第24卷第4期　　高能物理与核物理　　Vol.24, No.4
2000年4月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Apr.,2000

同一个非动力学 r 矩阵所对应的有理 Ruijsenaars-Schneider 模型($n=2$)及 Calogero-Moser 模型

王美旭　杨文力　侯伯宇
(西北大学现代物理研究所　西安　710069)

摘要　构造了有理 Ruijsenaars-Schneider 模型($n=2$)的新的 Lax 算子,发现相应的 r 矩阵是非动力学的,它与 Calogero-Moser 模型具有相同的 r 矩阵.

关键词　有理 RS 模型　非动力学结构　可积　r 矩阵

1　引言

寻找系统的 Lax 表示,是证明系统可积性的一个非常有效的方法. 作为研究多粒子系统问题的一个重要的理论模型,Ruijsenaars-Schneider(RS)模型受到了广泛的关注. RS 模型描述了一个一维的具有 n 个相对论粒子互作用系统的完全可积性. 它的重要性在于,它与一些可积动力学场论中的孤立子的动力学行为有关,并且它的分时形式与可解格点统计模型中的 Bethe ansatz 方程有关[1]. RS 模型在非相对论极限情况下,变为 Calogero-Moser(CM)模型. CM 模型是描述了一个一维的具有 n 个非相对论粒子互作用的可积系统. 相邻的粒子之间具有作用势 $V(q_i-q_j)$,根据作用势可将其化分为不同类型(有理,三角,椭圆). CM 模型的重要性在于它渗透于从固体物理到粒子物理等诸多领域,并且与共形场理论有联系[2,3]. RS 模型和 CM 模型的 r 矩阵结构的主要区别在于,后者用线型 Poisson-Lie 括号给出,而前者以二次型 Poisson-Lie 括号的 r 矩阵给出. Freidel 等在文献[4]中已研究了二次型 Poisson-Lie 括号的 r 矩阵结构.

椭圆 RS 模型的 Lax 表示已由 Ruijsenaars[5] 构造,相应的 r 矩阵结构由 Nijhoff[6] 和 Suris[7] 给出. 然而,RS 模型和 CM 模型的 Lax 表示的 r 矩阵是动力学的(r 依赖于动力学变量). 具有动力学 r 矩阵的二次型 Poisson-Lie 括号的广义 Yang-Baxter 关系仍是一个没有解决的问题[6],并且 Lax 表示的 Poisson 括号不再是封闭的,这些经典 Lax 算子的量子形式还不能构造.

对于一个可积的有限粒子体系,不同的Lax表示是相互关联的,在Lax算子满足线

1999-02-24 收稿

型 Poisson-Lie 括号的情况下,我们发现了 Lax 算子的不同规范中的 r 矩阵的变换性质[8],这样的变换被称为经典动力学 twisting. 为了克服由动力学 r 矩阵所带来的困难,可以寻找模型的非动力学(与动力学量无关)的 r 矩阵(如果存在的话). 称为一个好的 Lax 表示. 不久以前,我们已经给出了椭圆的 RS 模型的非动力学 r 矩阵结构[8]. 本文将分别给出有理的 RS 模型和 CM 模型的 Lax 算子及相应的非动力学 r 矩阵.

2 经典 r 矩阵的动力学 twisting

在一些李代数 $\mathscr{G}$ 上取值的系统的相空间上,可以定义两个函数(L,M)(Lax pair),它们的变化方程可以写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=[L,M],\tag{1}$$

其中[,]是定义在李代数 $\mathscr{G}$ 上的括号. 若伴随不变量 $\mathrm{tr}L^l(l=1,\cdots,n)$是动力学可积的,则保证了 Lax pair 的存在. 基本泊松括号可以表示为线型:

$$\{L_1(u),L_2(v)\}=[r_{12}(u,v),L_1(u)]-[r_{21}(v,u),L_2(v)],\tag{2}$$

或二次型[4,9]:

$$\begin{aligned}\{L_1(u),L_2(v)\}=&L_1(u)L_2(v)r_{12}^-(u,v)-r_{12}^+(u,v)L_1(u)L_2(v)+\\&L_1(u)s_{12}^+(u,v)L_2(v)-L_2(v)s_{12}^-(u,v)L_1(u),\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $L_1=L\otimes 1,\quad L_2=1\otimes L,\quad a_{12}=Pa_{21}P,$

P 是交换算子,满足 $P(y\otimes x)=y\otimes x$.

