第25卷 第1期 高能物理与核物理 Vol.25, No.1
2001年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan.,2001

Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的高阶压缩特性*

王继锁[1,2,3] 刘堂昆[1,2,4] 詹明生[2]

1(中国科学院武汉物理与数学研究所,波谱与原子分子物理国家重点实验室 武汉 430071)

2(中国科学院安徽光学精密机械研究所,激光光谱学开放研究实验室 合肥 230031)

3(聊城师范学院物理系 聊城 252059)

4(湖北师范学院物理系 黄石 435002)

摘要 给出了 Q 变形的非简谐振子广义奇偶相干态的完备性证明,并且研究了它们的高阶压缩特性. 结果表明,它们可组成一个完备的 Hilbert 空间,且均可呈现奇数阶压缩效应.

关键词 非简谐振子 Q 变形 广义奇偶相干态 完备性 高阶压缩

1 引言

近些年来,随着人们对李群和李代数量子变形研究[1,2]的不断深入,作为物理学理论中基本模型之一的简谐振子代数的 Q 变形已得到了广泛研究[3—5];Codiansky 发现 Q 变形的简谐振子相干态具有一些新的重要的物理性质[6]. 最近,徐子骏[7]把这方面的研究推广到非简谐振子模型之中,提出了 Q 变形非简谐振子广义相干态及其叠加态—Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的概念,并研究了它们的一些性质;Q 变形非简谐振子的广义相干态是 Q 变形非简谐振子湮没算符 b_{Q^-} 的本征态,而 Q 变形非简谐振子的广义奇偶相干态即为算符 $b_{Q^-}^2$ 的本征态. 我们曾在文献[8]中考察了非简谐振子广义奇偶相干态的高阶压缩效应. 本文的目的是在文献[7]的基础上,把我们在这方面的研究工作推广到 Q 变形的情况.

2 Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的完备性

有关非简谐振子和 Q 变形非简谐振子广义相干态的若干结果见文献[7—10],这里不再赘述.

1999-12-08 收稿

* 国家自然科学基金和山东省自然科学基金资助

由文献[7]可知,Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态定义为 Q 变形非简谐振子湮没算符二次幂($b_{Q^-}^2$)的本征态,其表达式可以写成为

$$|\psi_j\rangle = C_j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+j}}{\sqrt{[2n+j]![2k]_{2n+j}}} |2n+j\rangle \qquad (j=0,1;\text{下同}), \tag{1}$$

式中 β 为复参数$[|\beta|<R=1/(1-Q)]$,$k=(1-\sqrt{A+1/4})/2$,$j=0,1$ 分别对应 Q 变形非简谐振子的广义偶、奇相干态,其他有关符号的物理意义同文献[7]和[10];而归一化系数 C_0 和 C_1 分别为

$$C_0 = [A_0(|\beta|^2)]^{-1/2}, C_1 = [A_1(|\beta|^2)]^{-1/2}, \tag{2}$$

$$A_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{[2n]![2k]_{2n}}, \quad A_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{[2n+1]![2k]_{2n+1}}. \tag{3}$$

利用公式[7]

$$b_{Q^-}|n\rangle = \sqrt{[n][n+2k-1]}|n-1\rangle, \quad b_{Q^+}|n\rangle = \sqrt{[n+1][n+2k]}|n+1\rangle, \tag{4}$$

可以得到

$$b_{Q}\ |\psi_0\rangle = \beta\sqrt{A_1/A_0}|\psi_1\rangle, \quad b_{Q^-}|\psi_1\rangle = \beta\sqrt{A_0/A_1}|\psi_0\rangle, \tag{5}$$

$$b_Q^M\ |\psi_0\rangle = \begin{cases} \beta^M|\psi_0\rangle & (M=2n, n=1,2,3,\cdots), \\ \beta^M\sqrt{A_1/A_0}|\psi_1\rangle & (M=2n+1, n=0,1,2,\cdots). \end{cases} \tag{6}$$

$$b_{Q^-}^M|\psi_1\rangle = \begin{cases} \beta^M|\psi_1\rangle & (M=2n, n=1,2,3,\cdots), \\ \beta^M\sqrt{A_0/A_1}|\psi_0\rangle & (M=2n+1, n=0,1,2,\cdots). \end{cases} \tag{7}$$

