第23卷 第10期 高能物理与核物理 Vol.23, No.10
1999 年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1999

在FBF背景下带反射边界条件的超对称t–J模型的代数Bethe ansatz方法

惠小强 石康杰 侯伯宇 范 珩
(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 在阶化量子反散射的框架中,得到FBF背景下,带反射边界条件的超对称t–J模型的本征值和本征矢,及相应的Bethe ansatz方程.

关键词 超对称t–J模型 代数Bethe ansatz 反射方程

1 引言

众所周知强关联的电子系统在高温超导的研究中意义重大. 该系统的一个恰当的出发点是Anderson等[1,2]提出的t–J模型. 它的哈密顿量包括近邻电子跳动(t)和反铁磁交换(J)

$$H=\sum_{j=1}^{L}\left\{-tP\sum_{\sigma=\pm 1}(C_{j,\sigma}^{\dagger}C_{j+1,\sigma}+\mathrm{H.c.})P+\mathrm{J}\left(S_{j}S_{j+1}-\frac{1}{4}n_{j}n_{j+1}\right)\right\}. \tag{1}$$

Essler和Korepin[3]等证明了这个模型是超对称的,而且它的一维哈密顿量可通过二维超对称精确可解格点模型的转移矩阵得到. 他们利用阶化量子反散射方法,得到了在三种不同背景下,带周期性边界条件的超对称t–J模型的本征值和本征矢.

利用周期性边界条件,可得到精确可解模型的一般解. 近来,带反射边界条件的可解模型[4—7]引起越来越多的关注,它的哈密顿量包括由边界K矩阵决定的非平庸边界项. 本文中,在阶化量子反散射的框架中,将用代数Bethe ansatz方法去处理带反射边界条件的超对称t–J模型的本征值和本征矢问题,同时得到Bethe ansatz方程.

本文是这样安排的:第2部分,介绍模型及相应的符号;第3部分,证明了在阶化意义上带反射边界条件模型的可积性,另外,给出了反射方程的一般解;第4部分,用代数Bethe ansatz方法得到了超对称t–J模型本征值和本征矢;第5部分是一个简短的总结及讨论.

1998-08-10收稿

2 超对称 t–J模型的概述

首先对阶化意义上的量子反散射方法来一个简短回顾．为简单起见，我们采用 Essler 和 Korepin[3]的符号．本文中考虑的是 FBF 阶化，即阶化为费米的，玻色的和费米的，在 Grassmann 宇称下这意味着$\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$ 和$\epsilon_2 = 0$．$\hat{R}$是这样定义的：

$$\hat{R}(\lambda) = b(\lambda)I + a(\lambda)\Pi . \tag{2}$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + \mathrm{i}} , \; b(\lambda) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda + \mathrm{i}} . \tag{3}$$

单位算子 $I^{b_1b_2}_{a_1a_2} = \delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_1}$，矩阵$\Pi$置换张量积空间上的独立线性空间，

$$\Pi^{b_1b_2}_{a_1a_2} = \delta_{a_1b_2}\delta_{a_2b_1}(-1)^{\epsilon_{b_1}\epsilon_{b_2}} . \tag{4}$$

显然，可以写出 $\hat{R}$ 矩阵：

$$\hat{R}(\lambda) = \begin{bmatrix} b(\lambda)-a(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & 0 & a(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(\lambda) & 0 & 0 & 0 & -a(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & a(\lambda) & 0 & b(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b(\lambda) & 0 & a(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -a(\lambda) & 0 & 0 & 0 & b(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a(\lambda) & 0 & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b(\lambda)-a(\lambda) \end{bmatrix} \tag{5}$$

众所周知 Yang–Baxter关系[8,9]在带周期性边界条件的可积模型中至关重要，它的形式如下：

$$\hat{R}(\lambda-\mu)L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu) = L_n(\mu)\otimes L_n(\lambda)\hat{R}(\lambda-\mu). \tag{6}$$

其中张量积是阶化意义上的张量积，

$$(F\otimes G)^{bd}_{ac} = F_{ab}G_{cd}(-1)^{\epsilon_c(\epsilon_a+\epsilon_b)} . \tag{7}$$

n 指第 n 个量子空间，这种描述在量子反散射方法[10]中是公认的．可以写出 Yang–Baxter 关系的具体形式：

$$\hat{R}(\lambda-\mu)^{c_1c_2}_{a_1a_2}L_n(\lambda)^{b_1\gamma_n}_{c_1\alpha_n}L_n(\mu)^{b_2\beta_n}_{c_2\gamma_n}(-1)^{\epsilon_{c_2}(\epsilon_{c_1}+\epsilon_{b_1})} =$$

$$L_n(\mu)^{c_1\gamma_n}_{a_1\alpha_n}L_n(\lambda)^{c_2\beta_n}_{a_2\gamma_n}(-1)^{\epsilon_{a_2}(\epsilon_{a_1}+\epsilon_{c_1})}\hat{R}(\lambda-\mu)^{b_1b_2}_{c_1c_2} . \tag{8}$$

L算子可以通过 $\hat{R}$ 矩阵构造

$$L_n(\lambda)_{a\alpha}^{b\beta} = \Pi_{a\alpha}^{c\gamma}\hat{R}(\lambda)_{c\gamma}^{b\beta} = [b(\lambda)\Pi + a(\lambda)I]_{a\alpha}^{b\beta} \ . \tag{9}$$

故，L 算子的形式为：

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) - b(\lambda)e_n^{11} & b(\lambda)e_n^{21} & -b(\lambda)e_n^{31} \\ b(\lambda)e_n^{12} & a(\lambda) + b(\lambda)e_n^{22} & b(\lambda)e_n^{32} \\ -b(\lambda)e_n^{13} & b(\lambda)e_n^{23} & a(\lambda) - b(\lambda)e_n^{33} \end{pmatrix} \tag{10}$$

其中 e_n^{ab} 是量子算子，作用在矩阵表示为 $(e_n^{ab})_{\alpha\beta} = \delta_{a\alpha}\delta_{b\beta}$ 的第 n 个量子空间上. Monodromy 矩阵 $T_L(\lambda)$ 定义为所有格点上 L 算子的矩阵积：

$$T_L(\lambda) = L_L(\lambda)L_{L-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda), \tag{11}$$

以下如不作特殊说明，则张量积均指阶化意义上的.

$$\{[T_L(\lambda)]^{ab}\}_{\alpha_1\cdots\alpha_L}^{\beta_1\cdots\beta_L} = L_L(\lambda)_{a\alpha_L}^{c_L\beta_L} L_{L-1}(\lambda)_{c_L\alpha_{L-1}}^{c_{L-1}\beta_{L-1}}\cdots L_1(\lambda)_{c_2\alpha_1}^{b\beta_1}(-1)^{\sum_{j=2}^{L}(\epsilon_{\alpha_j}+\epsilon_{\beta_j})\sum_{i=1}^{j-1}\epsilon_{\alpha_i}} \ . \tag{12}$$

重复利用 Yang–Baxter 关系(6)式，很容易证明 monodromy 矩阵同样满足 Yang–Baxter关系：

$$\hat{R}(\lambda-\mu)[T_L(\lambda)\otimes T_L(\mu)] = T_L(\mu)\otimes T_L(\lambda)\hat{R}(\lambda-\mu) \ , \tag{13}$$

t–J模型的转移矩阵定义为辅助空间上 monodromy 矩阵的超迹，它在一般情形下的定义如下：

$$T_{\text{peri}}(\lambda) = \operatorname{str}[T_L(\lambda)] = \sum(-1)^{\epsilon_a}[T_L(\lambda)]^{aa} \ . \tag{14}$$

