

# 直线加速器中的非线性空间 电荷效应和发射度增长\*

陈银宝 黄志斌

(中国原子能研究院 北京 102413)

**摘要** 直线加速器中束团的非线性空间电荷效应是引起发射度增长的重要原因之一。根据计算在屏蔽筒中非均匀分布束团的空间电荷效应的普遍方法,推导了直线加速器圆波导中几种非均匀分布束团的非线性场能公式,并给出数值计算结果。讨论了由非线性所引起发射度增长。

**关键词** 直线加速器 非线性空间电荷效应 发射度增长

## 1 引言

在用于自由电子激光(FEL)和高能物理等的直线加速器,用于重离子聚变的感应直线加速器以及其他许多要求强流的微波器件中,空间电荷力与外加聚焦力相比不可忽略,强流束的空间电荷效应是决定加速器束流动力学的基本因素之一。

理论研究和数值模拟研究表明,在非均匀密度分布的束中,每单位长度的静止场能要比具有相同流强,相同均方根半径和相同均方根发射度的等效均匀束大。因此,当粒子趋向均匀分布的过程中,这些多余的场能就转变为粒子的动能,而导致发射度增大。基于这种概念,已发表了许多研究成果<sup>[1-7]</sup>。例如,70年代初,Lapostolle 推导得到了均方根发射度与均匀聚焦管道里的连续束流的空间电荷场能之间的关系<sup>[1]</sup>,Sacherer 推得了空间电荷的均方根包络线方程<sup>[2]</sup>。80年代以来,Struckmeier, Klabune, Reiser 得到了非均匀密度束流空间电荷为主导的发射度增长的方程<sup>[3]</sup>,Wangler 则推得了在线性聚焦管道里具有任意分布的圆形连续束的发射度变化的微分方程式<sup>[4]</sup>,Hofmann 和Struckmeier 又将方程推广成对三维束团的普遍形式<sup>[5]</sup>。另外还有许多进一步的研究工作,如文献[6,7]等。

但是,必须指出,上述研究中所涉及的空间电荷场能的计算,是基于自由空间的电荷束团,或假定是屏蔽筒中的连续束流,这与直线加速器以及许多微波器件中的电子(或离子)束团的实际情况有明显的差别。

关于屏蔽筒中的非均匀密度分布束团的空间电荷效应,我们已经推得了普遍公式<sup>[8]</sup>,

1998-11-02收稿

\* 国家自然科学基金和核工业科学基金资助项目

本文在第 2 节中首先回顾其要点. 然后, 在第 3 节中用以推导出直线加速器中几种常用的非均匀密度分布束团的非线性场能公式, 并在第 4 节中给出其数值计算结果, 最后, 在第 5 节中讨论由此引起的发射度增长.

## 2 非均匀密度分布束团的空间电荷效应的普遍计算公式

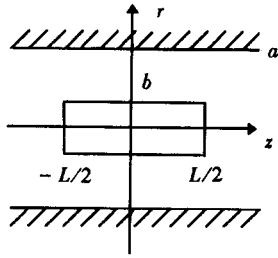


图1 有限圆柱空间电荷模型

为便于读者的理解和应用, 把文献 [8] 中得到的在直线加速器圆波导中的非均匀密度分布束团的空间电荷效应的普遍计算公式的要点简述于下. 采用有限圆柱空间电荷模型, 令  $z$  轴与加速器波导轴重合, 原点与电荷束团的中心重合, 设  $a$  为波导半径,  $b$  和  $\pm L/2$  分别为圆柱空间电荷的径向和轴向边界, 如图 1 所示.

则静止模型均匀密度分布的空间电荷所产生的电位为空间坐标  $(r, z)$  的函数, 且正比于电荷密度  $\rho$ , 即有<sup>[9]</sup>:

$$\varphi_0 = \rho f_0(r, z; b, L/2), \quad (1)$$

其中  $f_0$  为该静止模型单位电荷所产生的电位, 脚标 0 代表均匀密度分布.

文献 [8] 中已得到了同一模型但电荷密度为非均匀分布电荷所产生的电位为: (见附录)

$$\varphi = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^b \rho(\xi, \zeta) \frac{\partial^2 f_0(r, z; \xi, \zeta)}{\partial \xi \partial \zeta} d\xi d\zeta. \quad (2)$$

因此, 只要已知任何静止模型均匀密度分布的空间电荷所产生的电位如式 (1) 所示, 根据公式 (2) 就可以计算同一模型但电荷密度按任意统计分布的空间电荷所产生的电位.