为了证明 Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的完备性,可采用密度算符方法[11]. 由(1)式容易算出在态$|\psi_j\rangle$中出现本征态$|2n+j\rangle$的几率为

$$P(2n+j,\beta) = |\langle 2n+j|\psi_j\rangle|^2 = \frac{1}{A_j(|\beta|^2)} \frac{|\beta|^{2(2n+j)}}{[2n+j]![2k]_{2n+j}}, \tag{8}$$

若定义密度算符(矩阵)ρ_j 为

$$\rho_j = \sum_{n=0}^{\infty} P(2n+j)|2n+j\rangle\cdot\langle 2n+j|, \tag{9}$$

其中 $P(2n+j)=\iint_D P(2n+j,\beta)\mathrm{d}^2\beta$,积分区域 D 为[7] $|\beta|<R=1/(1-Q)$,则推广的完备性公式

$$\sum_{j=0}^{1}\rho_j^{-1}\iint_D \mathrm{d}^2\beta|\psi_j\rangle\cdot\langle\psi_j| = 1 \tag{10}$$

成立. 其证明过程如下:

在 β 复平面中选取极坐标 $\beta=r\exp(\mathrm{i}\theta)$,$\mathrm{d}^2\beta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,则几率 $P(2n+j)$可化简为

$$P(2n+j) = \frac{2\pi}{[2n+j]![2k]_{2n+j}}\int_0^R \frac{r^{2(2n+j)}r\mathrm{d}r}{A_j(r^2)}, \tag{11}$$

因此(10)式等号左边为

$$\sum_{j=0}^{1}\rho_j^{-1}\iint_D d^2\beta|\psi_j\rangle\cdot\langle\psi_j| = \sum_{j=0}^{1}\rho_j^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{[2m+j]![2k]_{2m+j}[2n+j]![2k]_{2n+j}}}$$

$$\iint_D d^2\beta\frac{\beta^{2m+j}\beta^{*(2n+j)}}{A_j(r^2)}|2m+j\rangle\cdot\langle 2n+j| =$$

$$\sum_{j=0}^{1}\rho_j^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}2\pi\int_0^R\frac{r^{2(2n+j)}rdr}{A_j(r^2)[2n+j]![2k]_{2n+j}}|2n+j\rangle\cdot\langle 2n+j| =$$

$$\sum_{j=0}^{1}\rho_j^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}P(2n+j)|2n+j\rangle\cdot\langle 2n+j| =$$

$$\sum_{j=0}^{1}\sum_{m=0}^{\infty}P^{-1}(2m+j)|2m+j\rangle\cdot\langle 2m+j|\sum_{n=0}^{\infty}P(2n+j)|2n+j\rangle\cdot\langle 2n+j| =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\cdot\langle n| = 1.$$

在上面的证明过程中利用了(11)式. 这表明，Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态能构成一个完备的 Hilbert 空间，因此它们可作为一个独立的表象使用. 例如在这个表象中，Q 变形非简谐振子广义相干态[7] $|\beta\rangle$可表示成为

$$|\beta\rangle = [F_Q(|\beta|^2)]^{-1/2}\{[A_0(|\beta|^2)]^{1/2}|\psi_0\rangle + [A_1(|\beta|^2)]^{1/2}|\psi_1\rangle\}. \tag{13}$$

$$F_Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{[n]![2k]_n}. \tag{14}$$

3　Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的高阶压缩

与文献[8]相类似，我们定义两个可测量即两个厄米算符

$$W_1(M) = (b_{Q^+}^{M} + b_{Q^-}^{M})/2,\ W_2(M) = i(b_{Q^+}^{M} - b_{Q^-}^{M})/2,$$

容易证明，它们之间满足对易关系$[W_1(M), W_2(M)] = (i/2)[b_{Q^-}^{M}, b_{Q^+}^{M}]$和测不准关系

$$\langle(\Delta W_1)^2\rangle\cdot\langle(\Delta W_2)^2\rangle \geqslant \frac{1}{16}|\langle[b_{Q^-}^{M}, b_{Q^+}^{M}]\rangle|^2;$$

与光场的振幅高次方压缩的定义[12]相类似，若

$$\langle(\Delta W_i)^2\rangle - \frac{1}{4}\langle[b_{Q^-}^{M}, b_{Q^+}^{M}]\rangle < 0\quad(i = 1,2), \tag{17}$$

则称态在 W_i 方向上具有M 次方压缩效应. 下面分两种情况来研究 Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的这种高阶压缩特性.

