Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂的本征态及其高阶压缩特性*

王继锁[1—3,1)]　刘堂昆[1,2,4]　詹明生[1]

1(中国科学院武汉物理与数学研究所,波谱与原子分子物理国家重点实验室　武汉　430071)

2(中国科学院安徽光学精密机械研究所激光光谱学开放研究实验室　合肥　230031)

3(聊城师范学院物理系　聊城　252059)

4(湖北师范学院物理系　黄石　435002)

摘要　构造出了 Q 变形的非简谐振子湮没算符 K 次幂($K\geqslant3$)的 K 个正交归一本征态,给出了它们的完备性证明,并且研究了它们的高次方压缩特性. 结果表明,它们能够组成一个完备的 Hilbert 空间;且当 K 为偶数时,这些本征态均可呈现 M 次方[$M=(n+1/2)K$, $n=0,1,2,\cdots$]压缩效应.

关键词　非简谐振子　Q 变形　湮没算符的高次幂　本征态　完备性　高阶压缩

1　引言

近年来量子完全可积系统理论的发展,引起了数学界和物理学界对量子群及其可能的物理应用研究产生了广泛的兴趣[1]. 鉴于 Glauber 相干态提出之后,相干态理论及其应用已成为物理学研究的一个重要领域[2],人们认为,将具有李群结构的通常相干态推广至具有量子群结构的相干态,将是十分有意义的. 1989 年,Biedenharn[3] 率先将 Glauber 相干态推广到 Q 变形情况,提出了 Q 相干态的概念,Gray 等人利用 Q 微积分的性质证明了 Glauber 相干态的这种 Q 类似形式也是完备的[4];文献[5]引进了 Q 类似奇偶相干态,文献[6]通过细致的数值计算,全面地揭示了 Q 奇偶相干态量子统计性质对不同 Q 参数取值的依赖性.

近些年来,随着人们对李群和李代数量子变形研究[7,8]的不断深入,作为物理学理论中基本模型之一的简谐振子代数的 Q 变形已得到了广泛研究[9,10];Codiansky 发现 Q 变形的简谐振子相干态具有一些新的重要的物理性质[11]. 最近,徐子驳[12]把这方面的研究

1999-12-27 收稿

* 国家自然科学基金和山东省自然科学基金资助

1) E-mail: jswang@371.net

推广到非简谐振子模型之中,提出了 Q 变形非简谐振子广义相干态及其叠加态—Q 变形非简谐振子奇偶广义相干态的概念,并研究了它们的一些性质;Q 变形非简谐振子的广义相干态是 Q 变形非简谐振子湮没算符 b_{Q^-} 的本征态,而 Q 变形非简谐振子的奇偶广义相干态即为算符 $b_{Q^-}^2$ 的本征态. 我们曾在文献[13]中,在量子力学的框架内构造出了非简谐振子湮没算符高次幂的本征态,并且考察了它们的一些量子统计性质. 由于作为 Q 类似 Heisenberg 代数的一种最直接物理实现的 Q 振子已被用于唯象地描述核物理及量子光学中的某些非线性效应[14,15],因此构造典型量子态的 Q 类似形式并研究它们的量子特性一直是近几年来人们所关注的研究课题. 本文的目的是在文献[12]工作的基础上,把我们的研究工作[13]推广到 Q 变形的情况.

2 Q 变形非简谐振子广义相干态的一些结果

为了下面行文和完备起见,本节让我们先来回顾一下有关非简谐振子和 Q 变形非简谐振子广义相干态[12]的若干结果.

