第23卷 第3期
1999 年3月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.23, No.3
Mar., 1999

对称 Pöschl-Teller 势的非线性谱生成代数*

倪致祥[1)]
(阜阳师范学院物理系 阜阳 236032)

摘要 利用哈密顿和自然算符,构造出对称 Pöschl-Teller 势的非线性谱生成代数,给出了一种描述和求解微观粒子运动的具有明显物理意义的新代数方法.当参数趋于零时,该代数成为振子代数,因而又可以看成是后者的一种新的非线性形变.

关键词 自然算符 对称 Pöschl-Teller 势 非线性李代数 形变谱振子

1 引言

作为物理学中的一个重要模型,Pöschl-Teller 势(简记为 P-T 势)在原子、分子物理和核物理等领域有广泛的应用[1].它是量子力学中少数几个严格可解势之一.近年来,人们发展了群论[2]、超对称性和因子分解[3]等多种代数方法来确定系统的能量本征值和对应的本征态,取得了很大的成功.

最近,以 q 形变李代数(量子群)[4]为特例的一般非线性李代数引起了人们的重视[5,6].在研究中我们发现从对称 P-T 势场中运动粒子的自然变量出发,很自然地得到一个非线性谱生成代数.将该李代数化为正则形式后,与零根对应的基算符为哈密顿算符,与非零根对应的为能量阶梯算符.因此它能够提供一种对系统进行自然描述和简便求解的新代数方法.

由于对称 P-T 势在小参数极限下变成简谐振子势,因此所得到的非线性谱生成代数可以看成振子代数的一种新的非线性形变.而在零势能极限下对称 P-T 势成为对称的一维无限深方阱势,因而作为副产品,还得到了后者的一个非线性谱生成代数.

2 对称 P-T 势的自然算符及其所生成的代数

对称的 P-T 势是量子力学严格可解势,其具体形式可表示为[2]

1998-01-08收稿,1998-03-29收修改稿
* 国家自然科学基金和安徽省教委资助

1) 华东理论物理研究所,上海 200237

289—297

$$V(x) = V_0 \mathrm{tg}^2(kx), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}\right). \tag{1}$$

该势场在 $x=0$ 处有唯一极小值 $V=0$. 按文献[7],该势场中运动的粒子存在两个自然运动变量,自然坐标 X_c 和自然动量 P_c,它们分别满足与经典谐振子的普通坐标 x 和普通动量 p 相同形式的运动方程,即

$$\begin{aligned} X_c &= A\sin\omega_c t, \\ P_c &= m\omega_c A\cos\omega_c t, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 ω_c 为自然运动的角频率,A 为振幅. 在一般情况下,ω_c 和 A 都是粒子能量

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + V(x) \tag{3}$$

的函数. 由(2)式容易看出

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= \frac{1}{m} P_c, \\ \dot{P}_c &= -m\omega_c^2 X_c. \end{aligned} \tag{4}$$

上式与经典谐振子普通变量 x、p 的运动微分方程也相同. 利用(2)—(4)式和 P-T 势场中粒子的普通变量 x、p 所满足的哈密顿方程,不难得到自然变量与普通变量之间的关系为

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{1}{k} \sin kx, \\ P_c &= p \cdot \cos kx. \end{aligned} \tag{5}$$

而自然频率 ω_c 和振幅 A 分别为

$$\begin{aligned} \omega_c &= k\left(\frac{2(V_0+E)}{m}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ A &= \frac{1}{k}\left(\frac{E}{E+V_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

在上式的推导中适当地选取了振幅 A 的系数,以保证自然变量与对应的普通变量有相同的量纲.

由(2)式可以看出,自然变量 X_c、P_c 与能量 E 之间的关系为

$$m^2\omega_c^2 X_c^2 + P_c^2 = A^2. \tag{7}$$

在对称的 P-T 势场情况下,上式成为

$$2m(V_0+E)k^2 X_c^2 + P_c^2 = 2mE, \tag{8}$$

与经典谐振子的对应公式很相似.