本文中的情形，如果给出

$$T_L(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & B_1(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & B_2(\lambda) \\ C_1(\lambda) & C_2(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{15}$$

则转移矩阵的形式为：

$$T_{\text{peri}} = -A_{11}(\lambda) + A_{22}(\lambda) - D(\lambda) \ . \tag{16}$$

作为 Yang–Baxter关系 (13) 的一个结果，可以证明不同谱参数的转移矩阵互相对易：

$$[T_{\text{peri}}(\lambda),\ \tau_{\text{peri}}(\mu)] = 0. \tag{17}$$

在[3]中，已经证明：通过取 $\tau_{\text{peri}}(\lambda)$ 的一阶导数的零点值所得的哈密顿量：

$$H_2 = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}[\tau(\lambda)]}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0} = -\sum_{k=1}^{L}\Pi^{k,\,k=1} \ , \tag{18}$$

等价于超对称 t–J模型的哈密顿量. 这里不再详述其等价性.

上面所讲的都是对周期性边界条件而言. 我们所要研究的是超对称 t–J模型在反射边界条件下的情形. 为了简便，把辫子 R 矩阵 $\hat{R}(2,5)$ 变为非辫子 R 矩阵：

$$R(\lambda) = b(\lambda)\Pi + a(\lambda) I =$$

$$\begin{bmatrix} a(\lambda)-b(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(\lambda) & 0 & b(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(\lambda) & 0 & 0 & 0 & -b(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & 0 & a(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a(\lambda) & 0 & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -b(\lambda) & 0 & 0 & 0 & a(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b(\lambda) & 0 & a(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a(\lambda)-b(\lambda) \end{bmatrix} \tag{19}$$

因此，Yang-Baxter关系(13)变为：

$$R(\lambda-\mu)T_1(\lambda)\,T_2(\mu) = T_2(\mu)T_1(\lambda)\,R(\lambda-\mu). \tag{20}$$

这里 1，2 指辅助空间，monodrony 矩阵的定义仍同以前的一样.

3 带反射边界条件的超对称 t-J模型的可积性

证明精确可解模型的可积性，用 Yang-Baxter关系就足够了. 带上反射边界条件后，要证明可解模型的可积性，除了 Yang-Baxter关系外，还需要反射方程和对偶反射方程. 反射方程首先被 Cherednik[11]提出. 为了证明反射边界条件的可积性，Sklyanin[4]提出了对偶反射方程. 一般说来，对偶反射方程依赖 R矩阵的幺正性和交叉幺正性，而不同的模型 R矩阵所取的形式不同，见文献[7].

对 R矩阵(19)，可以证明它满足幺正关系：

$$R_{12}(\lambda)R_{21}(-\lambda) = 1, \tag{21}$$

其中 $R_{21} = \Pi R_{12}\Pi$. 同时发现该 R矩阵是对称的 $R_{12} = R_{21}$.

定义超转置矩阵 st 如下：

$$(A^{st})_{ij} = A_{ji}(-1)^{(\epsilon_i+1)\epsilon_j}. \tag{22}$$

对本文中考虑的情形 $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1,\ \epsilon_2 = 0$ 可以重新把以上关系具体写为：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & C_1 \\ A_{12} & A_{22} & C_2 \\ B_1 & -B_2 & D \end{pmatrix}. \tag{23}$$

为了方便，定义超转置矩阵的逆 $\bar{st}$ 为 $\{A^{st}\}^{\bar{st}} = A$.

考虑以上的 R矩阵，发现它满足如下的交叉幺正关系：

$$R_{12}^{st_1}(\mathrm{i}-\lambda)\,R_{21}^{st_1}(\lambda)=\rho(\lambda),$$

$$\rho(\lambda)=\frac{(\mathrm{i}-\lambda)\lambda}{(\lambda+\mathrm{i})(2\mathrm{i}-\lambda)}\ . \tag{24}$$

其中 st_1 意味着对第一空间取超转置.

下面引入反射方程的阶化模式:

$$R_{12}(\lambda-\mu)\,K_1(\lambda)\,R_{21}(\lambda+\mu)\,K_2(\mu)=K_2(\mu)\,R_{12}(\lambda+\mu)\,K_1(\lambda)R_{21}(\lambda-\mu). \tag{25}$$

进一步把它写为指标形式:

$$\begin{aligned}&R(\lambda-\mu)_{a_1a_2}^{b_1b_2}K(\lambda)_{b_1}^{c_1}R(\lambda+\mu)_{b_2c_1}^{c_2d_1}K(\mu)_{c_2}^{d_2}(-1)^{(\epsilon_{b_1}+\epsilon_{c_1})\epsilon_{b_2}}=\\&K(\mu)_{a_2}^{b_2}R(\lambda+\mu)_{a_1b_2}^{b_1c_2}K(\lambda)_{b_1}^{c_1}R(\lambda-\mu)_{c_2c_1}^{d_2d_1}(-1)^{(\epsilon_{b_1}+\epsilon_{c_1})\epsilon_{c_2}}\ .\end{aligned} \tag{26}$$

这里 K 是反射方程的解,只考虑对角的 K 矩阵,故假定

$$K(\lambda)_a^b=\delta_{ab}k_a(\lambda)\ . \tag{27}$$

把(27)代入反射方程(26),找到唯一的非平庸关系:

$$\begin{aligned}&R(\lambda-\mu)_{a_1a_2}^{a_1a_2}R(\lambda+\mu)_{a_2a_1}^{a_1a_2}k(\lambda)_{a_1}k(\mu)_{a_1}+R(\lambda-\mu)_{a_2a_1}^{a_1a_2}R(\lambda+\mu)_{a_1a_2}^{a_1a_2}k(\lambda)_{a_2}k(\mu)_{a_1}=\\&R(\lambda+\mu)_{a_1a_2}^{a_1a_2}R(\lambda-\mu)_{a_2a_1}^{a_1a_2}k(\mu)_{a_2}k(\lambda)_{a_1}+R(\lambda+\mu)_{a_1a_2}^{a_2a_1}R(\lambda-\mu)_{a_1a_2}^{a_1a_2}k(\mu)_{a_2}k(\lambda)_{a_2}.\end{aligned} \tag{28}$$

解这个关系,得到阶化反射方程的两个不同类型的解

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda)=\begin{pmatrix}\xi+\lambda&&\\&\xi+\lambda&\\&&\xi-\lambda\end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$K_{\mathrm{II}}(\lambda)=\begin{pmatrix}\xi+\lambda&&\\&\xi-\lambda&\\&&\xi-\lambda\end{pmatrix}, \tag{30}$$

其中ξ是任意参数. 通过 R 矩阵的交叉幺正关系(24),引出阶化的对偶反射方程:

$$R_{12}(\mu-\lambda)K_1^{+}(\lambda)R_{21}(\mathrm{i}-\lambda-\mu)K_2^{+}(\mu)=K_2^{+}(\mu)R_{12}(\mathrm{i}-\lambda-\mu)K_1^{+}(\lambda)R_{21}(\mu-\lambda)\ . \tag{31}$$

不难发现,在反射方程(25)和对偶反射方程(31)之间存在同构关系:若给出反射方程(25)的解,就一定可以找到对偶反射方程(31)的解. 但是在对易转移矩阵的意义上,反射方程(25)和对偶反射方程是彼此独立的. 我们有对偶反射方程的两个类型的解

$$K_{\mathrm{I}}^{+}(\lambda)=\begin{pmatrix}\xi^{+}-\lambda&&\\&\xi^{+}-\lambda&\\&&\xi^{+}-\mathrm{i}+\lambda\end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$K_{\mathrm{II}}^{+}(\lambda)=\begin{pmatrix}\xi^{+}-\lambda & & \\ & \xi^{+}-\mathrm{i}+\lambda & \\ & & \xi^{+}-\mathrm{i}+\lambda\end{pmatrix}, \tag{33}$$

其中ξ^{+}是一个任意参数并且不依赖ξ.