已知波导中均匀密度分布的圆柱空间电荷所产生的电位为:<sup>[9]</sup>

$$\varphi_{1,2} = \frac{2\rho ab}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^3 J_1^2(k_i a)} \frac{k_i L}{2} \operatorname{sh} \frac{k_i L}{2} e^{-k_i |z|}, \quad \left(|z| > \frac{L}{2}\right), \quad (3)$$

$$\varphi_3 = \frac{2\rho ab}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^3 J_1^2(k_i a)} \left[1 - \operatorname{ch}(k_i z) e^{-\frac{k_i L}{2}}\right], \quad \left(|z| < \frac{L}{2}\right), \quad (4)$$

其中  $J_i(k_i x)$  为贝塞尔函数,  $k_i$  满足  $J_0(k_i a) = 0$ . 以式 (3), (4) 代入式 (2), 即可得到非均匀分布的同一模型空间电荷所产生的电位的普遍计算公式:

$$\varphi_{1,2} = \frac{2}{\varepsilon_0 a} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^b \rho(\xi, \zeta) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi J_0(k_i \xi) J_0(k_i r)}{(k_i a) J_1^2(k_i a)} \operatorname{ch}(k_i \zeta) e^{-k_i |z|} d\xi d\zeta, \quad \left(|z| > \frac{L}{2}\right), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & \frac{2}{\varepsilon_0 a} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^b \rho(\xi, \zeta) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi J_0(k_i \xi) J_0(k_i r)}{(k_i a) J_1^2(k_i a)} \operatorname{ch}(k_i \zeta) e^{-k_i |z|} d\xi d\zeta + \\ & \frac{2}{\varepsilon_0 a} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^b \rho(\xi, \zeta) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi J_0(k_i \xi) J_0(k_i r)}{(k_i a) J_1^2(k_i a)} \operatorname{ch}(k_i z) e^{-k_i \xi} d\xi d\zeta, \quad \left(|z| < \frac{L}{2}\right). \quad (6) \end{aligned}$$

设密度可重写成

$$\rho(r, z) = N_{t,1} \rho_{t,1}, \quad (7)$$

这里的归一化常数  $N_{t,1}$  满足  $2\pi \int_0^b \int_{-L/2}^{L/2} \rho(r, z) r dr dz = Nq$ ,  $N$  为总粒子数,  $q$  为粒子的电荷.

脚标  $t$  和  $l$  分别表示横向和纵向. 因而,  $t$  和  $l$  可写成  $u$  (均匀分布),  $w$  (水袋分布),  $p$  (抛物线分布),  $g$  (高斯分布). 表 1 列出了这 4 种分布的所有可能组合情况, 其中:

$$\rho_{u,u}(r, z) = \frac{Nq}{\pi b^2 L}, \quad \rho_{w,u}(r, z) = \frac{2Nq}{\pi b^2 L} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right),$$

$$\rho_{p,u}(r, z) = \frac{3Nq}{\pi b^2 L} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2, \quad \rho_{g,u}(r, z) = \frac{Nq}{2\pi \alpha^2 L} e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}},$$

$$\rho_{u,w}(r, z) = \frac{3Nq}{2\pi b^2 L} \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right],$$

$$\rho_{w,w}(r, z) = \frac{3Nq}{\pi b^2 L} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right],$$

$$\rho_{p,w}(r, z) = \frac{9Nq}{2\pi b^2 L} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2 \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right],$$

$$\rho_{g,w}(r, z) = \frac{3Nq}{4\pi \alpha^2 L} e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}} \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right],$$

$$\rho_{u,p}(r, z) = \frac{15Nq}{8\pi b^2 L} \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right]^2,$$

$$\rho_{w,p}(r, z) = \frac{15Nq}{4\pi b^2 L} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right]^2,$$

$$\rho_{p,p}(r, z) = \frac{45Nq}{8\pi b^2 L} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2 \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right]^2,$$

$$\rho_{g,p}(r, z) = \frac{15Nq}{16\pi \alpha^2 L} e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}} \left[1 - \frac{z^2}{(L/2)^2}\right]^2,$$

$$\rho_{u,g}(r, z) = \frac{Nq}{\pi b^2 L D} e^{-\frac{z^2}{2\beta^2}},$$

$$\rho_{w,g}(r, z) = \frac{2Nq}{\pi b^2 L D} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) e^{-\frac{z^2}{2\beta^2}},$$

$$\rho_{p,g}(r,z) = \frac{3Nq}{\pi b^2 LD} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^2 e^{-\frac{z^2}{2\beta^2}},$$

$$\rho_{g,g}(r,z) = \frac{Nq}{2\pi \alpha^2 LD} e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}} e^{-\frac{z^2}{2\beta^2}}, \quad (8)$$