同一个动力学系统可能有多个 Lax 表示和多个 r 矩阵,一个系统不同的 Lax 表示是相互等价的[9]. 若$(\tilde{L},\widetilde{M})$是同一个动力学系统的另一个 Lax pair. 它与(L,M)相互等价,则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}t}&=[\tilde{L},\widetilde{M}],\\ \tilde{L}(u)&=g(u)L(u)g^{-1}(u),\\ \widetilde{M}(u)&=g(u)M(u)g^{-1}(u)-\frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}t}g^{-1}(u),\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $g(u)\in G$,G 的李代数为 $\mathscr{G}$. 可以证明 Lax pair$(\tilde{L},\widetilde{M})$有以下的 r 矩阵结构[8]

$$\begin{aligned}\{\tilde{L}_1(u),\tilde{L}_2(v)\}=&\tilde{L}_1(u)\tilde{L}_2(v)\tilde{r}_{12}^-(u,v)-\tilde{r}_{12}^+(u,v)\tilde{L}_1(u)\tilde{L}_2(v)+\\&\tilde{L}_1(u)\tilde{s}_{12}^+(u,v)\tilde{L}_2(v)-\tilde{L}_2(v)\tilde{s}_{12}^-(u,v)\tilde{L}_1(u).\end{aligned}\tag{5}$$

显然,对于有限粒子系统,可以对 Lax 算子进行相似变换,对相应的 M 进行通常的规范变换,对 r 矩阵进行广义的规范变换,从而得到不同的 Lax 表示. r 矩阵可看作是具有线性泊松括号系统的广义 twisting 关系[8].

若存在依赖于动力学变量的 g,使得满足以下关系:

$$\tilde{r}_{12}^-(u,v)=\tilde{r}_{12}^+(u,v),\quad \tilde{s}_{12}^{\pm}(u,v)=0,$$

则系统存在具有 Sklyanin 括号的非动力学 Lax 表示. 本文把具有非动力学 Sklyanin 括号的 Lax 表示称为一个好的 Lax 表示.

3 有理 RS 模型($n=2$)的好的 Lax 表示及其非动力学 r 矩阵

Ruijsenaars-Schneider 模型描述的是一个一维的具有二体相互作用势的相对论粒子系统．正则变量 $p_i, q_i(i=1,\cdots n)$满足正则括号

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij},$$

取 $H(p\cdot q)$为完全可积的哈密顿量

$$H(p,q) = \mathrm{tr} L_{\mathrm{RS}}(p,q),$$

这里的 $L_{\mathrm{RS}}(p,q)$为 RS 模型的 Lax 算子

文献[10]中给出了 RS 模型的双曲及有理形式．本文只关心有理的情况．对于 $n=2$

$$L_{\mathrm{RS}}(q,p) = \left(1-\frac{\gamma^2}{q_{12}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{p_1} & \mathrm{e}^{p_2}\dfrac{\gamma}{\gamma-q_{12}} \\ \mathrm{e}^{p_1}\dfrac{\gamma}{\gamma+q_{12}} & \mathrm{e}^{p_2} \end{pmatrix},$$

这里 γ 为模型参数，一般为纯虚数．它满足等式(5)，且(r,s)矩阵均为动力学的(依赖于动力学变量 q_i)[3]．为寻找具有非动力学矩阵的 Lax 表示，首先定义一个 Lax 算子

$$L_{\mathrm{R}}(p,q) = \frac{1}{\pi\gamma} L_{\mathrm{RS}}(p,q),$$

并对其作泊松映射

$$q_i \longrightarrow q_i, p_i \longrightarrow p_i + \frac{1}{2}\ln\prod_{k\neq j}\frac{q_{ik}+\gamma}{q_{ik}-\gamma}, \tag{6}$$

则原 Lax 算子变为

$$\tilde{L}_{\mathrm{R}}(p,q) = \frac{1}{\pi q_{12}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{p_1}\dfrac{\gamma+q_{12}}{\gamma} & -\mathrm{e}^{p_2} \\ \mathrm{e}^{p_1} & -\mathrm{e}^{p_2}\dfrac{\gamma-q_{12}}{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