按文献[16],非简谐振子哈密顿算符的无量纲形式为

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{A}{x^2}, \quad A > 0,$$

与之对应的产生算符 b_+ 和湮没算符 b_- 分别为[17]

$$b_\pm = \frac{1}{2}(X \mp \mathrm{i}P),$$

式中 X 和 P 分别为非简谐振子势场中的自然坐标算符和自然动量算符

$$X = x^2 - H, \quad P = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right),$$

它们满足对易关系[12]

$$[H, b_\pm] = \pm 2b_\pm, \quad [b_-, b_+] = H, \tag{4}$$

$$[N, b_\pm] = \pm b_\pm, \quad [b_-, b_+] = (N+1)(N+2k) - N(N+2k-1), \tag{5}$$

式中 $k = (1-\sqrt{A+1/4})/2$,N 为粒子数算符[12] $N = H/2 - k$. 设 $|n\rangle$ 是第 n 个能量本征态,则算符 $b_0(b_0 = H/2)$,$b_\pm$ 对 $|n\rangle$ 的作用分别为

$$b_0|n\rangle = (n+k)|n\rangle, \quad b_-|n\rangle = \sqrt{n(n+2k-1)}|n-1\rangle,$$

$$b_+|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2k)}|n+1\rangle.$$

若定义 Q 变形的非简谐振子代数的产生和湮没算符 $b_{Q^\pm}$ 为[12]

$$b_{Q^+} = \varphi(N)b_+, \quad b_{Q^-} = b_-\varphi(N),$$

并适当地选取变换算符 $\varphi(N) = \sqrt{\dfrac{[N][N+2k-1]}{N(N+2k-1)}}$,则有

$$[N, b_{Q^\pm}] = \pm b_{Q^\pm}, \quad [b_{Q^-}, b_{Q^+}] = [N+1][N+2k] - [N][N+2k-1], \tag{8}$$

式中 $[n] = (Q^n - 1)/(Q-1)(Q \in [0,1])$;上式给出了 Q 变形非简谐振子代数的基本公式(当变形参数 $Q \to 1$ 时,$[n] \to n$,即回到无变形情况). 由(6)和(7)式可得在 Q 变形情

况下有[12]

$$N|n\rangle_Q = n|n\rangle_Q,\quad b_{Q^-}|n\rangle_Q = \sqrt{[n][n+2k-1]}\,|n-1\rangle_Q, \tag{9a}$$

$$b_{Q^+}|n\rangle_Q = \sqrt{[n+1][n+2k]}\,|n+1\rangle_Q. \tag{9b}$$

Q 变形非简谐振子的广义相干态定义为 Q 变形非简谐振子湮没算符 b_{Q^-} 的本征态[12]

$$|\beta\rangle_Q = [F_Q(|\beta|)]^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}}|n\rangle_Q,\quad F_Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]![2k]_n}, \tag{10}$$

式中 $[n]! = [n][n-1]\cdots[2][1]$, $[y]_n = [y][y+1]\cdots[y+n-1]$, β 为复参数 $[|\beta| < R,\ R = 1/(1-Q)]$. 另外,应用(9)式可以得到下列表达式

$$|n\rangle_Q = \frac{1}{\sqrt{[n]![2k]_n}}b_{Q^+}^n|0\rangle_Q.$$

3　Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂的本征态及其数学性质

3.1　算符 $b_{Q^-}^K$ 本征态的数学结构

仿照文献[13]并参照(10)式,现在考虑如下 K 个($K\geqslant 3$,下同,文中不再注明)态矢

$$|\psi_j\rangle_Q = C_j\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^{mK+j}}{\sqrt{[mK+j]![2k]_{mK+j}}}|mK+j\rangle_Q, \tag{12}$$

式中 C_j 为归一化因子,j 的可能取值(下同,文中不再注明)为 $j=0,1,2,\cdots,(K-1)$. 为求(12)式中的归一化因子,令 $z=|\beta|^2$,利用归一化条件可得到归一化因子为

$$C_j(z) = [A_j^Q(z)]^{-1/2} = \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{mK+j}}{[mK+j]![2k]_{mK+j}}\right]^{-1/2}. \tag{13}$$