应用 Weyl 规则[8] 对自然变量的表达式(5)进行量子化,得到对应的自然坐标算符 $\hat{X}$

和自然动量算符 $\hat{P}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \frac{1}{k}\sin kx,\\ \hat{P} &= \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos kx + \cos kx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

对 (8) 式进行量子化后，可以得到

$$2mk^2\hat{X}^2\left(\hat{H} + V_0 - \frac{1}{4}\varepsilon\right) + \hat{P}^2 = 2m\left(\hat{H} + \frac{1}{2}\varepsilon\right) + \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\{\hat{P}, \hat{X}\}, \tag{10}$$

其中参数 $\varepsilon = \hbar^2 k^2/(2m)$ 可看成 P-T 势的特征能量，

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \tag{11}$$

为哈密顿算符.

由 (9) 和 (11) 两式，不难得到如下的对易关系

$$\begin{aligned}&[\hat{H}, \hat{X}] = -(\mathrm{i}\hbar/m)\hat{P},\\ &[\hat{H}, \hat{P}] = 2\mathrm{i}\hbar k^2\hat{X}\left(\hat{H} + V_0 - \frac{1}{4}\varepsilon\right) + 2\varepsilon\hat{P},\\ &[\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}\hbar(1 - k^2\hat{X}^2).\end{aligned} \tag{12}$$

上式表明自然算符 $\hat{X}$、$\hat{P}$ 和哈密顿算符 $\hat{H}$ 共同生成了一个封闭的非线性李代数. 我们把该李代数称为对称 P-T 势的非线性谱生成代数.

3　非线性谱生成代数的正则形式

为了便于研究上节得到的谱生成代数的性质，应设法对它进行嘉当分解，化为正则形式[9]. 由于上述李代数是非线性的，一般来讲，已经不能采用线性李代数的经典分解方法. 然而如果把该李代数看成是建立在一个由哈密顿算符 $\hat{H}$ 生成的域 F 上，则 (12) 式中的前两个对易式对自然算符 $\hat{X}$ 和 $\hat{P}$ 都是线性的，在这个意义上我们仍然可以沿用经典分解方法. 显然 $\hat{H}$ 为嘉当子代数的基，与零根相对应；另外两个与非零根对应的基算符可由本征方程

$$ad(\hat{H})a = [\hat{H}, a] = a\lambda \tag{13}$$

得到. 由上面的分析，基算符 a 可以由 $\hat{X}$ 和 $\hat{P}$ 线性组合而成，即

$$a = \hat{X}\cdot C_1 + \hat{P}\cdot C_2, \tag{14}$$

上式中的组合系数 C_1 和 C_2 都应在 F 域上，即都应为 $\hat{H}$ 的函数.

将 (14) 式代入 (13) 式，可以得到一个 F 域上的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i}\hbar k^2\left(\hat{H}+V_0-\frac{1}{4}\varepsilon\right) \\ -\mathrm{i}\hbar/m & 2\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

方程组(15)的非零解条件为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2\mathrm{i}\hbar k^2\left(\hat{H}+V_0-\frac{1}{4}\varepsilon\right) \\ -\mathrm{i}\hbar/m & 2\varepsilon-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{16}$$

解此方程即可得到本征值为

$$\lambda_{\pm}=\varepsilon\pm\sqrt{4\varepsilon(\hat{H}+V_0)}\ . \tag{17}$$

上述本征值组成了非线性谱生成代数(12)式的根系.

设与本征值 $\lambda_{\pm}$ 对应的本征矢(即基算符)分别为 $a_{\pm}$,则有

$$[\hat{H},a_{\pm}]=a_{\pm}\left(\varepsilon\pm\sqrt{4\varepsilon(\hat{H}+V_0)}\right). \tag{18}$$

由(18)式容易看出

$$\hat{H}a_{-}=a_{-}\left(\hat{H}+\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon(\hat{H}+V_0)}\right), \tag{19}$$

由上式可以推出

$$\left(\hat{H}+\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon(\hat{H}+V_0)}\right)a_{-}=a_{-}\hat{H}. \tag{20}$$