和

$$\alpha^2 = \langle r^2 \rangle, \quad \beta^2 = \langle z^2 \rangle, \quad D = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} t^2} dt. \quad (9)$$

表1 密度分布的所有可能组合情况

横向密度分布	纵向密度分布			
	均匀分布	水袋分布	抛物线分布	高斯分布
均匀分布	$\rho_{u,u}$	$\rho_{u,w}$	$\rho_{u,p}$	$\rho_{u,g}$
水袋分布	$\rho_{w,u}$	$\rho_{w,w}$	$\rho_{w,p}$	$\rho_{w,g}$
抛物线分布	$\rho_{p,u}$	$\rho_{p,w}$	$\rho_{p,p}$	$\rho_{p,g}$
高斯分布	$\rho_{g,u}$	$\rho_{g,w}$	$\rho_{g,p}$	$\rho_{g,g}$

将式(8)中的各种密度分布代入公式(3)–(6),得到各相应密度分布空间电荷所产生的电位,在附录中列出,其推导过程详见参考文献[10]–[12].

### 3 直线加速器中圆柱空间电荷的非线性场能

波导中圆柱空间电荷的非线性场能可通过 $\varphi dq$ 对空间电荷所占体积的积分得到<sup>[9]</sup>

$$W = 2\pi \int_{r=0}^r=b \int_{z=-L/2}^z=L/2 \rho \varphi r dr dz. \quad (10)$$

将式(8)中的各种密度分布和在附录中的各相应密度分布空间电荷所产生的在区间( $|z| < L/2$ )的电位代入公式(10),即可得到各相应密度分布空间电荷圆柱的自场能.

(A) 纵向密度均匀分布,横向密度分布为各种密度分布的空间电荷圆柱的自场能

$$W_{u,u} = \frac{2N^2 q^2 a^2}{\pi \epsilon_0 L b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_i b)}{(k_i a)^4 J_1^2(k_i a)} A_{k_v}, \quad (11)$$

$$W_{w,u} = \frac{32N^2 q^2 a^4}{\pi \epsilon_0 L b^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_2^2(k_i b)}{(k_i a)^6 J_1^2(k_i a)} A_{k_v}, \quad (12)$$

$$W_{p,u} = \frac{1152N^2 q^2 a^6}{\pi \epsilon_0 L b^6} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_3^2(k_i b)}{(k_i a)^8 J_1^2(k_i a)} A_{k_v}, \quad (13)$$

$$W_{g,u} = \frac{N^2 q^2}{2\pi \epsilon_0 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-k_i^2 a^2}}{(k_i a)^2 J_1^2(k_i a)} A_{k_v}, \quad (14)$$

其中

$$A_{kv} = 1 - \frac{2}{k_l L} \operatorname{sh} \frac{k_l L}{2} e^{-\frac{k_l L}{2}}. \quad (15)$$

(B) 纵向密度水袋分布, 横向密度分布为各种密度分布的空间电荷圆柱的自场能

$$W_{u,w} = \frac{18N^2 q^2 a^2}{\pi \varepsilon_0 L b^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_l b)}{(k_l a)^4 J_1^2(k_l a)} A_{wb}, \quad (16)$$

$$W_{w,w} = \frac{288N^2 q^2 a^4}{\pi \varepsilon_0 L b^4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2^2(k_l b)}{(k_l a)^6 J_1^2(k_l a)} A_{wb}, \quad (17)$$

$$W_{p,w} = \frac{10368N^2 q^2 a^6}{\pi \varepsilon_0 L b^6} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3^2(k_l b)}{(k_l a)^8 J_1^2(k_l a)} A_{wb}, \quad (18)$$

$$W_{g,w} = \frac{9N^2 q^2}{2\pi \varepsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-k_l^2 a^2}}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} A_{wb}, \quad (19)$$

其中

$$A_{wb} = \frac{2}{15} - \frac{1}{3(k_l L/2)^2} + \frac{1}{(k_l L/2)^3} \left[ 1 + \frac{1}{(k_l L/2)} \right] - \frac{1}{(k_l L/2)^3} \left[ 1 + \frac{1}{(k_l L/2)} \right]^2 e^{-\frac{k_l L}{2} \operatorname{sh} \frac{k_l L}{2}}. \quad (20)$$