容易证明,由(12)式所定义的这 K 个态确实是算符 $b_{Q^-}^K$ 的属于本征值为 β^K 的本征态(K 重简并态),并且它们之间彼此是正交归一的,即

$$b_{Q^-}^K|\psi_j\rangle_Q = \beta^K|\psi_j\rangle_Q,\quad {}_Q\langle\psi_{j'}|\psi_j\rangle_Q = \delta_{j'j}. \tag{14}$$

这样,就得到了算符 $b_{Q^-}^K$ 的 K 个正交归一化本征态

$$|\psi_j\rangle_Q = [A_j^Q(|\beta|^2)]^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^{mK+j}}{\sqrt{[mK+j]![2k]_{mK+j}}}|mK+j\rangle_Q, \tag{15}$$

式中 $A_j^Q(|\beta|^2)$ 的表达式由(13)式给出. 显然,在(15)式中当变形参数 $Q\to 1$ 时,其结果与文献[13]完全相一致,即为无变形的非简谐振子湮没算符高次幂 b_-^K ($K\geqslant 3$)的本征态.

3.2　算符 $b_{Q^-}^K$ 本征态的一些数学性质

首先,由于算符 $b_{Q^-}^K$ 的上述这 K 个本征态是表示以复参数 β 定义的态矢量,所以当 β 取不同值时各态矢相应的内积为

$${}_Q\langle\psi_j(\beta)|\psi_j(\beta')\rangle_Q = [A_j^Q(|\beta|^2)A_j^Q(|\beta'|^2)]^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta^*\beta')^{mK+j}}{[mK+j]![2k]_{mK+j}} =$$

$$[A_j^Q(|\beta|^2)A_j^Q(|\beta'|^2)]^{-1/2}A_j^Q(\beta^*\beta')\neq 0\,. \tag{16}$$

这表明,在"β复平面"上算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个本征态与 Glauber 相干态一样,本身并不正交.

另外可以证明,在由算符 b_Q^K 的上述这 K 个本征态所组成的空间里,通过算符 b_{Q^-} 的连续作用,可实现这 K 个态之间的相互转换;例如若将算符 b_{Q^-} 连续作用在态$|\psi_0\rangle_Q$上,则有

$$b_{Q^-}^i|\psi_0\rangle_Q=\beta^i A_0^{Q^{-1/2}}\ A_{K-i}^{Q}{}^{1/2}|\psi_{K-i}\rangle_q,\quad (i=1,2,\cdots,K)\,, \tag{17}$$

即算符 b_{Q^-} 连续作用于态$|\psi_0\rangle_Q$上,可使该态按照$|\psi_0\rangle_Q\rightarrow|\psi_{K-1}\rangle_Q\rightarrow|\psi_{K-2}\rangle_Q\rightarrow\cdots\rightarrow|\psi_1\rangle_Q\rightarrow|\psi_0\rangle_Q$的顺序历经其它$(K-1)$个态后又回到原态$|\psi_0\rangle_Q$;亦即算符 b_{Q^-} 在这 K 个态之间起了一个"转动算符"的作用.

余下的是证明算符 $b_{Q^-}^K$ 的上述这 K 个本征态的完备性,为了构造其完备性公式,可采用密度算符方法[18].由(15)式容易算出在态$|\psi_j\rangle_Q$中出现本征态$|mK+j\rangle_Q$的几率为

$$P_Q(mK+j,\,\beta)=|_Q\langle mK+j|\psi_j\rangle_Q|^2=\frac{1}{A_j^Q(|\beta|^2)}\frac{|\beta|^{2(mK+j)}}{[mK+j]![2k]_{mK+j}}\,, \tag{18}$$

若定义密度算符(矩阵)ρ_j为

$$\rho_j=\sum_{m=0}^{\infty}P_Q(mK+j)|mK+j\rangle_Q\cdot{}_Q\langle mK+j| \tag{19}$$

