轨道, 图 2 给出了拓扑为 $(1, 2)$ 的有理环面上的一条周期轨道.

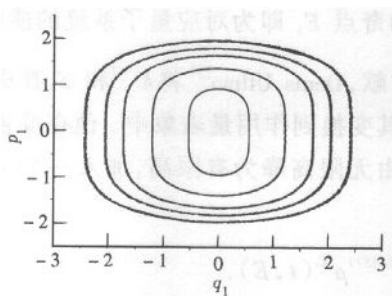


图 1 二维无关联四次振子系统的 Poincare 截面

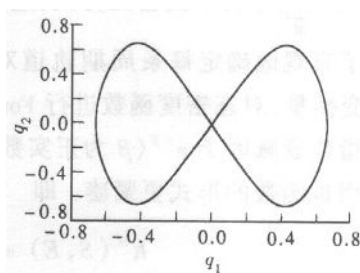


图 2 二维无关联四次振子系统有理环面 $(1, 2)$ 上的周期轨道

在计算周期轨道的过程中, S_M 和 T_M 皆可算出, η_M 也可用文献[5]的方法算出, g_E^M 的计算却须细致地构造有理环面附近的轨道. 具体方法是让(7)式给出的每一维上的能量值分别有一个微小的改变 $\delta E_1, \delta E_2$, 但保持总能量 $E = E_1 + E_2$ 不变, 积分 Hamiltonian 运动方程, 即可得到有理环面附近的轨道, 每一维上的作用量 I_1 和 I_2 也可给出, 求二次导

数 $d^2 I_2 / dI_1^2$ 即可得到能量面上的曲率 g_E' . 将这些经典量代入(3)式,变动 S ,得到了一系列的半经典作用量函数 R^{SC} 值. 图 3(a)给出了 $S \leq 30$ 的 $R^{SC} - S$ 图. 可以看出,在每条周期轨道对应的 S 处,都会有一个 δ 状的峰,说明每一条周期轨道对态密度都有贡献. 图 3(b)给出了相应区间上的量子作用量函数 $R^{QM} - S$ 图^[5].

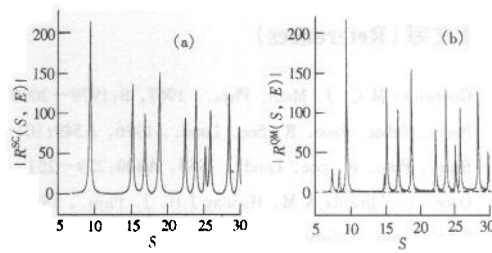


图3 (a)半经典作用量函数的绝对值;(b)量子作用量函数的绝对值
横轴为作用量.

比较这两个图发现,除了图 3(b)上的第一、二两个峰在图 3(a)中没有对应外,其余峰的位置及高度在两图中大致相同,尤其是在 S 较小的区域. 两个图较好地符合,证明了求迹公式的有效性. 更进一步的计算表明,拓扑为 $(0,1), (1,0)$ 的中心轨道的作用量与图 3(b)上的前两个小峰对应的作用量大致相等,因而可以认为,量子作用量 $R^{QM} - S$ 图上的前两个小峰分别对应拓扑为 $(0,1), (1,0)$ 的经典中心轨道的贡献,只是因为本文所使用的半经典方法不能计算这类轨道,使得在半经典 $R^{SC} - S$ 图上看不到这类轨道的贡献. 对于四次振子系统, (5)式中 $\nu = 4$, Denis Ullmo 不妨取经典能量 $E = 1$, 然后变动作用量 S , 将各条能级的贡献按(5)式加起来,就得到了这样一个在经典周期轨道作用量处出现 δ 状峰的 $R^{QM} - S$ 图. 这意味着量子能级里隐含着某种规律,按照一定的函数形式将所有能级的贡献加起来时,在经典周期轨道的作用量处就会出现极值. 换句话说,如果不知道经典周期轨道,我们仅仅需要将量子能级按(5)式加起来,就可以得到量子系统对应的经典系统的周期轨道的作用量. 这种从量子能级得到经典物理量的可能途径昭示我们:对于经典可积系统,经典与量子之间可能存在着一定的对应,这种对应使得从量子能级出发得到经典周期轨道的作用量成为可能.

4 结束语

我们计算了二维无关联四次振子,量子 and 经典作用量函数的一致证明了 Berry - Tabor 求迹公式的有效性. 由于 Fourier 变换的不确定原理^[7], 本文没能给出高分辨度的 Fourier 变换谱,这需要用谐波反演技术加以改进. 在应用 Berry - Tabor 求迹公式研究可积系统过程中,我们看到了一些量子经典对应的线索,但是具体的量子经典对应图象还不能给出,这个问题有待进一步研究.

作者衷心感谢赵鸿教授、李君清教授的有益建议和帮助.

参考文献 (References)

- 1 Gutzwiller M C. J. Math. Phys., 1967, **8**:1979—2000
- 2 Berry, Tabor. Proc. R. Soc. Lond., 1976, **A349**:101—123
- 3 Berry. Proc. R. Soc. Lond., 1985, **A400**:229—251
- 4 Ozorio de Almeida A M, Hannay J H. J. Phys., 1987, **A20**:5873—5883
- 5 Ullmo Denis, Grinberg Maurice, Tomsovic Steven. Phys. Rev., 1996, **E54**:136—152
- 6 Main J, Wunner Gunter. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**:3038—3041
- 7 Main J. Phys. Rep., 1999, **316**:233—338
- 8 Berry M V, Tabor M. J. Phys., 1977, **A10**:371—379
- 9 Bohigas O, Tomsovic S, Ullmo M. Phys. Rep., 1993, **223**(2):43—133
- 10 Quigg C, Rosner Jonathan I. Phys. Rep., 1979, **56**(4):167—235

Periodic Orbits and Trace Formula Integrable SystemsSONG Jian-Jun¹ LI Xi-Guo^{1,2} LIU Fang³ LI Shu-Wei¹¹(*Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China*)²(*Research Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Collision, Lanzhou 730000, China*)³(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China*)

Abstract The two-dimensional uncoupled quartic oscillator was chosen to test the validity of the Berry-Tabor trace formula. Periodic orbits of the system were calculated by integrating Hamiltonian equations of motion on reasonable tori and the curvatures on the energy surface were obtained by carefully constructing the orbits around the reasonable tori. Finally, the value of the semiclassical action function and that of the quantum action function in the case $S < 30$ were compared, and the good agreement between the two functions indicates the validity of the trace formula. On the other hand, in the quantum action function $R^{QM}(S, E) - S$ figuration, that peaks appeared at the action values corresponding to the periodic orbits of the classical system provide rich information on quantum-classical correspondence.

Key words integrable system, periodic orbit, trace formula, density of state

Received 16 August 2000

* Supported by Foundations of Research Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Collision, Lanzhou, Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences and 100 Talent Programm of CAS, Major State Basic Research Development Program(G2000077400)