注意这里有K和K^{+}各自两个不同类型的解,在转移矩阵的意义上,K和K^{+}是彼此独立的,所以,对应于K和K^{+},总共有四个不同的转移矩阵:$\{K_{\mathrm{I}}^{+},K_{\mathrm{I}}\}$;$\{K_{\mathrm{I}}^{+},K_{\mathrm{II}}\}$;$\{K_{\mathrm{II}}^{+},K_{\mathrm{I}}\}$;$\{K_{\mathrm{II}}^{+},K_{\mathrm{II}}\}$.

借鉴 Sklyanin 的方法[4],定义反射边界条件情形下双列 monodromy 矩阵

$$\mathscr{T}(\lambda)=T(\lambda)\,K(\lambda)\,T^{-1}(-\lambda)\ . \tag{34}$$

使用 Yang-Baxter 关系(20),容易证明 monodromy 矩阵也满足反射方程(25)

$$R_{12}(\lambda-\mu)\mathscr{T}_{1}(\lambda)\,R_{21}(\lambda+\mu)\mathscr{T}_{2}(\mu)=\mathscr{T}_{2}(\mu)R_{12}(\lambda+\mu)\mathscr{T}_{1}(\lambda)\,R_{21}(\lambda-\mu)\ . \tag{35}$$

然后定义带开边界条件的转移矩阵

$$t(\lambda)=\mathrm{str}K^{+}(\lambda)\mathscr{T}(\lambda), \tag{36}$$

同以前一样 str 指超迹. 接着,将证明所定义的转移矩阵对应于不同的谱参数时彼此对易,正是在这个意义上,说一个模型可积.

首先取一空间上的超转置

$$t(\lambda)\,t(\mu)=\mathrm{str}_{1}K_{1}^{+}(\lambda)\mathscr{T}_{1}(\lambda)\,\mathrm{str}_{2}K_{2}^{+}(\mu)\mathscr{T}_{2}(\mu)=\mathrm{str}_{12}K_{1}^{+}(\lambda)^{\mathrm{st}_1}K_{2}^{+}(\mu)\mathscr{T}_{1}^{\mathrm{st}_1}(\lambda)\mathscr{T}_{2}(\mu),$$

现在插入R矩阵的交叉幺正性关系(24),并取一空间上的超转置的逆,则有

$$t(\lambda)\,t(\mu)=\frac{1}{\rho(\lambda+\mu)}\,\mathrm{str}_{12}\,K_{1}^{+}(\lambda)^{\mathrm{st}_1}\,K_{2}^{+}(\mu)R_{12}^{\mathrm{st}_1}(\mathrm{i}-\lambda-\mu)\,R_{21}^{\mathrm{st}_1}(\lambda+\mu)\,\mathscr{T}_{1}^{\mathrm{st}_1}\,\mathscr{T}_{2}(\mu)\ ,$$

$$t(\lambda)\,t(\mu)=\frac{1}{\rho(\lambda+\mu)}\,\mathrm{str}_{12}\,\{K_{1}^{+}(\lambda)^{\mathrm{st}_1}\,K_{2}^{+}(\mu)R_{12}^{\mathrm{st}_1}(\mathrm{i}-\lambda-\mu)\}^{\bar{\mathrm{st}}_1}\{\mathscr{T}_{1}(\lambda)\,R_{21}(\lambda+\mu)\,\mathscr{T}_{2}(\mu)\},$$

$$t(\lambda)\,t(\mu)=\frac{1}{\rho(\lambda+\mu)}\,\mathrm{str}_{12}\,\{K_{2}^{+}(\mu)R_{12}(\mathrm{i}-\lambda-\mu)\,K_{1}^{+}(\lambda)\}\,\{\mathscr{T}_{1}(\lambda)\,R_{21}(\lambda+\mu)\,\mathscr{T}_{2}(\mu)\},$$

插入R矩阵的幺正性关系(21),利用反射方程(35)和对偶反射方程(31)有

$$t(\lambda)\,t(\mu)=\frac{1}{\rho(\lambda+\mu)}\,\mathrm{str}_{12}\,\{K_{2}^{+}(\mu)\,R_{12}(\mathrm{i}-\lambda-\mu)\,K_{1}^{+}(\lambda)\,R_{21}(\mu-\lambda)\}\times$$

$$\{R_{12}(\lambda-\mu)\mathscr{T}_{1}(\lambda)\,R_{21}(\lambda+\mu)\mathscr{T}_{2}(\mu)\},$$

$$t(\lambda)\,t(\mu)=\frac{1}{\rho(\lambda+\mu)}\,\mathrm{str}_{12}\,\{R_{12}(\mu-\lambda)\,K_{1}^{+}(\lambda)\,R_{21}(\mathrm{i}-\mu-\lambda)\,K_{2}^{+}(\mu)\}\times$$

$$\{\mathscr{T}_{2}(\mu)\,R_{12}(\lambda+\mu)\mathscr{T}_{1}(\lambda)\,R_{21}(\lambda-\mu)\ . \tag{37}$$

应用几乎同样的方法,使用幺正性关系(21)和交叉幺正性关系(24),有

$$t(\lambda)\, t(\mu) = \frac{1}{\rho(\lambda+\mu)}\ \mathrm{str}_{12}\,\{K_1^+\ R_{21}(\mathrm{i}-\mu-\lambda)\ K_2^+(\mu)\}\,\{\mathcal{T}_2(\mu)\ R_{12}(\lambda+\mu)\ \mathcal{T}_1(\lambda)\}.$$

$$t(\lambda)\, t(\mu) = \frac{1}{\rho(\lambda+\mu)}\ \mathrm{str}_{12}\,\{R_{21}^{\mathrm{st}_1}(\mathrm{i}-\lambda-\mu)K_1^+(\lambda)^{\mathrm{st}_1}\ K_2^+(\mu)\}\,\{\mathcal{T}_2(\mu)\ \mathcal{T}_1^{\mathrm{st}_1}(\lambda)\ R_{12}^{\mathrm{st}_1}(\lambda+\mu)\}.$$

$$t(\lambda)\, t(\mu) = \mathrm{str}_2 K_2^+(\mu)\mathcal{T}_2(\mu)\ \mathrm{str}_1 K_1^+(\lambda)\mathcal{T}_1(\lambda).$$

$$t(\lambda)\, t(\mu) = t(\mu)\, t(\lambda). \tag{38}$$

故证明了转移矩阵构成了一个对易族,该对易族给出了守恒量的无穷集.

对应于转移矩阵,也得到了哈密顿量:

$$H_2^{\mathrm{Bound}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\ \frac{\mathrm{d}[t(\lambda)]}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = -\sum_{k=1}^{L-1}\Pi^{k,\,k+1} - \frac{\mathrm{i}}{2}K_1(0) - \frac{\mathrm{str}_1 K_1^+(0)\,\Pi^{L,1}}{\mathrm{str}K^+(0)}\ .$$

边界项由反射 K 矩阵决定.