其中 $P_Q(mK+j)=\iint\limits_D P_Q(mK+j,\beta)\mathrm{d}^2\beta$,积分区域 D 为[12] $|\beta|<R$,则推广的完备性公式

$$\sum_{j=0}^{K-1}\rho_j^{-1}\iint\limits_D \mathrm{d}^2\beta|\psi_j\rangle_Q\cdot{}_Q\langle\psi_j|=1 \tag{20}$$

成立.其证明过程如下:

在 β 复平面中选取极坐标$\beta=r\exp(\mathrm{i}\theta)$,$\mathrm{d}^2\beta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,则几率 $P_Q(mK+j)$可化简为

$$P_Q(mK+j)=\frac{2\pi}{[mK+j]![2k]_{mK+j}}\int_0^R\frac{r^{2(mK+j)}r\mathrm{d}r}{A_j^Q(r^2)} \tag{21}$$

因此(20)式等号左边为

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{K-1}\rho_j^{-1}\iint\limits_D\mathrm{d}^2\beta|\psi_j\rangle_Q\cdot{}_Q\langle\psi_j|&=\sum_{j=0}^{K-1}\rho_j^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{[mK+j]![2k]_{mK+j}[nK+j]![2k]_{nK+j}}}\times\\ &\iint\limits_D\mathrm{d}^2\beta\frac{\beta^{mK+j}\beta^{*(nK+j)}}{A_j^Q(r^2)}|mK+j\rangle_Q\cdot{}_Q\langle nK+j|=\\ &\sum_{j=0}^{K-1}\rho_j^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}2\pi\int_0^R\frac{r^{2(nK+j)}r\mathrm{d}r}{A_j^Q(r^2)[nK+j]![2k]_{nK+j}}|nK+j\rangle_Q\cdot{}_Q\langle nK+j|=\\ &\sum_{j=0}^{K-1}\rho_j^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}P_Q(nK+j)|nK+j\rangle_Q\cdot{}_Q\langle nK+j|=\\ &\sum_{j=0}^{K-1}\sum_{m=0}^{\infty}P_Q^{-1}(mK+j)|mK+j\rangle_Q\cdot{}_Q\langle mK+j|\sum_{n=0}^{\infty}P_Q(nK\quad j)|nK+j\rangle_Q\cdot\end{aligned}$$

$$ {}_Q\langle nK + j| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_Q \cdot {}_Q\langle n| = $$

在上面的证明过程中我们利用了(21)式. 这表明，算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个本征态能构成一个完备的 Hilbert 空间，因此它们可作为一个独立的表象使用. 例如在这个表象中，Q 变形谐振子广义相干态[12] $|\beta\rangle_Q$ 可表示成为

$$ |\beta\rangle_Q = [F_Q(|\beta|^2)]^{-1/2} \sum_{j=0}^{K-1} [A_j^Q(|\beta|^2)]^{1/2} |\psi_j\rangle_Q. \tag{23} $$

4　算符 $b_{Q^-}^K$ 本征态的高阶压缩特性

与文献[19]相类似，我们定义两个可测量即两个厄米算符

$$ W_1(M) = (b_{Q^+}^M + b_{Q^-}^M)/2, \quad W_2(M) = \mathrm{i}(b_{Q^+}^M - b_{Q^-}^M)/2, \tag{24} $$

容易证明，它们之间满足对易关系$[W_1(M), W_2(M)] = (\mathrm{i}/2)[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]$和测不准关系

$$ {}_Q\langle(\Delta W_1)^2\rangle_Q \cdot {}_Q\langle(\Delta W_2)^2\rangle_Q \geqslant \frac{1}{16} |{}_Q\langle[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]\rangle_Q|^2; $$

与光场的振幅高次方压缩的定义[20]相类似，若

$$ {}_Q\langle(\Delta W_i)^2\rangle_Q - \frac{1}{4}{}_Q\langle[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]\rangle_Q < 0 \ (i = 1,2), $$

则称态在 W_i 方向上具有 M 次方压缩效应.

下面分 4 种情况来研究算符 $b_{Q^-}^K$ 的 K 个正交归一本征态的这种高阶压缩特性.