(C) 纵向密度抛物线分布, 横向密度为各种密度分布的空间电荷圆柱的自场能

$$W_{u,p} = \frac{20N^2 q^2 a^2}{7\pi \varepsilon_0 L b^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_l b)}{(k_l a)^4 J_1^2(k_l a)} A_{pa}, \quad (21)$$

$$W_{w,p} = \frac{320N^2 q^2 a^4}{7\pi \varepsilon_0 L b^4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2^2(k_l b)}{(k_l a)^6 J_1^2(k_l a)} A_{pa}, \quad (22)$$

$$W_{p,p} = \frac{11520N^2 q^2 a^6}{7\pi \varepsilon_0 L b^6} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3^2(k_l b)}{(k_l a)^8 J_1^2(k_l a)} A_{pa}, \quad (23)$$

$$W_{g,p} = \frac{5N^2 q^2}{7\pi \varepsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-k_l^2 a^2}}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} A_{pa}, \quad (24)$$

其中

$$A_{pa} = 1 - \frac{3}{(k_l L/2)^2} + \frac{63}{2(k_l L/2)^4} + \frac{945}{2(k_l L/2)^6} + \frac{2835}{2(k_l L/2)^7} + \frac{2835}{2(k_l L/2)^8} - \frac{315}{2(k_l L/2)^5} \left[ 1 + \frac{3}{(k_l L/2)} + \frac{3}{(k_l L/2)^2} \right]^2 e^{-\frac{k_l L}{2} \operatorname{sh} \frac{k_l L}{2}}. \quad (25)$$

(D) 纵向密度高斯分布, 横向密度分布为各种密度分布的空间电荷圆柱的自场能

$$W_{u,g} = \frac{2N^2 q^2 a^2}{\pi \varepsilon_0 L b^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_l b)}{(k_l a)^4 J_1^2(k_l a)} A_{ga}, \quad (26)$$

$$W_{w,g} = \frac{32N^2q^2a^4}{\pi\epsilon_0Lb^4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2^2(k_l b)}{(k_l a)^6 J_1^2(k_l a)} A_{ga}, \quad (27)$$

$$W_{p,g} = \frac{1152N^2q^2a^6}{\pi\epsilon_0Lb^6} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3^2(k_l b)}{(k_l a)^8 J_1^2(k_l a)} A_{ga}, \quad (28)$$

$$W_{g,g} = \frac{N^2q^2}{2\pi\epsilon_0L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-k_l^2 a^2}}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} A_{ga}, \quad (29)$$

其中

$$A_{ga} = \frac{k_l L}{8D^2} \int_{-1}^1 \left[ (1-|t|) \int_{-1}^1 e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} \left( \frac{1-|t|}{2} v + \frac{1+|t|}{2} \right)^2 - \frac{k_l L}{2} \left( \frac{1-|t|}{2} v + \frac{1+|t|}{2} \right)} dv \right] \times e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} t^2} \operatorname{ch} \frac{k_l L}{2} t dt + \frac{k_l L}{8D^2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} t^2 - \frac{k_l L}{2} |t|} \times |t| \int_{-1}^1 e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} \left( \frac{|t|}{2} v + \frac{|t|}{2} \right)^2} \operatorname{ch} \frac{k_l L}{2} \left( \frac{|t|}{2} v + \frac{|t|}{2} \right) dv dt. \quad (30)$$

#### 4 非线性场能的数值结果

作为一个例子, 设波导半径  $a = 0.015\text{m}$ , 空间电荷圆柱的总电荷为  $Nq = 6 \times 10^{-9}$  Coulomb, 计算非线性场能  $W$  随束团半径与波导半径之比  $b/a$  和束团半径与束团长度之

