第23卷 第5期 1999 年5月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.23, No.5 May, 1999

Q形变的非简谐振子广义相干态*

徐 子 驳

(北京机械工业学院基础部 北京 100085)

摘要 利用变换算符导出了Q形变的非简谐振子代数,由此得到Q形变的非简谐振子广义相干态.这些状态具有过完备性,是Q形变的自然算符的极小测不准状态.在主压缩区间中偶相干态的相对压缩率随形变程度的增大而增大.

关键词 非简谐振子 Q形变 广义相干态

1 引言

近年来,李代数和李群的量子形变引起了人们的普遍兴趣[1,2].作为物理理论中的一个基本模型,简谐振子代数的Q形变已经得到了较广泛的研究[3—5]. S. Codiansky发现Q形变的简谐振子相干态具有一些新的重要物理性质[6].本文的目的是把这方面的研究推广到非简谐振子模型中.

按文献[7],非简谐振子哈密顿算符的无量纲形式为

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{A}{2x^2}\ , \ A > 0 \tag{1}$$

与之对应的湮没和产生算符b_-和b_+为[8]

$$b_{\pm} = \frac{1}{2}(X \mp \mathrm{i}P)\ , \tag{2}$$

式中X和P分别为非简谐振子势场中粒子的自然坐标算符和自然动量算符.其明显的形式如下:

$$\begin{aligned} X &= x^2 - H\ , \\ P &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

由公式(1)—(3)不难推出

1998-04-20收稿

* 北京机械工业学院科研基金资助课题

436—444

$$
\begin{aligned}
&[H,\ b_{\pm}] = \pm 2b_{\pm}\ , \\
&[b_{-},\ b_{+}] = H\ .
\end{aligned} \tag{4}
$$

公式(4)构成了非简谐振子的谱生成代数，是本文研究的出发点．在第 2 节中，构造出 Q 形变的非简谐振子代数；第 3 节中引入非简谐振子广义相干态的 Q 形变；第 4 节是非简谐振子广义相干态 Q 形变后的过完备性关系的研究；第 5 节讨论了该形变的广义相干态的一些性质；第 6 节分析了 Q 形变广义相干态的叠加态的非经典性质及其与形变参数的关系；最后给出了一个简明的总结．

2　非简谐振子代数的 Q 形变

为了得到非简谐振子代数 Q 形变的适当形式，先来回顾一下简谐振子代数的 Q 形变过程．已知简谐振子代数由粒子数算符 N 和产生、湮没算符 $a_{\pm}$ 生成，其对易关系为

$$
\begin{aligned}
&[N,\ a_{\pm}] = \pm a_{\pm}\ , \\
&[a_{-},\ a_{+}] = (N+1) - N = 1\ .
\end{aligned} \tag{5}
$$

而 Q 形变的简谐振子代数的对易关系为[9]

$$
\begin{aligned}
&[N,\ a_{Q^{\pm}}] = \pm a_{Q^{\pm}}\ , \\
&a_{Q^{+}}\, a_{Q^{-}} = [N]\ , \\
&a_{Q^{-}}\ a_{Q^{+}} = [N+1]\ ,
\end{aligned} \tag{6}
$$

其中 $a_{Q^{\pm}}$ 为 Q 形变后的产生和湮没算符，而记号

$$
[x] = \frac{Q^{x}-1}{Q-1}\ ,\quad Q\in[0,1]\ . \tag{7}
$$

容易验证(6)式可以通过变换

$$
\begin{cases}
a_{Q^{-}} = a_{-}\varphi(N)\ , \\
a_{Q^{+}} = \varphi(N)\, a_{+}\ ,
\end{cases} \tag{8}
$$

得到[9]，其中变换算符 $\varphi(N)$ 为

$$
\varphi(N) = \sqrt{[N]\ /\ N}\ . \tag{9}
$$

对非简谐振子，同样可以引入粒子数算符

$$
N = \frac{H}{2} - R\ , \tag{10}
$$

其中常数　$k = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2A + \dfrac{1}{4}}\right)$ ．