4 代数 Bethe ansatz 方法

4.1 矩阵和真空态

通过 monodromy 矩阵的定义,可以写出它的逆:

$$T^{-1}(-\lambda) = L_1^{-1}(-\lambda)\, L_2^{-1}(-\lambda)\cdots L_L^{-1}(-\lambda). \tag{39}$$

利用定义(34),可重新写出双列 monodromy 矩阵:

$$\mathcal{T}(\lambda) = T(\lambda)K(\lambda)T^{-1}(-\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & B_1(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & B_2(\lambda) \\ C_1(\lambda) & C_2(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(\lambda) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{11}(-\lambda) & \bar{A}_{12}(-\lambda) & \bar{B}_1(-\lambda) \\ \bar{A}_{21}(-\lambda) & \bar{A}_{22}(-\lambda) & \bar{B}_2(-\lambda) \\ \bar{C}_1(-\lambda) & \bar{C}_2(-\lambda) & \bar{D}(-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) & \mathcal{B}_1(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) & \mathcal{B}_2(\lambda) \\ \mathcal{C}_1(\lambda) & \mathcal{C}_2(\lambda) & \mathcal{D}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{40}$$

对周期性边界条件,Essler 和 Korepin[3]选择在第 k 量子空间上的参考态和真空态 $|0\rangle$:

$$|0\rangle_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |0\rangle = \otimes_{k=1}^{L}|0\rangle_k\ . \tag{41}$$

文中研究带反射边界条件的情形,假定真空态同周期性边界条件时相同,即上面的态 $|0\rangle$ 仍然是反射边界条件时的真空态. 由 monodromy 矩阵 $T(\lambda)$ 和 monodromy 矩阵逆 $T^{-1}(\lambda)$ 的定义,有如下的结果:

$$T(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} [a(\lambda)]^L & 0 & 0 \\ 0 & [a(\lambda)]^L & 0 \\ C_1(\lambda) & C_2(\lambda) & [a(\lambda)-b(\lambda)]^L \end{pmatrix}|0\rangle ,$$

$$T^{-1}(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} [a(-\lambda)]^L & 0 & 0 \\ 0 & [a(-\lambda)]^L & 0 \\ \bar{C}_1(-\lambda) & \bar{C}_2(-\lambda) & [a(-\lambda)-b(-\lambda)]^L \end{pmatrix}|0\rangle . \tag{42}$$

现在看双列 monodromy 矩阵 $\mathscr{T}$作用在真空态上的值. 容易得到

$$\mathscr{D}(\lambda)|0\rangle = k_3(\lambda)\,D(\lambda)\,\bar{D}(-\lambda)|0\rangle = k_3(\lambda)\,|0\rangle, \tag{43}$$

$$\mathscr{B}_1(\lambda)|0\rangle = 0, \qquad \mathscr{B}_2(\lambda)|0\rangle = 0, \tag{44}$$

$$\mathscr{C}_1(\lambda)|0\rangle \neq 0, \qquad \mathscr{C}_2(\lambda)|0\rangle \neq 0. \tag{45}$$

对别的元素,结果是非平庸的,

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{12}(\lambda)|0\rangle &= k_3(\lambda)\,B_1(\lambda)\bar{C}_2(-\lambda)|0\rangle, \\ \mathscr{A}_{21}(\lambda)|0\rangle &= k_3(\lambda)\,B_2(\lambda)\bar{C}_1(-\lambda)|0\rangle, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\mathscr{A}_{22}(\lambda)|0\rangle = [k_2(\lambda)\,A_{22}(\lambda)\bar{A}_{22}(-\lambda) + k_3(\lambda)B_2(\lambda)\bar{C}_2(-\lambda)]|0\rangle, \tag{47}$$

$$\mathscr{A}_{11}(\lambda)|0\rangle = [k_1(\lambda)\,A_{11}(\lambda)\,\bar{A}_{11}(-\lambda) + k_3(\lambda)\,B_1(\lambda)\,\bar{C}_1(-\lambda)]|0\rangle. \tag{48}$$

为了得到以上关系的结果,将用到阶化 Yang–Baxter关系(20),可以写出如下的具体关系

$$\begin{aligned} &[T^{-1}(-\lambda)]^{b_2}_{a_2}\,R(2\lambda)^{b_1c_2}_{a_1b_2}T(\lambda)^{c_1}_{b_1}(-1)^{(\epsilon_{b_1}+\epsilon_{c_1})\epsilon_{c_2}} = \\ &[T(\lambda)]^{b_1}_{a_1}\,R(2\lambda)^{c_1b_2}_{b_1a_2}[T^{-1}(-\lambda)]^{c_2}_{b_2}(-1)^{(\epsilon_{a_1}+\epsilon_{b_1})\epsilon_{a_2}} . \end{aligned} \tag{49}$$

两边都作用在真空态上,取指标的特殊值,$a_1=1,\ a_2=3,\ c_1=3,\ c_2=2$ 和$a_1=2,\ a_2=3,\ c_1=3,\ c_2=1$,利用关系(42),得到

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{12}(\lambda)|0\rangle &= 0 , \\ \mathscr{A}_{21}(\lambda)|0\rangle &= 0 . \end{aligned} \tag{50}$$

取 $a_1=2, a_2=3,\ c_1=3,\ c_2=2$, 有

$$B_2(\lambda)\bar{C}_2(-\lambda)|0\rangle = -\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}[\bar{D}(-\lambda)\,D(\lambda) - A_{22}(\lambda)\,\bar{A}_{22}(-\lambda)]|0\rangle. \tag{51}$$

把这个关系带入(47)得到

$$\mathscr{A}(\lambda)|0\rangle = \left\{\left[k_2(\lambda) + k_3(\lambda)\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}\right]a_{2L}(\lambda) - \frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}k_3(\lambda)\right\}|0\rangle, \tag{52}$$

为了简便，引入变换

$$\mathscr{A}_{22}(\lambda)|0\rangle=\tilde{\mathscr{A}}_{22}(\lambda)-\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}\mathscr{D}(\lambda)\ . \tag{53}$$

可以求出元素 $\tilde{\mathscr{A}}_{22}$作用在真空态上的值

$$\tilde{\mathscr{A}}_{22}(\lambda)|0\rangle=\left[k_2(\lambda)+k_3(\lambda)\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}\right]a^{2L}(\lambda)|0\rangle\ . \tag{54}$$

以上的变换对以后的代数 Bethe ansatz 方法非常重要，以 $\tilde{\mathscr{A}}_{22}(\lambda)$代替 $\mathscr{A}_{22}(\lambda)$作用在假定的本征矢上，容易发现仅有一项才是代数 Bethe ansatz 方法所必须的，有类似的关系：

$$B_1(\lambda)\bar{C}_1(-\lambda)|0\rangle=-\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}[\bar{D}(-\lambda)D(\lambda)-A_{11}(\lambda)\bar{A}_{11}(-\lambda)]|0\rangle. \tag{55}$$

引入类似(53)的变换

$$\mathscr{A}_{11}(\lambda)|0\rangle=\tilde{\mathscr{A}}_{11}(\lambda)-\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}\mathscr{D}(\lambda)\ . \tag{56}$$