对(20)式两边取厄密共轭,即可得到

$$\hat{H}a_{-}^{+}=a_{-}^{+}\left(\hat{H}+\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon(\hat{H}+V_0)}\right), \tag{21}$$

在上式的推导中已经利用了 $\hat{H}$ 为厄密算符,即 $\hat{H}^{+}=\hat{H}$ 这一性质. (21)式等价于

$$[\hat{H},a_{-}^{+}]=a_{-}^{+}\lambda_{+}, \tag{22}$$

这表明 a_{-}^{+} 也是对应于本征值 λ_{+} 的本征矢,它与 a_{+} 至多只差一个 F 域上的右系数. 不失一般性,下面我们取 $a_{+}=(a_{-})^{+}$. 利用(18)—(20)式,容易验证

$$[\hat{H},a_{+}a_{-}]=0. \tag{23}$$

(23)式表明 $a_{+}a_{-}$ 只能是 F 域上的一个元素,即

$$a_{+}a_{-}=h(\hat{H}), \tag{24}$$

函数 $h(x)$ 的具体形式将在后面确定. 由(20)和(24)式可以得到

$$a_{-}a_{+}=h\left(\hat{H}+\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon(\hat{H}+V_0)}\right). \tag{25}$$

(24)，(25)两式确定了 a_- 与 a_+ 的对易关系为

$$[a_-, a_+] = h(\hat{H} + \varepsilon + \sqrt{4\varepsilon(\hat{H} + V_0)}\ ) - h(\hat{H}) \ . \tag{26}$$

由上面的分析，(18)和(26)两式构成了标准基下对称 P-T 势非线性谱生成代数的基本公式，即该李代数的正则形式.

由(13)式不难解出本征矢算符(基算符)a_- 的具体形式为

$$a_- = (\hat{X} \cdot m\lambda_+ / \hbar + i\hat{P}) \cdot D, \tag{27}$$

其中 D 为域 F 上的任意常数. 为了使 a_-成为无量纲算符，我们取

$$D = 1 / (\hbar k) \ . \tag{28}$$

下面我们来推导函数 $h(x)$的具体形式. 设 $|E\rangle$为哈密顿算符 $\hat{H}$ 的本征态，由(24)和(27)两式可求出

$$h(E) = \langle E|\, a_+ a_- \,|E\rangle = \frac{E}{\varepsilon} - \frac{V_0}{\sqrt{\varepsilon(E + V_0)} - \varepsilon} \ , \tag{29}$$

在上式的推导中用到了公式(11)，(12)和条件 $a_+ = (a_-)^+$.

4　非线性谱生成代数的意义和应用

上节中我们已经得到了对称 P-T 势的非线性谱生成代数的正则形式，利用所得结果很容易导出该势场中粒子的能量本征值和本征态. 设束缚态能量本征值为 E_n，对应的本征态为 $|n\rangle$，$n = 0, 1, 2, \cdots$. 为了方便，假定 $0 < E_0 < E_1 < E_2 < \cdots\cdots$. 由(18)式容易推出

$$\hat{H} a_\pm |n\rangle = (E_n + \varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon(E_n + V_0)}\ ) a_\pm |n\rangle \ . \tag{30}$$

这表明基算符 $a_\pm$ 分别为能量的上升和下降算符. 一般情况下 $a_\pm|n\rangle$都是哈密顿算符的本征态，即

$$a_\pm |n\rangle = C_\pm(n) |n \pm 1\rangle \ . \tag{31}$$

对(31)式两边同时取模，即可求出比例系数

$$|C_-(n)|^2 = h(E_n), \quad |C_+(n)|^2 = h(E_n + \varepsilon + \sqrt{4\varepsilon(E_n + V_0)}\ ) \ . \tag{32}$$

由(30)式不难看出

$$E_{n\pm 1} = E_n + \varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon(E_n + V_0)} \ . \tag{33}$$