由公式(4)经过简单的推导可以得到

$$
\begin{aligned}
&[N,\ b_{\pm}] = \pm b_{\pm} \quad , \\
&[b_{-},\ b_{+}] = (N+1)(N+2k) - N(N+2k-1) \ .
\end{aligned}
\tag{11}
$$

定义 Q 形变的非简谐振子代数的产生、湮没算符 $b_{Q^{\pm}}$ 为

$$
\begin{cases}
b_{Q^-} = b_{-}\varphi(N) \quad , \\
b_{Q^+} = \varphi(N)\ b_{+} \ ,
\end{cases}
\tag{12}
$$

适当地选取变换算符

$$
\varphi(N) = \sqrt{\frac{[N][N+2k-1]}{N(N+2k-1)}} \ ,
\tag{13}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
&[N,\ b_{Q^{\pm}}] = \pm b_{Q^{\pm}} \quad , \\
&[b_{Q^-}\ ,\ b_{Q^+}] = [N+1]\ [N+2k] - [N][N+2k-1] \ .
\end{aligned}
\tag{14}
$$

上式给出了 Q 形变非简谐振子代数的基本公式．显然当变形参数 $Q\to 1$ 时，$[x]\to x$，即回到了无形变的情况．

3 Q 形变的非简谐振子广义相干态

设 $|n\rangle$ 为非简谐振子哈密顿算符 H 的第 n 个本征态，$n=0,1,2,\cdots$，由公式(4)不难得到

$$
\begin{aligned}
&H|n\rangle = 2(n+k)|n\rangle \quad , \\
&b_{-}|n\rangle = \sqrt{n(n+2k-1)} \quad |n\rangle \quad , \\
&b_{+}|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2k)} \quad |n+1\rangle \ ,
\end{aligned}
$$

由(10)、(12)和(15)式可推出

$$
\begin{aligned}
&N|\ n\rangle = n|n\rangle \quad , \\
&b_{Q^-}|n\rangle = \sqrt{[n][n+2k-1]} \quad |n-1\rangle \quad , \\
&b_{Q^+}|n\rangle = \sqrt{[n+1][n+2k]} \quad |n+1\rangle \quad .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

按文献[10]，Q 形变的广义相干态 $|\beta\rangle$ 可定义为湮没算符 b_{Q^-} 的本征态，即

$$
b_{Q^-}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \quad ,
\tag{17}
$$

利用本征态集合 $\{|n\rangle|n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 的完备性，可以把 $|\beta\rangle$ 表示为

$$
|\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle
$$

用湮没算符 b_{Q^-} 作用在上式两边，再比较各个本征态 $|n\rangle$ 的系数，即得到一个关于 C_n 的递推公式

$$C_n = \frac{\beta}{\sqrt{[n][n+2k-1]}} C_{n-1} \quad ,$$

由此得到 Q 形变的广义相干态为

$$|\beta\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{[n]![2k]_n}} \ |n\rangle \ , \tag{18}$$

式中　$[n]! = [n]\cdot[n-1]\cdots[2]\cdot[1]$ 而
$[x]_n = [x]\cdot[x+1]\cdots[x+n-1]$.

为方便，引入形变的超几何函数

$$F_Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]![2k]_n} \quad , \tag{19}$$

令 $R = \dfrac{1}{1-Q}$ ，容易算出上式右边级数的收敛半径为 R^2. 利用(19)式，归一化系数 C_0 可表示为 $C_0 = [F_Q(|\beta|^2)]^{-\frac{1}{2}}$，它给出了相干整参数 β 的取值范围为 $|\beta| < R$.

应用(16)式可以得到表达式

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]![2k]_n}} \ b_{Q^+}^n \ |0\rangle \quad ,$$

于是前面得到的 Q 形变非简谐振子广义相干态(简记为 Q − NHCS)可以简洁地表示为

$$|\beta\rangle = C_0 F_Q(\beta b_{Q^+})|0\rangle \quad . \tag{20}$$

当形变参数 $Q\to1$ 时，得到与文献 [8] 中同样的结果，即无形变的非简谐振子广义相干态.