有

$$\tilde{\mathscr{A}}_{11}(\lambda)|0\rangle=\left[k_1(\lambda)+k_3(\lambda)\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda)-b(2\lambda)}\right]a^{2L}(\lambda)|0\rangle\ . \tag{57}$$

总结以上的结果

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{A}}_{11}|0\rangle&=W_1(\lambda)a^{2L}(\lambda)|0\rangle,\\ \tilde{\mathscr{A}}_{22}|0\rangle&=W_2(\lambda)a^{2L}(\lambda)|0\rangle,\\ \mathscr{D}(\lambda)|0\rangle&=U_3(\lambda)|0\rangle\ .\end{aligned} \tag{58}$$

对应于反射方程的解 K 的两个不同解 $W_j(\lambda)$，$j=1,2$ 和 U_3取如下值：

对 K_{I}：

$$\begin{aligned}W_1(\lambda)&=\frac{2\lambda(\xi+\lambda-\mathrm{i})}{2\lambda-\mathrm{i}}\ ,\\ W_2(\lambda)&=\frac{2\lambda(\xi+\lambda-\mathrm{i})}{2\lambda-\mathrm{i}}\ ,\\ U_3(\lambda)&=(\xi-\lambda)\ .\end{aligned} \tag{59}$$

对 $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$：

$$W_1(\lambda)=\frac{2\lambda(\xi+\lambda-\mathrm{i})}{2\lambda-\mathrm{i}}\ ,$$

$$W_2(\lambda)=\frac{2\lambda(\xi-\lambda)}{2\lambda-\mathrm{i}}\ ,$$

$$U_3(\lambda) = (\xi - \lambda) \ . \tag{60}$$

考虑变换(53,56)和带反射边界条件的转移矩阵的定义,转移矩阵可重新写为:

$$t(\lambda) = \mathrm{str}K^+(\lambda)\mathscr{T}(\lambda) = -k_1^+(\lambda)\mathscr{A}_{11} + k_2^+(\lambda)\mathscr{A}_{22} - k_3^+(\lambda)\mathscr{D}(\lambda) =$$

$$-W_1^+(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}_{11} + W_2^+(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}_{22} - U_3^+(\lambda)\mathscr{D}(\lambda). \tag{61}$$

其中 W_j^+, $j = 1,2$ 和 U_3^+ 取如下形式对 $K_{\mathrm{I}}^+(\lambda)$:

$$W_1^+(\lambda) = \xi^+ - \lambda \ ,$$

$$W_2^+(\lambda) = \xi^+ - \lambda \ ,$$

$$U_3^+(\lambda) = \xi^+ - \mathrm{i} + \lambda \ . \tag{62}$$

对 $K_{\mathrm{II}}^+(\lambda)$:

$$W_1^+(\lambda) = \xi^+ - \lambda \ ,$$

$$W_2^+(\lambda) = \xi^+ - \mathrm{i} + \lambda \ ,$$

$$U_3^+(\lambda) = -(\xi^+ + \lambda). \tag{63}$$

4.2 对易关系和嵌套代数 Bethe ansatz 方法的第一步

对代数 Bethe ansatz 方法,应该得到 $\mathscr{T}$的元素的对易关系. 对于反射边界条件的情形,须以反射方程(35)替代 Yang-Baxter关系,首先引入变换

$$\mathscr{A}_{ab}(\lambda) = \tilde{\mathscr{A}}_{ab}(\lambda) - \delta_{ab}\frac{b(2\lambda)}{a(2\lambda) - b(2\lambda)}\mathscr{D}(\lambda) \tag{64}$$

它是包括变换(53,56)的更一般的写法. 接着,我们试图找到 $\tilde{\mathscr{A}}_{aa}$, $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{C}_b$之间的对易关系,$\tilde{\mathscr{A}}_{aa}$和 $\mathscr{C}_b$之间的对易关系是不必要的,因为它们之间会出现两个或更多的必要项,那样的话,代数 Bethe ansatz 方法将不能处理,为了方便,重新写出反射方程的指标形式:

$$R(\lambda-\mu)_{a_1a_2}^{b_1b_2}\mathscr{T}(\lambda)_{b_1}^{c_1}R_{21}(\lambda+\mu)_{c_1b_2}^{d_1c_2}\mathscr{T}(\mu)_{c_2}^{d_2}(-1)^{(\epsilon_{b_1}+\epsilon_{c_1})\epsilon_{b_2}} =$$

$$\mathscr{T}(\mu)_{a_2}^{b_2}R(\lambda+\mu)_{a_1b_2}^{b_1c_2}\mathscr{T}(\lambda)_{b_1}^{c_1}R_{21}(\lambda-\mu)_{c_1c_2}^{d_1d_2}(-1)^{(\epsilon_{b_1}+\epsilon_{c_1})\epsilon_{c_2}} \ . \tag{65}$$

取反射方程指标的特殊值,取 $a_1 = a_2 = 3$, d_1, $d_2 \neq 3$, 可以找到

$$\mathscr{C}_{d_1}(\lambda)\mathscr{C}_{d_2}(\mu) = (-1)^{(1+\epsilon_{c_1})\epsilon_{c_2}-1-\epsilon_{d_1}}\frac{\lambda-\mu+\mathrm{i}}{\lambda-\mu-\mathrm{i}}\mathscr{C}_{c_2}(\mu)\mathscr{C}_{c_1}(\lambda)\,R(\lambda-\mu)_{c_1c_2}^{d_1d_2} \ . \tag{66}$$

它意味着 $\mathscr{C}(\lambda)$和 $\mathscr{C}(\mu)$对易到一个标量上,以后将用这个性质去构造转移矩阵的本征矢,注意这里对易关系中的指标取值是 1,2,别的对易关系指标也是如此,以后不再作特殊说明. 取 $a_1 = a_2 = d_2 = 3$, $d_1 \neq 3$, 利用变换(64),得到 $\mathscr{D}$和 $\mathscr{C}$之间的对易关系,

$$\mathscr{D}(\lambda)\mathscr{C}_{d_1}(\mu)=\frac{(\lambda+\mu)(\lambda-\mu+\mathrm{i})}{(\lambda+\mu-\mathrm{i})(\lambda-\mu)}\mathscr{C}_{d_1}(\mu)\mathscr{D}(\lambda)-\frac{2\mu\mathrm{i}}{(2\mu-\mathrm{i})(\lambda-\mu)}\mathscr{C}_{d_1}(\lambda)\mathscr{D}(\mu)+\frac{\mathrm{i}}{\lambda+\mu-\mathrm{i}}\mathscr{C}_{b_1}(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}_{b_1d_1}(\mu)\ . \tag{67}$$