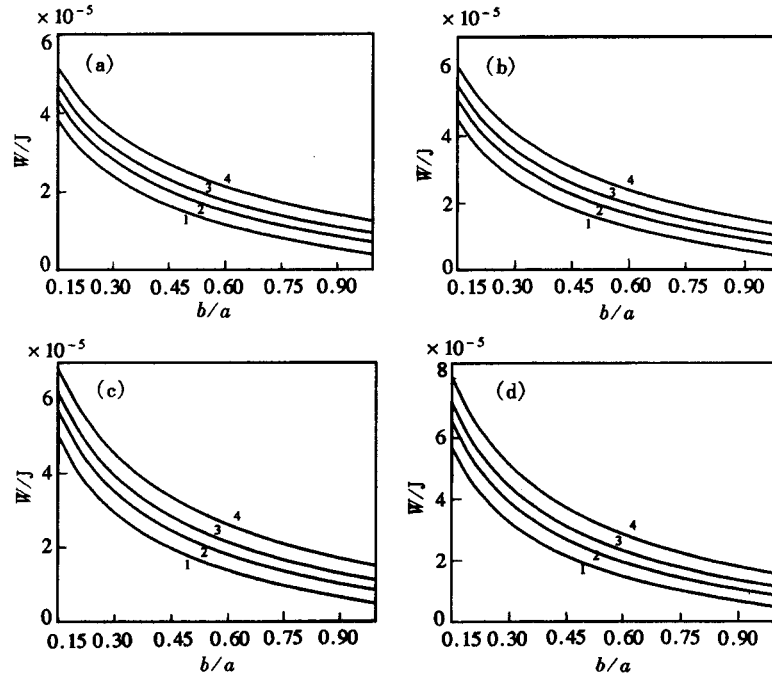


图 2 场能  $W$  随束团半径与波导半径之比  $b/a$  的变化关系

图中束团的横向密度为各种密度分布及 (a) 纵向密度为均匀分布 (1:  $W_{u,u}$ , 2:  $W_{w,u}$ , 3:  $W_{p,u}$ , 4:  $W_{g,u}$ ); (b) 纵向密度分布为水袋分布 (1:  $W_{u,w}$ , 2:  $W_{w,w}$ , 3:  $W_{p,w}$ , 4:  $W_{g,w}$ ); (c) 纵向密度分布为抛物线分布 (1:  $W_{u,p}$ , 2:  $W_{w,p}$ , 3:  $W_{p,p}$ , 4:  $W_{g,p}$ ); (d) 纵向密度分布为高斯分布 (1:  $W_{u,g}$ , 2:  $W_{w,g}$ , 3:  $W_{p,g}$ , 4:  $W_{g,g}$ ).

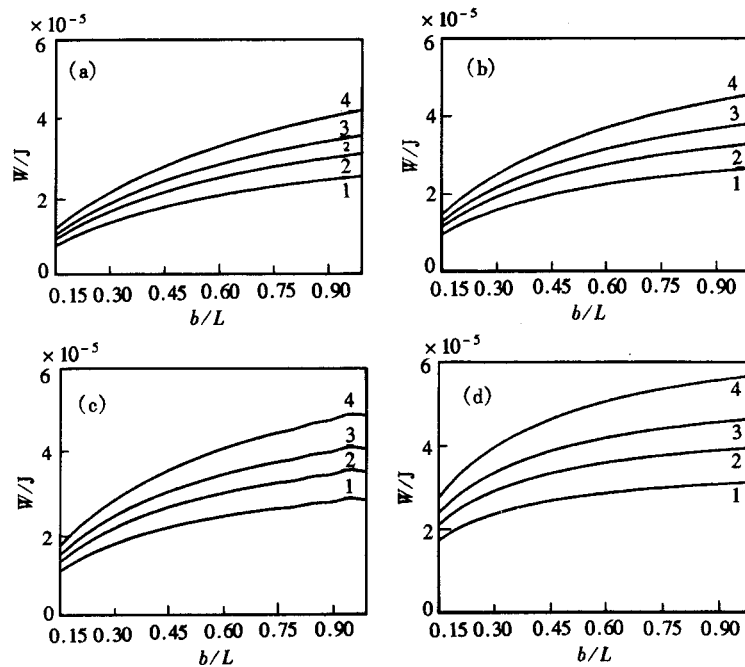


图3 场能  $W$  随束团半径与束团长度之比  $b/L$  的变化关系

图中说明同图2.

比  $b/L$  的变化关系. 计算结果如图 2 和图 3 所示. 从图中可以看到, 首先, 所有的非均匀密度分布的圆柱空间电荷所具有的非线性场能要比均匀密度分布的大; 其次, 非线性场能随束团半径与波导半径之比  $b/a$  的增大而减小, 随束团半径与束团长度之比  $b/L$  的增大而增大; 第三, 图 2 的曲线显示, 对任意密度分布的圆柱空间电荷,  $b/a$  越小, 非线性场能  $W$  越大, 由此外推, 在自由空间中, 任意密度分布的圆柱空间电荷的非线性场能达到其最大值.