4　Q–NHCS的相交性和完备性

下面研究上节所得到的 Q–NHCS的基本性质. 由于湮没算符 b_{Q^-} 不是厄密算符，两个不同本征值的 Q–NHCS$|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 的内积为

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \frac{F_Q(\bar{\alpha}\beta)}{\sqrt{F(|\alpha|^2)\cdot F_Q(|\beta|^2)}} \quad , \tag{21}$$

上式的右边在一般情况下不为零，这表明 Q 形变后非简谐振子相干态仍然保持相交性.

为证明相干态集合 $\{|\beta\rangle|\ |\beta|\langle R\}$ 具有完备性，可采用密度算符方法[9]. 容易算出在相干态 $|\beta\rangle$ 中，粒子处于第 n 个能级的几率为

$$P_n(\beta) = |\langle n|\beta\rangle|^2 = \frac{|\beta|^{2n}}{[n]![2k]_n \ F_Q(|\beta|^2)} \ , \tag{22}$$

定义密度算符(矩阵) P 为

$$P = \sum_n P_n | n\rangle\langle n| \quad , \tag{23}$$

其中 $P_n = \iint\limits_D P_n(\beta)\,\mathrm{d}^2\beta$,积分区域 D 为 $|\beta| < R$. 则推广的完备性公式

$$\rho^{-1}\iint\limits_D |\beta\rangle\langle\beta|\,\mathrm{d}^2\beta = 1 \tag{24}$$

成立. 证明如下:

在β复平面中取极坐标$\beta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\mathrm{d}^2\beta = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$,则几率 P_n可化简为

$$P_n = \frac{2\pi}{[n]!\,[2k]_n}\int_0^R \frac{r^{2n+1}\,\mathrm{d}r}{F_Q(r^2)} \quad , \tag{25}$$

而(24)式的左边成为

$$\rho^{-1}\iint\limits_D |\beta\rangle\langle\beta|\mathrm{d}^2\beta = \rho^{-1}\iint\limits_D \sum_{n,m}\frac{\beta^n\bar{\beta}^m\,\mathrm{d}^2\beta}{F_Q(|\beta|^2)\sqrt{[n]!\,[2k]_n[m]!\,[2k]_m}}\;|n\rangle\langle m| =$$

$$\rho^{-1}\sum_{n,m}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{[n]!\,[2k]_n[m]!\,[2k]_m}}\int_0^R\frac{r^{n+m+1}\mathrm{d}r}{F_Q(r^2)}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\rho^{-1}\sum_{n,m}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{[n]!\,[2k]_n[m]!\,[2k]_m}}\int_0^R\frac{r^{n+m+1}\mathrm{d}r}{F_Q(r^2)}\cdot 2\pi\delta_{n,m} =$$

$$\rho^{-1}\sum_n\frac{2\pi\,|n\rangle\langle n|}{[n]!\,[2k]_n}\int_0^R\frac{r^{2n+1}\,\mathrm{d}r}{F_Q(r^2)} = \rho^{-1}\sum_n P_n|n\rangle\langle n| = \rho^{-1}\rho = 1 \quad . \tag{26}$$

在证明过程中用到了(25)式.

5 Q-NHCS中的测不准关系及有关性质

为讨论在Q-NHCS中的测不准关系,定义两个较一般的变形算符,即厄密算符 Y和 Z,如下[6]:

$$\begin{aligned} Y &= rb_{Q^-} + \bar{r}\,b_{Q^+} \quad , \\ Z &= sb_{Q^-} + \bar{s}b_{Q^+} \quad , \end{aligned} \tag{27}$$

其中 r 和 s 为复参数,$\bar{r}$, $\bar{s}$ 表示对应的共轭复数. 当 $r = 1$, $s = \mathrm{i}$ 时, Y和 Z分别成为自然算符 X和 P 的 Q 形变.