4.1　当 $M = nK$ $(n = 1,2,3,\cdots)$时

在这种情况下，对于算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个正交归一本征态，由(14)式可得

$$ {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^{2M}|\psi_j\rangle_Q = r^{2nK}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2nK\theta}, \quad {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^-}^{2M}|\psi_j\rangle_Q = r^{2nK}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2nK\theta}, \tag{27a} $$

$$ {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^{M}|\psi_j\rangle_Q = r^{nK}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nK\theta}, \quad {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^-}^{M}|\psi_j\rangle_Q = r^{nK}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nK\theta}, \tag{27b} $$

$$ {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^{M} b_{Q^-}^{M}|\psi_j\rangle_Q = r^{2nK}, \tag{27c} $$

式中 $\beta = r\exp(\mathrm{i}\theta)$. 将以上各式代入(26)式得

$$ {}_Q\langle\psi_j|(\Delta W_i)^2|\psi_j\rangle_Q - \frac{1}{4}{}_Q\langle\psi_j|[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]|\psi_j\rangle_Q = 0 \ (i = 1,2). \tag{28} $$

这表明这时算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个正交归一本征态都是算符 $W_1(M)$和 $W_2(M)$的最小测不准态.

4.2　当 K 为奇数且$M = nK + i$ $(n = 0,1,2,\cdots;\ i = 1,2,\cdots,K-1)$时

这时对于算符 $b_{Q^-}^K$ 的这 K 个正交归一本征态，均有

$$ {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^{2M}|\psi_j\rangle_Q = {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^-}^{2M}|\psi_j\rangle_Q = {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^{M}|\psi_j\rangle_Q = {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^-}^{M}|\psi_j\rangle_Q = 0, \tag{29} $$

而由(17)式我们可以求得

$$ {}_Q\langle\psi_S|b_{Q^+}^{M} b_{Q^-}^{M}|\psi_S\rangle_Q = r^{2(nK+i)} A_{K-i+S}^Q / A_S^Q, \quad (S = 0,1,2,\cdots,i-1), \tag{30} $$

$${}_Q\langle\psi_t|b_{Q^+}^M b_{Q^-}^M|\psi_t\rangle_Q = r^{2(nK+i)}A_{t-i}^Q/A_t^Q, \quad (t=i,i+1,\cdots,K-1). \tag{31}$$

因此对于态$|\psi_S\rangle_Q(S=0,1,2,\cdots,i-1)$和态$|\psi_t\rangle_Q(t=i,i+1,\cdots,K-1)$分别有

$${}_Q\langle\psi_S|(\Delta W_1)^2|\psi_S\rangle_Q - \frac{1}{4}{}_Q\langle\psi_S|[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]|\psi_S\rangle_Q = \frac{1}{2}r^{2(nK+i)}A_{K-i+S}^Q/A_S^Q, \tag{32}$$

$${}_Q\langle\psi_t|(\Delta W_1)^2|\psi_t\rangle_Q - \frac{1}{4}{}_Q\langle\psi_t|[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]|\psi_t\rangle_Q = \frac{1}{2}r^{2(nK+i)}A_{t-i}^Q/A_t^Q, \tag{33}$$

而由(13)式可以看出,当$z=|\beta|^2\neq0$时总有$A_j^Q(z)>0$,所以由以上两式可以得到,这时对于算符$b_{Q^-}^K$的这K个正交归一本征态,在W_1方向上不会呈现M次方压缩效应(同理,对于在W_2方向上也有类似的结论).

4.3 当K为偶数且$M=nK+i$ $(n=0,1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,K/2-1,K/2+1,\cdots,K-1)$时

与上面对4.2节的讨论相类似,可以得到在此种情况下算符$b_{Q^-}^K$的这K个正交归一本征态也都不会呈现M次方压缩效应.