### 5 直线加速器中束团的发射度增长

束团的场能与发射度变化之间的三维微分方程可写成如下形式<sup>[5]</sup>:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{ds} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{y^2} \frac{d}{ds} \varepsilon_y^2 + \frac{1}{z^2} \frac{d}{ds} \varepsilon_z^2 = -\frac{32}{m\gamma^3 v^2 N} \frac{d}{ds} (W - W_0), \quad (31)$$

其中  $s = v \cdot t$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  和  $\varepsilon_z$  分别代表  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的发射度,  $W$  和  $W_0$  分别代表真实束和等价均匀束的空间电荷自场能. 该方程可用于估算由非线性场能变化所引起的发射度增长.

但是, 直线加速器中的束团是在一定的管道里运动

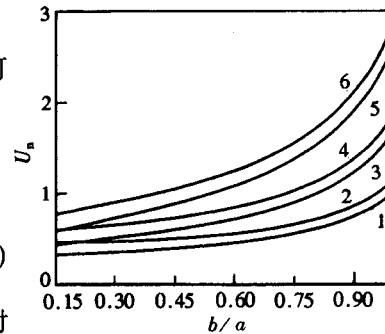


图 4 自由能随束团半径与波导半径之比  $b/a$  的变化

- 1:  $U_{w,w}$  2:  $U_{w,p}$  3:  $U_{p,w}$  4:  $U_{p,p}$
- 5:  $U_{g,w}$  6:  $U_{g,p}$

的,因此,束团的非线性场能必须考虑相应的屏蔽筒的效应.从图 2 和图 3 可以清楚看到,束团的非线性场能不仅依赖于束团半径与束团长度之比  $b/L$ ,而且依赖于束团半径与波导半径之比  $b/a$ ,这对于自由能(即非均匀密度分布的空间电荷束团所具有的场能与等价均匀束的场能之差)也一样.若定义  $U_n$  为:

$$U_n = (W - W_u) / W_u. \quad (32)$$

于是,  $U_n$  是束团中电荷密度非均匀性和可转变为粒子动能的那部分能量的相对度量,并由其引起发射度的增长.

取  $W_u = W_{u,u}$ ,并使  $W$  分别等于  $W_{w,w}$ ,  $W_{p,w}$ ,  $W_{g,w}$ ,  $W_{w,p}$ ,  $W_{p,p}$ , 和  $W_{g,p}$ , 计算了相应于这些分布的电荷束团的  $U_n$  随  $b/a$  的变化,如图 4 所示.显然,由自由能  $U_n$  所引起的发射度增长,也依赖于束团半径与波导半径之比  $b/a$ ,在自由空间中会达到其最小值.因此,根据自由空间中的束团的非线性场能变化来估算所引起的发射度增长,是低估了这一效应.

### 参 考 文 献

- 1 Lapostolle M. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1971, **18**:1101—1103
- 2 Sacherer F. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1971, **18**:1105—1107
- 3 Struckmeier J, Klabunde J, Reiser M. Part. Acc., 1984, **15**:47—65
- 4 Wangler T P, Crandall K R, Mills R S et al. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1985, **32**:2196—2198
- 5 Hofmann I, Struckmeier J. Part. Acc., 1987, **21**:69—98
- 6 Wangler T P, Lapostolle P, Lombardi A. Space-Charge-Induced Emittance Growth in An Elliptical Beam with A Parabolic Density Distribution. In: Corneliussen S T ed. Conference Record of the IEEE 1993 Particle Accelerator Conference, 93CH3279-7, Vol. 5. NJ: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., IEEE Service Center, 1993, 3606—3608
- 7 Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994. 467—563
- 8 Chen Yinbao, Xie Xi. Chin. J. Nucl. Phys. (in Chinese), 1979, **1**:107—128  
(陈银宝, 谢羲. 原子核物理, 1979, **1**: 107—128)
- 9 Hechtel J. IEEE Trans. on Electron Devices, 1970, **15**:999—1009
- 10 Chen Yinbao. Nonlinear Space Charge Effects of Bunched Beam in Linac. Beijing: Atomic Energy Press, 1992. 1—15
- 11 Chen Yinbao, Fu Sinian, Huang Zhibin et al. Chin. J. Nucl. Phys., 1995, **17**(1):81—88
- 12 Chen Yinbao, Fu Sinian, Huang Zhibin et al. Chin. J. Nucl. Phys., 1995, **17**(2):174—178