由(12)-(14)可以推出

$$b_{Q^-}b_{Q^+}-Qb_{Q^+}b_{Q^-}=[2N+2k]\ ,\tag{28a}$$

即

$$b_{Q^-}b_{Q^+}=Qb^+b+[2N+2k]\ ,\tag{28b}$$

由此可得两个一般变形算符 Y和 Z的对易关系

$$[Y,\ Z]=(r\bar{s}-\bar{r}s)[b_{Q^-},\ b_{Q^+}]=(r\bar{s}-\bar{r}s)T\ ,\tag{29}$$

其中算符 T定义为

$$T=[2N+2k]-(1-Q)b_{Q^+}b_{Q^-}\ .\tag{30}$$

由第 3 节中的结果不难算出在状态$|\beta\rangle$中，一般变形算符 Y、Z及其平方的平均值为

$$\begin{aligned}
&\langle Y\rangle_\beta=r\beta+\bar{r}\bar{\beta}\ ,\\
&\langle Z\rangle_\beta=s\beta+\bar{s}\bar{\beta}\ ,\\
&\langle Y^2\rangle_\beta=(r\beta+\bar{r}\bar{\beta})^2+|r|^2\langle T\rangle_\beta\ ,\\
&\langle Z^2\rangle_\beta=(s\beta+\bar{s}\bar{\beta})^2+|s|^2\langle T\rangle_\beta\ ,
\end{aligned}\tag{31}$$

相应的量子涨落为

$$\begin{aligned}
&(\Delta Y)^2=|r|^2\langle T\rangle_\beta\ ,\\
&(\Delta Z)^2=|s|^2\langle T\rangle_\beta\ .
\end{aligned}\tag{32}$$

而对易子$[Y,Z]$的平均值为

$$\langle[Y,\ Z]\rangle_\beta=(r\bar{s}-\bar{r}s)\langle T\rangle_\beta=2\mathrm{i}\sin\theta|rs|\langle T\rangle_\beta\ ,\tag{33}$$

上式中θ为参数 r 与 s 的位相差．由此得到

$$\begin{cases}
(\Delta Y)(\Delta Z)>\dfrac{1}{2}|\langle[Y,\ Z]\rangle_\beta|\ ,\ 当\theta\neq\left(L+\dfrac{1}{2}\right)\pi\\
(\Delta Y)(\Delta Z)=\dfrac{1}{2}|\langle[Y,\ Z]\rangle_\beta|\ ,\ 当\theta=\left(L+\dfrac{1}{2}\right)\pi
\end{cases}\ .\tag{34}$$

这表明，无论β取什么值，在 Q-NHCS中，自然算符 X和 P的形变算符总是满足最小测不准关系．

由于量子涨落$(\Delta Y)^2$，$(\Delta Z)^2$和对易子平均值$\langle[Y,Z]\rangle_\beta$均与算符 T的平均值$\langle T\rangle_\beta$成正比，下面讨论$\langle T\rangle_\beta$与相干态参数β的关系．由公式(30)可得

$$\langle T\rangle_\beta=\frac{1}{F_Q(|\beta|^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[2n+2k]}{[n]!\,[2k]_n}|\beta|^{2n}-(1-Q)|\beta|^2\ .\tag{35}$$

上式说明$\langle T\rangle_\beta$仅是$|\beta|$的函数，与β的位相无关．

当$|\beta|\to0$时，容易得到

$$\langle T\rangle_\beta\to[2k]\ .\tag{36}$$

当$|\beta|\to R$时，(35)式右边第一部分的分子和分母都发散，但其比值存在．由 n 充分大

时的各项决定．由于 n 足够大时 $[2n+2k] \sim \frac{1}{1-Q}$ ，该部分分子和分母的比值的极限为 $\frac{1}{1-Q}$；而第二部分的极限为 $(1-Q)R^2 = \frac{1}{1-Q}$ ．因此得到

$$\langle T \rangle_\beta \to 0 \ , \tag{37}$$

即在 $|\beta| \to R$ 时，一般形变算符 X 和 Y 的量子涨落及对易式平均值均趋于零．这表明状态 $|\beta\rangle$ 趋于理想经典态，与无形变时 $\beta \to \infty$ 相干态成为理想经典态的结果是一致的．而后者可以看成前者在 $Q \to 1$ 时的极限情况．