3.1　当 M 为偶数即 $M = 2m(m = 1,2,3,\cdots)$时

在这种情况下，由(6)和(7)式可得

$$\langle\psi_0|b_{Q^+}^{2M}|\psi_0\rangle = \langle\psi_1|b_{Q^+}^{2M}|\psi_1\rangle = r^{2m}e^{-i4m\theta},\quad \langle\psi_0|b_{Q^-}^{2M}|\psi_0\rangle = \langle\psi_1|b_{Q^-}^{2M}|\psi_1\rangle = r^{2m}e^{i4m\theta} \tag{18}$$

$$\langle\psi_0|b_{Q^+}^{M}|\psi_0\rangle = \langle\psi_1|b_{Q^+}^{M}|\psi_1\rangle = r^m e^{-i2m\theta},\quad \langle\psi_0|b_{Q^-}^{M}|\psi_0\rangle = \langle\psi_1|b_{Q^-}^{M}|\psi_1\rangle = r^m e^{i2m\theta}, \tag{19}$$

$$\langle\psi_0|b_{Q^+}^{M}b_{Q^-}^{M}|\psi_0\rangle=\langle\psi_1|b_{Q^+}^{M}b_{Q^-}^{M}|\psi_1\rangle=r^{2m} \tag{20}$$

将(18)—(20)式代入(17)式得

$$\langle\psi_0|(\Delta W_i)^2|\psi_0\rangle-\frac{1}{4}\langle\psi_0|[b_{Q^-}^{M},b_{Q^+}^{M}]|\psi_0\rangle=$$

$$\langle\psi_1|(\Delta W_i)^2|\psi_1\rangle-\frac{1}{4}\langle\psi_1|[b_{Q^-}^{M},b_{Q^+}^{M}]|\psi_1\rangle=0\qquad(i=1,2). \tag{21}$$

这表明,这时 Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态均为由(15)式所定义的算符 $W_1(M)$ 和 $W_2(M)$($M=2m,m=1,2,3,\cdots$)的最小测不准态.

3.2 当 M 为奇数即 $M=2m+1(m=0,1,2,\cdots)$ 时

此时由(6)和(7)式可以得到

$$\langle\psi_0|b_{Q^+}^{2M}|\psi_0\rangle=\langle\psi_1|b_{Q^+}^{2M}|\psi_1\rangle=r^{2m+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(4m+2)\theta}, \tag{22}$$

$$\langle\psi_0|b_{Q^-}^{2M}|\psi_0\rangle=\langle\psi_1|b_{Q^-}^{2M}|\psi_1\rangle=r^{2m+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(4m+2)\theta}, \tag{23}$$

$$\langle\psi_0|b_{Q^+}^{M}|\psi_0\rangle=\langle\psi_1|b_{Q^+}^{M}|\psi_1\rangle=\langle\psi_0|b_{Q^-}^{M}|\psi_0\rangle=\langle\psi_1|b_{Q^-}^{M}|\psi_1\rangle=0, \tag{24}$$

$$\langle\psi_0|b_{Q^+}^{M}b_{Q^-}^{M}|\psi_0\rangle=r^{2m+1}A_1/A_0,\quad\langle\psi_1|b_{Q^+}^{M}b_{Q^-}^{M}|\psi_1\rangle=r^{2m+1}A_0/A_1. \tag{25}$$

将(22)—(25)式代入(17)式得

$$\langle\psi_0|(\Delta W_1)^2|\psi_0\rangle-\frac{1}{4}\langle\psi_0|[b_{Q^-}^{M},b_{Q^+}^{M}]|\psi_0\rangle=\frac{1}{2}r^{2m+1}[A_1/A_0+\cos(4m+2)\theta], \tag{26}$$

$$\langle\psi_1|(\Delta W_1)^2|\psi_1\rangle-\frac{1}{4}\langle\psi_1|[b_{Q^-}^{M},b_{Q^+}^{M}]|\psi_1\rangle=\frac{1}{2}r^{2m+1}[A_0/A_1+\cos(4m+2)\theta], \tag{27}$$