在泊松变换下，泊松括号不变．因此，对于标准的 Ruijsenaars 的 Lax 算子 $L_{\mathrm{R}}(p,q)$，对相应的 r 矩阵的研究相当于对$\tilde{L}_{\mathrm{R}}(p,q)$的 r 矩阵的研究．$\tilde{L}_{\mathrm{R}}(p,q)$的基本泊松括号满足二次型 r 矩阵形式等式(5)．

定义

$$g(u,q) = \frac{1}{\pi q_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\pi(u+q_{12}) & \pi(u-q_{12}) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$g^{-1}(u,q) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pi(u-q_{12}) & 1 \\ \pi(u+q_{12}) & 1 \end{pmatrix}.$$

可以构造一个新的 Lax 算子 $L(u)$，

$$L(u) = g(u,q)\tilde{L}_{R}(p,q)g^{-1}(u,q), \tag{9}$$

其矩阵元可写为

$$\begin{aligned}
L(u)_1^1 &= -\frac{1}{2\pi^2 q_{12}\gamma}(e^{p_1}\pi(u-q_{12}) - e^{p_2}\pi(u+q_{12})),\\
L(u)_1^2 &= -\frac{1}{2\pi^2 q_{12}\gamma}(e^{p_1} - e^{p_2}),\\
L(u)_2^1 &= -\frac{1}{2\pi^2 q_{12}\gamma}(-e^{p_1}\pi^2(2\gamma+u+q_{12})(u-q_{12}) + \\
&\quad e^{p_2}\pi^2(2\gamma+u-q_{12})(u+q_{12})),\\
L(u)_2^2 &= -\frac{1}{2\pi^2 q_{12}\gamma}(-e^{p_1}\pi(2\gamma+u+q_{12}) + e^{p_2}\pi(2\gamma+u-q_{12})).
\end{aligned} \tag{10}$$

可以证明此处所给 Lax 算子 $L(u)$是有理 RS 模型的好的 Lax 表示. 由于变换矩阵 $g(u,q)$与动力学变量 q_i 有关,相应的经典 r 矩阵结构有较大的变化. 经计算可知 Lax 算子 $L(u)$的基本泊松括号可写成具有数字 r 矩阵的标准二次型 Poisson-Lie 括号

$$\{L_1(u), L_2(v)\} = [r_{12}(u-v), L_1(u)L_2(v)], \tag{11}$$

其中

$$r(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u} & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & -\frac{1}{u} & 0 \\ \pi^2 u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$r(u)$与动力学变量无关,且满足经典 Yang-Baxter 方程

$$[r_{12}(u-v), r_{13}(u-\eta)] + [r_{12}(u-v), r_{23}(v-\eta)] + [r_{13}(u-\eta), r_{23}(v-\eta)] = 0; \tag{13}$$

$r(u)$具有反对称性

$$r_{12}(u) = -r_{21}(-u). \tag{14}$$

需要指出的是,该 r 矩阵可由文献[8]中的 r 矩阵取有理极限再作一奇异的相似变换得到.

由 Lax 算子 $L(u)$满足的关系式(11)及与动力学变量无关的 r 矩阵的性质式(13),可以构造方程(11)的量子形式

$$R_{12}(u-v)\hat{L}_1(u)\hat{L}_2(v) = \hat{L}_2(v)\hat{L}_1(u)R_{12}(u-v), \tag{15}$$

其中 $R_{12}(u-v)$满足量子 Yang-Baxter 方程

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u-\eta)R_{23}(v-\eta) = R_{23}(v-\eta)R_{13}(u-\eta)R_{12}(u-v). \tag{16}$$

Lax 算子 $L(u)$的量子形式 $\hat{L}(u)$可通过通常的正则量子化过程得到,

$$p_j \longrightarrow \hat{p}_j = -\sqrt{-1}\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad q_j \longrightarrow \hat{q}_j, \quad j=1,\cdots,n.$$

而经典的 r 矩阵 $r(u)$是量子 R 矩阵 $R(u)$的半经典极限

$$R(u)=1+\omega r(u)+O(\omega^2),\omega\longrightarrow 0. \tag{17}$$

4 有理的 Calogero-Moser 模型

Calogero-Moser(CM)模型是具有二体作用势的 n 个一维非相对论粒子组成的系统. 相空间的正则变量 $p_i, q_i(i=1,\cdots,n)$满足

$$\{p_i,p_j\}=0,\quad \{q_i,q_j\}=0,\quad \{p_i,q_j\}=\delta_{ij},$$

它的哈密顿量为

$$H=\mathrm{tr}L_{\mathrm{CM}}^2,$$

其中 L_{CM}为 CM 模型的 Lax 算子.