6 Q-NHCS叠加态的非经典性质

文献[11]研究了NHCS的叠加态性质，发现奇偶相干态是最显著的非经典状态．下面考虑 Q-NHCS的叠加态性质．为简单起见，本文中仅讨论偶奇 Q-NHCS，即

$$|\beta\rangle_{e,o} = \frac{1}{2}(|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle) = F_{e,o}(\beta b_{Q_+})|0\rangle \ , \tag{38}$$

其中

$$F_{e,o}(x) = \frac{1}{2}(F_Q(x) \pm F_Q(-x)) \ . \tag{39}$$

为了方便，未对(38)式进行归一化．由前面的结果不难验证偶奇 Q-NHCS具有如下性质：

$$\begin{gathered} {}_e\langle\alpha|\beta\rangle_o = 0, \quad {}_{e,o}\langle\beta|\beta\rangle_{e,o} = F_{e,o}(|\beta|^2) \quad , \\ b_{Q^-}|\beta\rangle_{e,o} = \beta|\beta\rangle_{o,e}, \ b_{Q^-}^2|\beta\rangle_{e,o} = \beta^2|\beta\rangle_{e,o} \quad . \end{gathered} \tag{40}$$

利用(29)式，即可得到形变的自然算符 $X_Q = b_{Q^+} + b_{Q^-}$ 和 $P_Q = \mathrm{i}(b_{Q^+} - b_{Q^-})$ 的对易关系

$$[X_Q, \ P_Q] = \mathrm{i}T \ , \tag{41}$$

由此不难求出偶奇 Q-NHCS中形变自然算符的量子涨落分别为

$$\begin{gathered} \langle \Delta X_Q^2 \rangle_{e,o} = \langle T \rangle_{e,o} + 2\rho^2\left[\cos2\varphi + \left(\frac{F_o}{F_e}\right)^{\pm1}\right] \ , \\ \langle \Delta P_Q^2 \rangle_{e,o} = \langle T \rangle_{e,o} + 2\rho^2\left[-\cos2\varphi + \left(\frac{F_o}{F_e}\right)^{\pm1}\right] \ . \end{gathered} \tag{42}$$

式中 $\rho = |\beta|$, $\varphi = \arg(\beta)$, $F_{e,o} = F_{e,o}(\rho^2)$. 由于 $|\cos2\varphi|$ 的最大值为1，故当 $F_o < F_e$ 时偶的 Q-NHCS会出现压缩效应，形变自然算符的最大相对压缩率为

$$\delta_e = 2\rho^2\left(1 - \frac{F_o}{F_e}\right)\Big/\langle T \rangle_e \quad , \tag{43}$$

而当 $F_o > F_e$ 时，奇的 Q-NHCS会出现压缩效应．相应的最大相对压缩率为

$$\delta_o = 2\rho^2\left(1 - \frac{F_e}{F_o}\right)\Big/\langle T \rangle_o \quad . \tag{44}$$

由上节可知相干态参数ρ的取值范围为$[0, R]$，$F_o = F_e$的零点将此范围分成若干个压缩子区间，随着ρ的增加偶奇 Q-NHCS交替地出现压缩效应．

由于$\langle T\rangle$随着ρ的增大以相当于指数的方式增大，因此压缩效应最强的主压缩区间应该在第一个子区间，在此区间中只有偶的 Q-NHCS存在压缩效应．数值计算表明，在此情况下相对压缩率随着形变程度的增加而增加．这是一个非常有意义的结果