## 附录

## 波导中非均匀密度分布有限圆柱所产生的电位

(A) 纵向密度为均匀分布, 横向密度分布为各种密度分布的空间电荷圆柱所产生的电位

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{2qa}{\pi\epsilon_0 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} \operatorname{sh} \frac{k_l L}{2} e^{-k_l |z|}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{2qa}{\pi\epsilon_0 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} \left( 1 - e^{-\frac{k_l L}{2} \operatorname{ch} k_l z} \right), \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{8qa^2}{\pi\epsilon_0 b^2 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^4 J_1^2(k_l a)} \operatorname{sh} \frac{k_l L}{2} e^{-k_l |z|}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{8qa^2}{\pi\epsilon_0 b^2 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^4 J_1^2(k_l a)} \left( 1 - e^{-\frac{k_l L}{2} \operatorname{ch} k_l z} \right), \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{48qa^3}{\pi\epsilon_0 b^3 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^5 J_1^2(k_l a)} \operatorname{sh} \frac{k_l L}{2} e^{-k_l |z|}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{48qa^3}{\pi\epsilon_0 b^3 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^5 J_1^2(k_l a)} \left( 1 - e^{-\frac{k_l L}{2} \operatorname{ch} k_l z} \right), \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{q}{\pi\epsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0(k_l r)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} e^{-\frac{k_l^2 a^2}{2}} \operatorname{sh} \frac{k_l L}{2} e^{-k_l |z|}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{q}{\pi\epsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_0(k_l r)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} e^{-\frac{k_l^2 a^2}{2}} \left( 1 - e^{-\frac{k_l L}{2} \operatorname{ch} k_l z} \right), \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

(B) 纵向密度为水袋分布, 横向密度分布为各种密度分布的空间电荷圆柱所产生的电位

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{3qa}{\pi\epsilon_0 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{wb}}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{3qa}{\pi\epsilon_0 bL} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_1(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{wb}}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B1})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{12qa^2}{\pi\epsilon_0 b^2 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^4 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{wb}}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{12qa^2}{\pi\epsilon_0 b^2 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^4 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{wb}}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B2})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{72qa^3}{\pi\epsilon_0 b^3 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^5 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{wb}}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{72qa^3}{\pi\epsilon_0 b^3 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3(k_l b)J_0(k_l r)}{(k_l a)^5 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{wb}}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B3})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(k_i r)}{(k_i a)^2 J_1^2(k_i a)} e^{-\frac{k_i^2 \alpha^2}{2}} e^{-k_i |z|} P_{wb}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(k_i r)}{(k_i a)^2 J_1^2(k_i a)} e^{-\frac{k_i^2 \alpha^2}{2}} Q_{wb}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B4})$$

其中

$$P_{wb} = \frac{2}{(k_i L/2)^2} \left( \frac{k_i L}{2} \operatorname{ch} \frac{k_i L}{2} - \operatorname{sh} \frac{k_i L}{2} \right) \quad (\text{B5})$$

$$Q_{wb} = \left[ 1 - \frac{z^2}{(L/2)^2} - \frac{2}{(k_i L/2)^2} \right] + \left[ \frac{2}{(k_i L/2)} + \frac{2}{(k_i L/2)^2} \right] e^{-\frac{k_i L}{2}} \operatorname{ch} k_i z \quad (\text{B6})$$

(C) 纵向密度为抛物线分布, 横向密度分布为各种密度分布的空间电荷圆柱所产生的电位

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{15qa}{4\pi\epsilon_0 bL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^3 J_1^2(k_i a)} e^{-k_i |z|} P_{pa}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{15qa}{4\pi\epsilon_0 bL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^3 J_1^2(k_i a)} Q_{pa}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C1})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{15qa^2}{\pi\epsilon_0 b^2 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_2(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^4 J_1^2(k_i a)} e^{-k_i |z|} P_{pa}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{15qa^2}{\pi\epsilon_0 b^2 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_2(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^4 J_1^2(k_i a)} Q_{pa}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C2})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{90qa^3}{\pi\epsilon_0 b^3 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_3(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^5 J_1^2(k_i a)} e^{-k_i |z|} P_{pa}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{90qa^3}{\pi\epsilon_0 b^3 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_3(k_i b) J_0(k_i r)}{(k_i a)^5 J_1^2(k_i a)} Q_{pa}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C3})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r,z) &= \frac{15q}{8\pi\epsilon_0 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(k_i r)}{(k_i a)^2 J_1^2(k_i a)} e^{-\frac{k_i^2 \alpha^2}{2}} e^{-k_i |z|} P_{pa}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r,z) &= \frac{15q}{8\pi\epsilon_0 L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(k_i r)}{(k_i a)^2 J_1^2(k_i a)} e^{-\frac{k_i^2 \alpha^2}{2}} Q_{pa}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C4})$$