上式给出了能量本征值谱的递归公式，由此可推出能级的通项公式为

$$E_n = E_0 + 2n\sqrt{\varepsilon(E_0 + V_0)} + \varepsilon n^2 \ . \tag{34}$$

当 $n=0$ 时，$|0\rangle$ 为基态，故应有 $a_-|0\rangle=0$，即

$$\langle 0|a_+a_-|0\rangle = h(E_0)=0\,. \tag{35}$$

方程(35)有两个根 $\frac{1}{2}\left(\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon V_0}\right)$，只有其中的正根满足物理要求 $E>0$，由此我们得到基态能量为

$$E_0=\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon V_0}\right)\,. \tag{36}$$

将(36)代入(34)式，得到能谱公式为

$$E_n=(2n+1)\,\mu\,\varepsilon+\varepsilon n^2\,, \tag{37}$$

其中 $\mu=E_0/\varepsilon$，满足关系 $\mu(\mu-1)\varepsilon=V_0$.

由公式(31)、(32)和(37)，可推出

$$\begin{aligned} a_-|n\rangle &= \sqrt{\frac{n(n+\mu)(n+2\mu-1)}{n+\mu-1}}\,|n-1\rangle\,, \\ a_+|n\rangle &= \sqrt{\frac{(n+1)(n+\mu+1)(n+2\mu)}{n+\mu}}\,|n+1\rangle\,. \end{aligned} \tag{38}$$

由递推公式(38)可以得到本征态的通项公式为

$$|n\rangle=\sqrt{\frac{\mu}{(\mu+n)n!\,(2\mu)_n}}\;a_+^n\,|0\rangle\,, \tag{39}$$

其中 $(2\mu)_n=2\mu(2\mu+1)(2\mu+2)(2\mu+n-1)$，而基态 $|0\rangle$ 可以由方程

$$a_-|0\rangle=0 \tag{40}$$

完全确定.

上面的结果充分说明了由自然算符和哈密顿算符所生成的非线性李代数(12)式确实是一个谱生成代数，其正则形式中与零根对应的基算符为哈密顿算符，与非零根对应的基算符为能量阶梯算符，它们都有直接的物理意义.

5 两种极限情况的讨论

下面将分别讨论在小参数极限 $k\to 0$ 和零势能极限 $\mu\to 0$ 情况下前面得到的非线性谱生成代数的性质.

5.1 小参数极限

由对称 P-T 势的表达式(1)可以看出，当参数 k 趋于零而 k^2V_0 保持不变时，该势场变成简谐振子势. 为了便于比较，取 $k^2V_0=\frac{1}{2}m\omega^2$，则当 $k\to 0$ 时，(9)和(11)两式成为

$$\hat{X} = x, \quad \hat{P} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \tag{41}$$

即自然坐标和动量算符分别变成普通的坐标和动量算符，对称 P-T 势的哈密顿算符变成了谐振子的哈密顿算符．不难验证在此极限下非线性谱生成代数的正则形式成为

$$[\hat{H}, a_\pm] = \pm \hbar \omega a_\pm, \qquad [a_-, a_+] = 1 . \tag{42}$$

为了保证收敛性，在取极限时已将(27)式中的常数取为 $D = (2m\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}}$．(42)式恰好是谐振子代数的基本公式，因此对称 P-T 势的谱生成代数又可以看成谐振子代数的一种新的非线性形变．与通常的 q 形变振子代数[4]相比，我们的结果具有更直接的物理意义．

5.2 零势能极限

下面考虑另一种极限情况，即参数 μ 趋于零的情况($V_0 = \mu(\mu - 1)\varepsilon$)．显然当参数 $\mu \to 0$ 而 k 保持不变时，势能(1)式成为对称的一维无限深方势阱，即

$$V = \begin{cases} 0 & |x| < \pi / (2k) \\ \infty & |x| \geqslant \pi / (2k) \end{cases} . \tag{43}$$