要得到$\tilde{\mathscr{A}}$和$\mathscr{C}$之间的对易关系,计算非常复杂. 这里仅给出一个骨架,取指标$a_2=3$, $a_1, d_1, d_2\neq 3$,有

$$\begin{aligned}&(-1)^{\epsilon_{a_1}+\epsilon_{d_1}}a(\lambda-\mu)a(\lambda+\mu)\mathscr{A}_{a_1d_1}(\lambda)\mathscr{C}_{d_2}(\mu)+\\&(-1)^{\epsilon_{a_1}+\epsilon_{d_1}}(1-\delta_{a_1d_1})b(\lambda-\mu)a(\lambda+\mu)\mathscr{C}_{d_1}(\lambda)\mathscr{A}_{a_1d_2}(\mu)+\\&\delta_{a_1d_1}\{b(\lambda-\mu)b(\lambda+\mu)\mathscr{D}(\lambda)\mathscr{C}_{d_2}(\mu)+\\&(-1)^{\epsilon_{c_1}\epsilon_{a_1}}b(\lambda-\mu)R_{21}(\lambda+\mu)^{a_1c_1}_{c_1a_1}\mathscr{C}_{c_1}(\lambda)\mathscr{A}_{c_1d_2}(\mu)\}=\\&(-1)^{(1+\epsilon_{c_1})\epsilon_{a_1}}\mathscr{T}(\mu)^3_3R(\lambda+\mu)^{3a_1}_{a_13}\mathscr{T}(\lambda)^{c_1}_3R_{21}(\lambda-\mu)^{d_1d_2}_{c_1a_1}+\\&(-1)^{(\epsilon_{b_1}+\epsilon_{c_1})\epsilon_{c_1}}\mathscr{T}(\mu)^{b_2}_3R(\lambda+\mu)^{b_1c_2}_{a_1b_2}\mathscr{T}(\lambda)^{c_1}_{b_1}R_{21}(\lambda-\mu)^{d_1d_2}_{c_1c_2}.\end{aligned}\tag{68}$$

把变换(64)带入这个关系考虑到四种情形:1. $a_1\neq d_1, d_1=d_2$; 2. $a_1\neq d_1$, $d_1\neq d_2$; 3. $a_1=d_1=d_2$; 4. $a_1=d_1\neq d_2$. 就可以算出(68)的结果. 但是它仍然很复杂,导致代数Bethe ansatz方法不能处理. 幸运的是,可以把以上四种情形的结果总结为一个统一的算式:

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathscr{A}}_{a_1d_1}(\lambda)\mathscr{C}_{d_2}(\mu)=\\&(-1)^{1+\delta_{a_1d_1}+(\epsilon_{a_1}\epsilon_{c_1}+\epsilon_{d_1}\epsilon_{b_1})\epsilon_{b_1}}\times\frac{(\lambda-\mu+\mathrm{i})(\lambda+\mu)}{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu-\mathrm{i})}r_{12}(\lambda+\mu-\mathrm{i})^{c_1b_2}_{a_1c_1}r_{21}(\lambda-\mu)^{d_1d_2}_{b_1b_2}\times\\&\mathscr{C}_{c_2}(\mu)\tilde{\mathscr{A}}_{c_1b_1}(\lambda)+(-1)^{\epsilon_{a_1}\epsilon_{b_1}\epsilon_{b_2}+\delta_{b_1b_2}\delta_{b_1d_1}}\frac{2\mathrm{i}\lambda}{(\lambda-\mu)(2\lambda-\mathrm{i})}r(2\lambda-\mathrm{i})^{b_2d_1}_{a_1b_1}\times\\&\mathscr{C}_{b_1}(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}_{b_2d_2}(\mu)-(-1)^{\epsilon_{a_1}\epsilon_{b_2}\epsilon_{d_2}+\delta_{a_1b_2}\delta_{a_1b_2}}\frac{4\mathrm{i}\lambda\mu}{(2\lambda-\mathrm{i})(2\mu-\mathrm{i})(\lambda+\mu-\mathrm{i})}\times\\&r(2\lambda-\mathrm{i})^{d_2d_1}_{a_1b_2}\mathscr{C}_{b_2}(\lambda)\mathscr{D}(\mu).\end{aligned}\tag{69}$$

其中r矩阵的元素,定义为初始R矩阵的指标取1,2时的元素

$$r(\lambda)^{bd}_{ac}=a(\lambda)\delta_{ab}\delta_{bd}-b(\lambda)\delta_{ac}\delta_{bd}=a(\lambda)I+b(\lambda)\Pi^{(1)}\ , \tag{70}$$

其中$\Pi^{(1)}$是4×4置换矩阵对应于阶$\epsilon_1=1$, $\epsilon_2=0$的情形,r矩阵可以写为:

$$r(\lambda)=\begin{pmatrix}a(\lambda)-b(\lambda)&&&\\&a(\lambda)&b(\lambda)&\\&b(\lambda)&a(\lambda)&\\&&&1\end{pmatrix}. \tag{71}$$

类似周期性边界条件时的情形，构造带反射边界条件的转移矩阵本征矢的集合为

$$\mathscr{C}_{d_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{d_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{d_n}(\mu_n)|0\rangle F^{d_1\cdots d_n}\ . \tag{72}$$

这里$F^{d_1\cdots d_n}$是谱参数μ_j的函数．这个方法是代数Bethe ansatz方法中所熟知的．转移矩阵作用在本征矢上，可以找到转移矩阵$t(\lambda)$的本征值$\Lambda(\lambda)$和Bethe ansatz方程集合。$\mathscr{D}$作用在如上定义的本征矢上，利用对易关系(67)，及$\mathscr{D}$作用在真空态(58)上的值，有

$$\mathscr{D}(\lambda)\mathscr{C}_{d_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{d_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{d_n}(\mu_n)|0\rangle F^{d_1\cdots d_n}=$$

$$U_3(\lambda)\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\mu_i)(\lambda-u_i+\mathrm{i})}{(\lambda-\mu_i)(\lambda+\mu_i-\mathrm{i})}\ \mathscr{C}_{d_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{d_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{d_n}(\mu_n)|0\rangle F^{d_1\cdots d_n}+\mathrm{u.t} \tag{73}$$

其中省略了不必要项u.t..

然后$\tilde{\mathscr{A}}_{aa}(\lambda)$作用在假定的本征矢上，多次利用对易关系(69)有：

$$\tilde{\mathscr{A}}_{aa}(\lambda)\mathscr{C}_{d_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{d_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{d_n}(\mu_n)|0\rangle F^{d_1\cdots d_n}=$$

$$(-1)^{Q}\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\mu_i)(\lambda-\mu_i+\mathrm{i})}{(\lambda-\mu_i)(\lambda+\mu_i-\mathrm{i})}r_{12}(\lambda+\mu_1-\mathrm{i})_{ac_1}^{a_1e_1}r_{21}(\lambda-\mu_1)_{b_1e_1}^{ad_1}\times$$

$$r_{12}(\lambda+\mu_2-\mathrm{i})_{a_1a_1}^{a_2e_2}r_{21}(\lambda-\mu_2)_{b_2e_2}^{b_1d_2}\cdots r_{12}(\lambda+\mu_n-\mathrm{i})_{a_{n-1}c_n}^{a_ne_n}r_{21}(\lambda-\mu_n)_{b_ne_n}^{b_{n-1}d_n}\times$$

$$\mathscr{C}_{c_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{c_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{c_n}(\mu_n)\tilde{\mathscr{A}}_{a_nb_n}(\lambda)|0\rangle F^{d_1\cdots d_n}+\mathrm{u.t.}, \tag{74}$$

其中

$$Q=n+1+\sum_{i=1}^{n-1}\delta_{a_ib_i}+(\epsilon_a\epsilon_{a_1}+\epsilon_{b_1}\epsilon_{a_1})\epsilon_{e_1}+\sum_{i=1}^{n-1}(\epsilon_{a_i}\epsilon_{a_{i+1}}+\epsilon_{b_{i+1}}\epsilon_{b_i})\epsilon_{e_{i+1}}\ . \tag{75}$$

总结关系(50,58)有：

$$\tilde{\mathscr{A}}_{a_nb_n}(\lambda)|0\rangle=\delta_{a_nb_n}W_{a_n}(\lambda)a^{2L}(\lambda)|0\rangle. \tag{76}$$