注意到 $r>0$,由(26)式[或(27)式]可以看出,只要这时不等式 $A_1/A_0<-\cos(4m+2)\theta$ [或 $A_0/A_1<-\cos(4m+2)\theta$]成立,则 Q 变形非简谐振子的广义偶(或奇)相干态这时在 W_1 方向上便会呈现 M(M 为奇数)次方压缩效应;显然,当 $\theta=\pi/(4m+2)$ 时,只要这时 $A_1/A_0<1$(或 $A_0/A_1<1$),则 Q 变形非简谐振子的广义偶(或奇)相干态在 W_1 方向上就会呈现 M 次方(M 为奇数)压缩效应. 同理,在 W_2 方向上也有类似结论. 总之,只要适当选取复参数 β 的模值 r 和幅角 θ,Q 变形非简谐振子的广义奇偶相干态在 β 的一些取值范围内便可呈现奇次方压缩效应. 可见,文献[7]所研究的 Q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态(即这里的广义奇偶相干态)的压缩效应,只是本文所讨论的普遍情况的一种 $M=1$ 的特例. 显然,当变形参数 $Q\to1$ 时 $[n]\to n$,即回到无变形情况[8].

4 结论

本文在文献[7,8]的基础上,证明了 Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态的完备性,并且考察了它们的高阶压缩性质. 结果表明:Q 变形非简谐振子广义奇偶相干态可构成一个完备的 Hilbert 空间,即它们可作为一个独立的表象使用;只要适当选取复参数 β 的模值 r 和幅角 θ,Q 变形非简谐振子的广义奇偶相干态均可呈现奇次方压缩效应;文献[7]

中所研究的 Q 变形非简谐振子广义相干态的叠加态的压缩效应,只是本文所得普遍性结论的一种 $M=1$ 的特例. 显然,当变形参数 $Q\rightarrow 1$ 时,本文所得结论与文献[8]中的非变形情况相一致.

参考文献(References)

1 Pocek M. Phys. Lett., 1991, **B255**: 554

2 Delbecq C, Quesne C. J. Phys., 1993, **A26**: L127

3 Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**: L872

4 CHANG Zhe, CHEN Wei, GUO Han-Ying. J. Phys., 1990, **A23**: 4185

5 CHANG Zhe, CHEN Wei, YAN Hong. J. Phys., 1990, **A23**: 4235

6 Codriansky S. Phys. Lett., 1994, **A184**: 381

7 XU Zi-Wen. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**: 436 (in Chinese)
(徐子牧. 高能物理与核物理, 1999, **23**: 436)

8 YU Zhao-Xian, WANG Ji-Suo et al. Acta Physica Sinica, 1997, **46**: 1693 (in Chinese)
(于肇贤, 王继锁等. 物理学报, 1997, **46**: 1693)

9 XU Zi-Wen. Acta Physica Sinica, 1996, **45**: 1807 (in Chinese)
(徐子牧. 物理学报, 1996, **45**: 1807)

10 WANG Ji-Suo, LIU Tang-Kun, ZHAN Ming-Sheng. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**: 1114 (in Chinese)
(王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 高能物理与核物理, 2000, **24**: 1114)

11 HAO San-Ru. Acta Physica Sinica, 1993, **42**: 691 (in Chinese)
(郝三如. 物理学报, 1993, **42**: 691)

12 ZHANG Z M, XU L et al. Phys. Lett., 1990, **A150**: 27

Higher-Order Squeezing for Generalized Odd and Even Coherent States of a Q-Deformed Non-harmonic Oscillator*

WANG Ji-Suo[1,2,3]　LIU Tang-Kun[1,2,4]　ZHAN Ming-Sheng[1]

1 (*State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, the Chinese Academy of Sciences, Wuhan* 430071, *China*)

2 (*Laser Spectroscopy Laboratory, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei* 230031, *China*)

3 (*Department of Physics, Liaocheng Teachers University, Liaocheng* 252059, *China*)

4 (*Department of Physics, Hubei Normal University, Huangshi* 435002, *China*)

Abstract　The completeness and higher-order squeezing properties of generalized odd and even coherent states of a Q-deformed non-harmonic oscillator are investigated. The results show that they may form a complete Hilbert space, and the odd-order squeezing effects exist in all of the states.

Key words　non-harmonic oscillator, Q-deformation, generalized odd and even coherent states, completeness, higher-order squeezing

---

Received 8 December 1999

* Supported by NSFC and the Natural Science Foundation of Shandong Province of China