直接利用前一章的结果,对有理 RS 模型的新的 Lax 算子取非相对论极限,可得到有理 CM 模型的 Lax 算子. 令 $p\to\beta p,\gamma\to\beta\gamma$,并令 $\gamma\to 0$. 在这种极限下,有关系 $L=I+3L_{\mathrm{CM}}+O(\beta^2)$,由此可得到有理 CM 模型的 Lax 算子:

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{CM}}(u)_1^1 &= -\frac{1}{4\pi^2 q_{12}\gamma}(p_1^2\pi(u-q_{12})-p_2^2\pi(u+q_{12})),\\
L_{\mathrm{CM}}(u)_1^2 &= -\frac{1}{4\pi^2 q_{12}\gamma}(p_1^2-p_2^2),\\
L_{\mathrm{CM}}(u)_2^1 &= -\frac{1}{2\pi^2 q_{12}\gamma}(-p_1\pi^2 2\gamma(u-q_{12})-\frac{1}{2}p_1^2\pi^2(u+q_{12})(u-q_{12})+\\
&\qquad p_2\pi^2 2\gamma(u+q_{12})+\frac{1}{2}p_2^2\pi^2(u-q_{12})(u+q_{12})),\\
L_{\mathrm{CM}}(u)_2^2 &= -\frac{1}{2\pi^2 q_{12}\gamma}(-p_1\pi 2\gamma-\frac{1}{2}p_1^2\pi(u+q_{12})+p_2\pi 2\gamma+\frac{1}{2}p_2^2\pi(u-q_{12})).
\end{aligned}\tag{18}$$

对应的 r 矩阵为式(12),且满足关系式(2).

5 讨论

讨论了 $n=2$ 时有理的非动力学 RS 模型,并给出了其非相对论极限(CM 模型),它们具有相同的非动力学 r 矩阵. 本文所用的方法只能应用于 $n=2$ 的情况,不能直接推广至一般 n 的情况. 对于 $n\geqslant 3$ 的情况,将在以后的文章中给出.

本文作者之一杨文力博士感谢西北大学校园基金的资助.

参考文献(References)

1 Nijhoff F W, Ragnisco O, Kuznetsov V B. Comm. Math. Phys., 1996, **176**:681

2 Caselle M. Phys. Rev. Lett., 1995, **74**:2776

3 Marotta V, Sciarrino A. Nucl. Phys., 1996, **B476**:351

4 Freidel L, Maillet J M. Phys. Lett., 1991, **B262**:278

5 Ruijsenaars S N M. Comm. Math. Phys., 1988, **115**:127
6 Nijhoff F W, Kuznetsov V B, Sklyanin E K et al. J. Phys. (Math. Gen.), 1996, **A29**:L333
7 Suris Y B. Elliptic Ruijsenaars-Schneider and Calogero-Moser Hierarchies are Governed by the Same r-Matrix, Preprint hep-th/9603011
8 HOU B Y, YANG W L. The Dynamical Twisting and Nondynamic r-Matrix Structure for the Elliptic Rujisenaars-Schneider Model, Preprint Math. QA/9802104
9 Babelon O, Viallet C M. Phys. Lett., 1989, **B237**:411
10 Suris Y B. Why are the Rational and Hyperbolic Ruijsenaars-Schneider Hierarchies Governed by the Same R-Operators as the Calogero-Moser Ones, Preprint hep-th/9602160

Rational Ruijsenaars-Schneider Models($n=2$) Governed by the Same Non-dynamical r-Matrix as in Calogero-Moser Ones

WANG MeiXu　YANG WenLi　HOU BoYu
(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069, *China*)

Abstract We gave a new Lax representation of rational Ruijsenaars-Schneider models($n=2$) which is governed by the same r-matrix as in Calogero-Moser model, and found that the corresponding r-matrix is non-dynamical.

Key words rational Ruijsenaars-Schneider model, non-dynamical structure, integrable, r-matrix

Received 24 February 1999