4.4 当K为偶数且$M=(n+1/2)K$ $(n=0,1,2,\cdots)$时

在此种情况下,对于算符$b_{Q^-}^K$的这K个正交归一本征态均有

$${}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^{2M}|\psi_j\rangle_Q = r^{(2n+1)K}e^{-i(2n+1)K\theta}, \quad {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^-}^{2M}|\psi_j\rangle_Q = r^{(2n+1)K}e^{i(2n+1)K\theta}, \tag{34a}$$

$${}_Q\langle\psi_j|b_{Q^+}^M|\psi_j\rangle_Q = {}_Q\langle\psi_j|b_{Q^-}^M|\psi_j\rangle_Q = 0. \tag{34b}$$

又有(17)式可以得到

$${}_Q\langle\psi_S|b_{Q^+}^M b_{Q^-}^M|\psi_S\rangle_Q = r^{(2n+1)K}A_{K/2+S}^Q/A_S^Q, \quad (S=0,1,2,\cdots,K/2-1), \tag{35}$$

$${}_Q\langle\psi_t|b_{Q^+}^M b_{Q^-}^M|\psi_t\rangle_Q = r^{(2n+1)K}A_{t-K/2}^Q/A_t^Q, \quad (t=K/2,K/2+1,\cdots,K-1). \tag{36}$$

所以对于态$|\psi_S\rangle_Q(S=0,1,2,\cdots,K/2-1)$和态$|\psi_t\rangle_Q(t=K/2,K/2+1,\cdots,K-1)$分别有

$${}_Q\langle\psi_S|(\Delta W_1)^2|\psi_S\rangle_Q - \frac{1}{4}{}_Q\langle\psi_S|[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]|\psi_S\rangle_Q = \frac{1}{2}r^{(2n+1)K}[A_{K/2+S}^Q/A_S^Q + \cos(2n+1)K\theta], \tag{37}$$

$${}_Q\langle\psi_t|(\Delta W_1)^2|\psi_t\rangle_Q - \frac{1}{4}{}_Q\langle\psi_t|[b_{Q^-}^M, b_{Q^+}^M]|\psi_t\rangle_Q = \frac{1}{2}r^{(2n+1)K}[A_{t-K/2}^Q/A_t^Q - \cos(2n+1)K\theta] \tag{38}$$

由(37)和(38)式可得这时态$|\psi_S\rangle_Q(S=0,1,2,\cdots,K/2-1)$和$|\psi_t\rangle_Q(t=K/2,K/2+1,\cdots,K-1)$在$W_1$方向上可呈现$M$次方压缩的条件分别为

$$A_{K/2+S}^Q/A_S^Q + \cos(2n+1)K\theta < 0, \tag{39}$$

$$A_{t-K/2}^Q/A_t^Q - \cos(2n+1)K\theta < 0. \tag{40}$$

如上所述,由于当$z=|\beta|^2\neq0$时总有$A_j^Q(z)>0$,所以此时当K(K为偶数)和n分别取某一任意确定值时,只要适当选取复参数β的模值r和幅角θ,不等式(39)或(40)式总可以被满足,因此这时态$|\psi_j\rangle_Q$在W_1方向上总可以呈现M次方[$M=(n+1/2)K$; $n=0$,