图 1，2 给出了当 k 取 1 和 2 时主压缩区间中相对压缩率δ与相干态参数ρ和形变参数 Q 的关系．

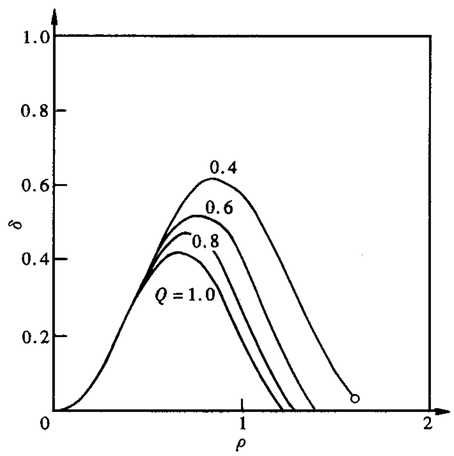

图1　k=1情况

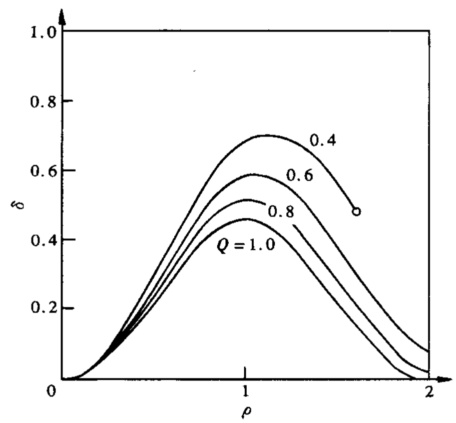

图2　k=2情况

7　结论

从非简谐振子的谱生成代数出发，利用变形变换得到了 Q 形变的非简谐振子代数，从而进一步构造出了 Q 形变的非简谐振子广义相干态．证明了该相干态集合具有相交性和完备性，并且发现相干态参数β的模$|\beta|$的取值有个上限 $R = \dfrac{1}{1-Q}$ ．当$|\beta| \to R$时，该 Q 形变广义相干态成为理想经典状态．当形变参数 Q 趋于 1 时，文中所得到的结果与文献[8]中的非形变情况一致．而叠加的 Q 形变广义相干态，在主压缩区间中偶相干态的相对压缩率随着形变程度的增大而变大．

参　考　文　献

1　Pocek M. Phys. Lett., 1991, **B255**: 554

2　Delbecq C, Quesne C. J. Phys., 1993, **A26**: L127

3　Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**: L872

4　Chang Zhe, Chen Wei, Guo Hanying. J. Phys., 1990, **A23**: 4185

5　Chang Zhe, Chen Wei, Yan Hong. J. Phys., 1990, **A23**: 4235

6　Codriansky S. Phys. Lett., 1994, **A184**: 381

7　Zhu Dongpei. J. Phys., 1987, **A20**: 4331

8 Xu Ziwen. ACTA PHYSICA SINICA (in Chinese), 1996, **45**:1807
(徐子驳. 物理学报, 1996, **45**:1807)
9 Hao Sanru. ACTA PHYSICA SINICA (in Chinese), 1993, **42**:1057
(郝三如. 物理学报, 1993, **42**:1057)
10 Barut A O, Girardillo L. Commun. Math. Phys., 1971, **21**:41
11 Ni Zhixiang. ACTA PHYSICA SINICA (in Chinese), 1997, **47**:1687
(倪致祥. 物理学报, 1997, **47**:1687)

Q-Deformation of Generalized Coherent States in the Non-harmonic Oscillator Potential*

Xu Ziwen

(*Department of Basic Sciences, Beijing Institute of Machinery, Beijing* 100085)

Abstract By using the transforming operators, the Q-deformation of the nonharmonic oscillator algebra is obtained. Based on the algebra, the Q-deformation of generalized coherent states are introduced. It is found that these states have the overcompleteness and they are the minimal uncertainty states for the Q-deformed natural operators, and the relative rate of squeezing of the Q-deformation of generalized even coherent state increases with the degree of deformation in the principal squeezing region.

Key words non-harmonic oscillator, Q-deformation, generalized coherent state

Received 20 April 1998

* Supported by the Natural Science Fundation of Beijing Institute of Machinery