转移矩阵可重新写为

$$t(\lambda)=-W_1^{+}(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}_{11}(\lambda)+W_2^{+}(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}_{22}(\lambda)-U_3^{+}(\lambda)\mathscr{D}(\lambda)=$$

$$(-1)^{\epsilon_a}W_a^{+}(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}_{aa}(\lambda)-U_3^{+}(\lambda)\mathscr{D}(\lambda)\ . \tag{77}$$

所以带反射边界条件的转移矩阵的本征值可写为：

$$t(\lambda)\mathscr{C}_{d_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{d_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{d_n}(\mu_n)|0\rangle F^{d_1\cdots d_n}=$$

$$-U_3^{+}(\lambda)U_3(\lambda)\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\mu_i)(\lambda-u_i+\mathrm{i})}{(\lambda-\mu_i)(\lambda+\mu_i-\mathrm{i})}\ \mathscr{C}_{d_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{d_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{d_n}(\mu_n)|0\rangle F^{d_1\cdots d_n}+$$

$$a^{2L}(\lambda)\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\mu_i)(\lambda-u_i+\mathrm{i})}{(\lambda-\mu_i)(\lambda+\mu_i-\mathrm{i})}\ \mathscr{C}_{d_1}(\mu_1)\mathscr{C}_{d_2}(\mu_2)\cdots\mathscr{C}_{d_n}(\mu_n)|0\rangle t^{(1)}(\lambda)_{c_1\cdots c_n}^{d_1\cdots d_n}F^{d_1\cdots d_n}+\mathrm{u.t.}. \tag{78}$$

其中 $t^{(1)}(\lambda)$ 即所谓的嵌套转移矩阵，利用关系 (74)，它可被定义为：

$$t^{(1)}(\lambda)_{c_1\cdots c_n}^{d_1\cdots d_n} = (-1)^{Q+\epsilon_a} W_a^{+}(\lambda)\{r(\lambda+\mu_1-\mathrm{i})_{ac_1}^{a_1e_1} r(\lambda+\mu_2-\mathrm{i})_{a_1c_2}^{a_2e_2} \times \cdots r(\lambda+\mu_n-\mathrm{i})_{a_{n-1}c_n}^{a_ne_n}\}\delta_{a_nb_n} W_{a_n}(\lambda) \times \{r_{21}(\lambda-\mu_n)_{b_ne_n}^{b_{n-1}d_n}\cdots r_{21}(\lambda-\mu_2)_{b_2e_2}^{b_1d_2} r_{21}(\lambda-\mu_1)_{b_1e_1}^{ad_1}\} \tag{79}$$

发现嵌套转移矩阵可被定义为对应于各向异性情形时的带反射边界条件的转移矩阵，阶 $\epsilon_1 = 1,\ \epsilon_2 = 0$,

$$t^{(1)}(\lambda) = \mathrm{str} K^{(1)+}(\tilde{\lambda}) T^{(1)}(\tilde{\lambda},\ \{\tilde{\mu}_i\}) K^{(1)}(\tilde{\lambda}) T^{(1)-1}(-\tilde{\lambda},\ \{\tilde{\mu}_i\}) , \tag{80}$$

其中 $\tilde{\lambda} = \lambda - \frac{\mathrm{i}}{2},\ \tilde{\xi} = \xi - \frac{\mathrm{i}}{2},\ \tilde{\xi}^{+} = \xi^{+} + \frac{\mathrm{i}}{2}$，以后会标记 $\tilde{\mu} = \mu - \frac{\mathrm{i}}{2}$. 具体地有 $K_{\mathrm{I}}^{(1)+}(\tilde{\lambda}) = \mathrm{i}d$. 作用于一个完整因子 $\tilde{\xi}^{+} - \mathrm{i} - \tilde{\mu}$，和

$$K_{\mathrm{II}}^{(1)+}(\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} W_1^{+}(\tilde{\lambda}) & \\ & W_2^{+}(\tilde{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{+} - \mathrm{i} - \tilde{\mu} & \\ & \tilde{\xi}^{+} - \mathrm{i} + \tilde{\mu} \end{pmatrix} , \tag{81}$$

各对应于相应的 K_{I}^{+} 和 K_{II}^{+}. 我们还有 $K_{\mathrm{I}}^{(1)}(\tilde{\lambda}) = \mathrm{i}d$. 作用于一个完整因子 $\dfrac{(2\tilde{\lambda}+\mathrm{i})(\tilde{\xi}+\tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}}$ 和

$$K_{\mathrm{II}}^{(1)}(\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} W_1(\tilde{\lambda}) & \\ & W_2(\tilde{\lambda}) \end{pmatrix} = \frac{(2\tilde{\lambda}+\mathrm{i})}{2\tilde{\lambda}} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} + \tilde{\lambda} & \\ & \tilde{\xi} - \tilde{\lambda} \end{pmatrix} , \tag{82}$$

各对应于相应的 K_{I} 和 K_{II}. 列对列 monodromy 矩阵 $T^{(1)}(\tilde{\lambda}, \{\tilde{\mu}_i\})$（对应于周期性边界条件）定义为：

$$T_{aa_n}^{(1)}(\tilde{\lambda},\ \{\tilde{\mu}_i\})_{c_1\cdots c_n}^{e_1\cdots e_n} = r(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_1)_{ac_1}^{a_1e_1} r(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_2)_{a_1c_2}^{a_2e_2}\cdots r(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_n)_{a_{n-1}c_n}^{a_ne_n} = L_1^{(1)}(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_1)(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_2)\cdots(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_n). \tag{83}$$

L 算子取如下形式

$$L_k^{(1)}(\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} a(\tilde{\lambda}) - b(\tilde{\lambda})e_k^{11} & b(\tilde{\lambda})e_k^{21} \\ b(\tilde{\lambda})e_k^{12} & a(\tilde{\lambda}) + b(\tilde{\lambda})e_k^{22} \end{pmatrix} . \tag{84}$$

它的逆：

$$T^{(1)^{-1}}(-\tilde{\lambda},\ \{\tilde{\mu}_i\}) = r_{21}(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_n)_{b_ne_n}^{b_{n-1}d_n}\cdots r_{21}(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_2)_{b_2e_2}^{b_1d_2} r_{21}(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_1)_{b_1e_1}^{ad_1} = L_n^{(1)^{-1}}(-\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_n)\cdots L_2^{(1)^{-1}}(-\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_2) L_1^{(1)^{-1}}(-\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_1) \tag{85}$$

其中用到了 r 矩阵的幺正关系 $r_{12}(\lambda)r_{21}(-\lambda) = 1$.