1,2,…;且 K 为偶数]压缩效应. 同样,对于在 W_2 方向上也有类似的结论

5 结论

本文从非简谐振子的谱生成代数和 Q 变形的非简谐振子代数[12]出发,在文献[12,13]的基础上,构造出了 Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂 b_{Q-}^K ($K\geqslant3$)的 K 个正交归一化本征态,给出了这些本征态完备性证明以及有关的数学性质,并且考察了它们的高阶压缩特性. 结果表明:(ⅰ)算符 b_{Q-}^K 的这 K 个本征态可构成一个完备的 Hilbert 空间,即它们可作为一个独立的表象使用;(ⅱ)只要适当选取复参数 β 的模值 r 和幅角 θ,当 K 为某任意确定的偶数时,算符 b_{Q-}^K 的这 K 个正交归一本征态在 $W_1(M)$或 $W_2(M)$方向上,总可以呈现 M 次方[$M=(n+1/2)K$; $n=0,1,2,\cdots$]压缩效应. 当变形参数 $Q\rightarrow1$ 时,本文所得结论与文献[13]完全相一致. 通过本文的讨论,初步揭示出了 Q 变形非简谐振子湮没算符高次幂本征态的有关性质;可以相信,对算符 b_{Q-}^K ($K\geqslant3$)本征态量子统计性质的深入研究,对于人们进一步揭示 Q 变形非简谐振子势场的规律将具有一定的学术参考价值.

参考文献(References)

1 Drinfeld V G. Proc. ICM Berkelev., 1986, 798

2 Klauder J R, Skagerstam B S. *Coherent States*. Singapore: World Scientific 1985

3 Biendenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**:L873

4 Gray R W. J. Phys., 1990, **A23**:L954

5 WANG FaBo, KUANG LeMan. J. Phys., 1993, **A26**:293

6 ZHU CongXu, WANG FaBo et al. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1994, **43**:1262
(朱从旭,王发伯等. 物理学报,1994,**43**:1262)

7 Pocek M. Phys. Lett., 1991, **B255**:554

8 Delbecq C, Quesne C. J. Phys., 1993, **A26**:L127

9 CHANG Zhe, CHEN Wei, GUO HanYing. J. Phys., 1990, **A23**:4185

10 CHANG Zhe, CHEN Wei, YAN Hong. J. Phys., 1990, **A23**:4235

11 Codriansky S. Phys. Lett., 1994, **A184**:381

12 XU ZiWen. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23**:436
(徐子驳. 高能物理与核物理,1999,**23**:436)

13 WANG JiSuo, LIU TangKun, ZHAN MingSheng. Acta Optica Sinica (in Chinese), 2000, **20**(10)
(王继锁,刘堂昆,詹明生. 光学学报,2000,**20**(10))

14 Chaichian M, Ellnias D et al. Phys. Rev. Lett., 1990, **65**:980

15 Bonatsos D, Daskaloyannis C. Phys. Lett., 1992, **B278**:1

16 ZHU DongPei. J. Phys., 1987, **A20**:4331

17 XU ZiWen. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1996, **45**:1807
(徐子驳. 物理学报,1996,**45**:1807)

18 HAO SanRu. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1993, **42**:691
(郝三如. 物理学报,1993,**42**:691)

19 YU ZhaoXian, WANG JiSuo et al. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1997, **46**:1693

(丁肇贤,王继锁等. 物理学报,1997,**46**:1693)
20 ZHANG Z M, XU L et al. Phys. Lett., 1990, **A150**:27

Eigenstates of the Higher Powers of Annihilation Operator of a Q-Deformed Non-harmonic Oscillator and Their Higher-Order Squeezing*

WANG JiSuo[1-3,1)] LIU TangKun[1,2,4] ZHAN MingSheng[1]

1 (*State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China*)

2 (*Laser Spectroscopy Laboratory, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*)

3 (*Department of Physics, Liaocheng Teachers University, Liaocheng 252059, China*)

4 (*Department of Physics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*)

Abstract The eigenstates of the Kth powers ($K \geqslant 3$) of the annihilation operator of the Q-deformed non-harmonic oscillator are constructed, and their completeness and higher-order squeezing properties are investigated. The results show that they form a complete Hilbert space, and the Mth order [$M=(n+1/2)K$; $n=0,1,2,\cdots$] squeezing effects exist in all of the eigenstates when K is even.

Key words non-harmonic oscillator, Q-deformation, higher power of the annihilation operator, eigenstate, completeness, higher-order squeezing

---

Received 27 December 1999

* Supported by National Natural Science Foundation of China and Natural Science Foundation of Shandong Province, China

1) E-mail: jswang@371.net