其中

$$P_{pa} = \frac{8}{(k_i L/2)^2} \operatorname{sh} \frac{k_i L}{2} + \frac{24}{(k_i L/2)^4} \operatorname{sh} \frac{k_i L}{2} - \frac{24}{(k_i L/2)^3} \operatorname{ch} \frac{k_i L}{2} \quad (\text{C5})$$

$$Q_{pa} = \left[ 1 + \frac{z^4}{(L/2)^4} + \frac{z^2}{(L/2)^2} \frac{12}{(k_i L/2)^2} + \frac{24}{(k_i L/2)^4} - \frac{2z^2}{(L/2)^2} - \frac{4}{(k_i L/2)^2} \right] -$$

$$\frac{8}{(k_l L/2)^2} \left[ 1 + \frac{3}{(k_l L/2)} + \frac{3}{(k_l L/2)^2} \right] e^{-\frac{k_l L}{2} \operatorname{ch} k_l z} \quad (\text{C6})$$

(D) 纵向密度为高斯分布, 横向密度分布为各种密度分布的空间电荷圆柱所产生的电位

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r, z) &= \frac{2qa}{\pi \varepsilon_0 L b} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_l(k_l b) J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{ga}}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r, z) &= \frac{2qa}{\pi \varepsilon_0 L b} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_l(k_l b) J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{ga}}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D1})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r, z) &= \frac{8qa^2}{\pi \varepsilon_0 L b^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2(k_l b) J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{ga}}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r, z) &= \frac{8qa^2}{\pi \varepsilon_0 L b^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_2(k_l b) J_0(k_l r)}{(k_l a)^3 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{ga}}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D2})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r, z) &= \frac{48qa^3}{\pi \varepsilon_0 L b^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3(k_l b) J_0(k_l r)}{(k_l a)^5 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{ga}}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r, z) &= \frac{48qa^3}{\pi \varepsilon_0 L b^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{J_3(k_l b) J_0(k_l r)}{(k_l a)^5 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{ga}}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D3})$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r, z) &= \frac{q}{\pi \varepsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k_l^2 a^2}{2}} J_0(k_l r)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{ga}}, \left( |z| > \frac{L}{2} \right) \\ \phi_3(r, z) &= \frac{q}{\pi \varepsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k_l^2 a^2}{2}} J_0(k_l r)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{ga}}, \left( |z| < \frac{L}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D4})$$

其中

$$P_{\text{ga}} = \frac{C}{2D} \int_{-1}^1 e^{-\frac{L^2}{32\beta^2}(1+t)^2} \operatorname{ch} \frac{C(1+t)}{2} dt \quad (\text{D5})$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{ga}} &= \frac{C - k_l |z|}{2D} \operatorname{ch} k_l z \int_{-1}^1 e^{-\frac{[(C - k_l |z|]t + (C + k_l |z|)]^2}{8k_l^2 \beta^2} - \frac{1}{2} [(C - k_l |z|]t + (C + k_l |z|)]} dt + \\ &\quad \frac{k_l |z|}{2D} e^{-k_l |z|} \int_{-1}^1 e^{-\frac{z^2}{8\beta^2}(1+t)^2} \operatorname{ch} \frac{k_l |z|}{2} (1+t) dt \end{aligned} \quad (\text{D6})$$

$$C = \frac{k_l L}{2} \quad (\text{D7})$$

## Nonlinear Space Charge Effects and Emittance Growth in Linac \*

Chen Yinbao Huang Zhibin

(*China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413*)

**Abstract** The nonlinear space charge effect of bunched beam in linac is one of the important reasons that induce the emittance growth. The general formulas for calculating the potential of space charge with nonuniform distribution in surrounding structure are presented. For a bunched beam with different distribution in waveguide of linac, the expresses of the nonlinear field energy of a cylinder model of space charge are derived, and the numerical results of the nonlinear field energy for different density distributions are given. The emittance growths caused by these nonuniformities are discussed.

**Key words** linac, nonlinear space-charge effects, emittance growth

---

Received 2 November 1998

\* Project Supported by National Natural Science Foundation of China and the Science Foundation of Chinese Nuclear Industry