由(9)式可知，在此极限过程中自然算符与普通算符的关系式仍然保持不变，但谱生成代数的自然形式(12)成为

$$\begin{aligned} &[\hat{H}, \hat{X}] = -(\mathrm{i}\hbar / m)\hat{P}, \\ &[\hat{H}, \hat{P}] = 2\mathrm{i}\hbar k^2 \hat{X}\left(\hat{H} - \frac{1}{4}\varepsilon\right) + 2\varepsilon \hat{P}, \\ &[\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}\hbar(1 - k^2 \hat{X}^2) . \end{aligned} \tag{44}$$

其正则形式成为

$$[\hat{H}, a_\pm] = a_\pm(\varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon \hat{H}}), \qquad [a_-, a_+] = 2\sqrt{\hat{H}/\varepsilon} + 1, \tag{45}$$

其中对应负根的基算符 a_-，即降算符成为

$$a_- = \sin(kx)\sqrt{\hat{H}/\varepsilon} + \frac{1}{k}\cos(kx)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} . \tag{46}$$

由(45)和(46)两式，运用与第 4 节中同样的方法，不难求出对称的一维无限深方阱势中粒

子束缚态的能量本征值为

$$E_n = \varepsilon n^2 , \tag{47}$$

对应的本征态为

$$\psi_n(x) = (-)^n \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \sin\left(nkx + \frac{1}{2} n\pi\right) , \tag{48}$$

这与已知的结果完全一致.

由以上的讨论我们看到在 $\mu \to 0$极限下,对称 P-T 势的非线性谱生成代数(12)确实变成了对称的一维无限深方阱势的非线性谱生成代数. 这个结果比文献[10]中通过引入附加相因子所得到谱生成代数更加自然.

6 结论

通过本文中的研究,得到如下主要结果:

(1) 由 P-T 势的哈密顿算符和自然算符能够直接生成该势场的非线性谱生成代数,其正则形式中与零根对应的基算符为哈密顿算符,与正负根对应的基算符分别为能量的上升、下降算符.

(2) 该谱生成代数可以看成振子代数的一类新的非线性形变,它比振子代数的 q 形变有更直接的物理意义.

(3) 在零势能极限下,该谱生成代数变成对称的一维无限深方阱势的谱生成代数,它比用其它方法得到的谱生成代数更为自然.

参 考 文 献

1 Pöschl G, Teller E. Z. Phys., 1993, **83**:143—151

2 Wybourne B G. Classical Groups for Physicists, John Wiley, New York, 1974. 207—217

3 de Lange O L, Raab R E. Operator Methods in Quantum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1991. 71—120

4 Yan Hong. Chinese Science Bulletin (in Chinese), 1991, **36**:337—340
(阎宏. 科学通报,1991,**36**:337—340)

5 Delbecq C, Quesne C. J. Phys., 1993, **A26**:L127—L134

6 Ni Zhixiang. Phys. Lett., 1997, **A235**:313—317

7 Nieto M M, Simmons Jr L M. Phys. Rev., 1979, **D20**:1332—1341

8 Lee T D. Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood, London, 1981. 474—480

9 Han Qizhi, Sun Hongzhou. Group Theory (in Chinese). Beijing: Beijing University Press, 1987. 225—233
(韩其智,孙洪洲. 群论. 北京:北京大学出版社,1987. 225—233)

10 Ni Zhixiang. Acta Physica Sinica (Overseas Edition). 1998, **7**:183—189

Nonlinear Spectrum-Generating Algebra for the Symmetrical Pöschl-Teller Potential*

Ni Zhixiang[1)]

(Department of Physics, Fuyang Teachers College, Fuyang 236032)

Abstract Using the Hamiltonian and the natural operators, we obtain a nonlinear spectrum-generating algebra for the symmetrical Pöschl-Teller potential. This algebra gives a new method with obvious physical meaning to describe and solve the quantum motion in the potential, and can be regarded as a new deformation of the oscillator algebra.

Key words natural operator, symmetrical Pöschl-Teller potential, nonlenear Lie algebra, deformed oscillator

Received 8 January 1998, Revised 29 March 1998

* Supported by the National Natural Science Foundation of China and Anhui Education Commission

1) East China Institute for Theoretical Physics, Shanghai 200237