在这一部分阐明了寻找初始转移矩阵 $t(\lambda)$ 的本征值问题可变为寻找嵌套转移矩阵的本征值问题. 在关系式 (77) 中，除了对本征值有贡献的必要项外，还有不必要项，为了保

证假定的本征矢是转移矩阵的本征矢，不必要项必须被消掉．利用假设本征矢(72)的对称性质(66)和标准的代数 Bethe ansatz 方法，发现如果$\mu_1\cdots\mu_n$满足如下的 Bethe ansatz 方程，不必要项将会消失．

$$\Lambda^{(1)}(\mu_j) = a^{-2L}(\mu_j)U_3(\mu_j)U_3^+(\mu_j)\frac{2\mu_j}{2\mu_j - \mathrm{i}}(-1)^{\epsilon_{d_j}}[2\mu_j - \mathrm{i} + 2(-1)^{\epsilon_{d_j}}\mathrm{i}],\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{86}$$

其中$\Lambda^{(1)}$用来标记嵌套转移矩阵$t^{(1)}(\lambda)$的本征值．

由上文可知以下要做的就是寻找嵌套转移矩阵$t^{(1)}(\lambda)$的本征值．

4.3 嵌套代数 Bethe ansatz 方法

我们希望嵌套转移矩阵的本征值可以像求初始转移矩阵的时候那样解．这里称$t^{(1)}$为转移矩阵似乎存在逻辑错误，因为没有证明对应不同的谱参数$t^{(1)}$彼此对易．另一方面$K^{(1)}$和$K^{(1)+}$在以上章节中已详细定义，但是它们不是从反射方程和对偶反射方程得出．在这一部分将证明，在反射边界条件的框架中，以上两个问题都会被解决．

已经知道阶$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 0$的阶化 Yang-Baxter关系是成立的：

$$r(\lambda - \mu)L_1^{(1)}(\lambda)L_2^{(1)}(\mu) = L_2^{(1)}(\mu)L_1^{(1)}(\lambda)\, r(\lambda - \mu)\ . \tag{87}$$

因此列对列 monodromy 矩阵的 Yang-Baxter关系为：

$$r(\lambda - \mu)T_1^{(1)}(\lambda,\ \{\mu_i\})T_2^{(1)}(\mu,\ \{\mu_i\}) = T_2^{(1)}(\mu,\{\mu_i\})T_1^{(1)}(\lambda,\ \{\mu_i\})r(\lambda - \mu)\ . \tag{88}$$

列出反射方程：

$$r_{12}(\lambda - \mu)K_1^{(1)}(\lambda)\, r_{21}(\lambda + \mu)K_2^{(1)}(\mu) = K_2^{(1)}(\mu)\, r_{12}(\lambda + \mu)\, K_1^{(1)}(\lambda)\, r_{21}(\lambda - \mu). \tag{89}$$

直接解这个反射方程发现：

$$K^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \xi + \lambda & \\ & \xi - \lambda \end{pmatrix} \tag{90}$$

是反射方程的解，容易证明$K^{(1)} = \mathrm{i}d$也是一个解．反射方程的这些解是由以上的小节中所定义的结果构成．故可以证明嵌套双列 monodromy 矩阵

$$\mathcal{T}^{(1)}(\lambda, \{\mu_i\}) \equiv T^{(1)}(\lambda,\ \{\mu_i\})K^{(1)}(\lambda)\, T^{(1)-1}(-\lambda, \{\mu_i\}) \tag{91}$$

满足反射方程

$$\begin{aligned} &r_{12}(\lambda - \mu)\mathcal{T}_1^{(1)}(\lambda, \{\mu_i\})\, r_{21}(\lambda + \mu)\mathcal{T}_2^{(1)}(\mu,\ \{\mu_i\}) = \\ &\mathcal{T}_2^{(1)}(\mu,\ \{\mu_i\})\, r_{12}(\lambda + \mu)\mathcal{T}_1^{(1)}(\lambda, \{\mu_i\})\, r_{21}(\lambda - \mu)\ . \end{aligned} \tag{92}$$

可以证明r矩阵满足一个幺正关系

$$r_{12}^{\mathrm{st}_1}(\lambda)\, r_{21}^{\mathrm{st}_1}(2\mathrm{i} - \lambda) = a(\lambda)a(2\mathrm{i} - \lambda)\cdot \mathrm{i}d. \tag{93}$$

利用这个关系和 r 矩阵的幺正关系 $r_{12}(\lambda)\,r_{21}(-\lambda)=1\cdot id.$，我们引出下面的对偶反射方程：

$$r_{12}(\mu-\lambda)\,K_1^{(1)+}(\lambda)\,r_{21}(\lambda+\mu+2\mathrm{i})K_2^{(1)+}(\mu)=$$

$$K_2^{(1)+}(\mu)\,r_{12}(\lambda+\mu+2\mathrm{i})K_1^{(1)+}(\lambda)\,r_{21}(\mu-\lambda). \tag{94}$$

同样发现对偶反射方程的解是由前面小节中的结果 $K^{(1)+}$ (80)所构成，重复类似第三部分的过程，不难发现所定义的嵌套转移矩阵对于不同的谱参数构成一个对易族.

现在用代数 Bethe ansatz 方法去解嵌套转移矩阵 $t^{(1)}(\lambda)$的本征值$\Lambda^{(1)}(\lambda)$. 可把嵌套双列 monodromy 矩阵写为：

$$\mathscr{T}^{(1)}(\lambda,\ \{\mu_i\})=\begin{pmatrix}\mathscr{A}^{(1)}(\lambda) & \mathscr{B}^{(1)}(\lambda)\\ \mathscr{C}^{(1)}(\lambda) & \mathscr{D}^{(1)}(\lambda)\end{pmatrix}=T^{(1)}(\lambda,\{\mu_i\})\,K^{(1)}(\lambda)T^{(1)-1}(-\lambda,\{\mu_i\})=$$

$$\begin{pmatrix}A^{(1)}(\lambda) & B^{(1)}(\lambda)\\ C^{(1)}(\lambda) & D^{(1)}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1^{(1)}(\lambda) & \\ & k_2^{(1)}(\lambda)\end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix}\bar{A}^{(1)}(-\lambda) & \bar{B}^{(1)}(-\lambda)\\ \bar{C}^{(1)}(-\lambda) & \bar{D}^{(1)}(-\lambda)\end{pmatrix}. \tag{95}$$

为了方便，再引入一个变换

$$A^{(1)}(\lambda)=\mathscr{A}^{(1)}(\lambda)+\frac{\mathrm{i}}{2\lambda+\mathrm{i}}\mathscr{D}^{(1)}(\lambda). \tag{96}$$

由于嵌套双列 monodromy 矩阵满足反射方程(92)，故可找到下面的对易关系：

$$\mathscr{D}^{(1)}(\lambda)\mathscr{C}^{(1)}(\mu)=\frac{(\lambda+\mu)(\lambda-\mu-\mathrm{i})}{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu+\mathrm{i})}\mathscr{C}^{(1)}(\mu)\mathscr{D}^{(1)}(\lambda)-$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\lambda+\mu+\mathrm{i}}\mathscr{C}^{(1)}(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}^{(1)}(\mu)+\frac{2\mathrm{i}\mu}{(2\mu+\mathrm{i})(\lambda-\mu)}\mathscr{C}^{(1)}(\lambda)\mathscr{D}^{(1)}(\mu), \tag{97}$$

$$\tilde{\mathscr{A}}^{(1)}(\lambda)\mathscr{C}^{(1)}(\mu)=\frac{(\lambda+\mu)(\lambda-\mu-\mathrm{i})}{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu+\mathrm{i})}\mathscr{C}^{(1)}(\mu)\tilde{\mathscr{A}}^{(1)}(\lambda)+$$

$$\frac{2\mathrm{i}\lambda}{(2\lambda+\mathrm{i})(\lambda-\mu)}\mathscr{C}^{(1)}(\lambda)\tilde{\mathscr{A}}^{(1)}(\mu)-\frac{4\mathrm{i}\lambda\mu}{(2\mu+\mathrm{i})(2\lambda+\mathrm{i})(\lambda+\mu+\mathrm{i})}\mathscr{C}^{(1)}(\lambda)\mathscr{D}^{(1)}(\mu), \tag{98}$$

$$\mathscr{C}^{(1)}(\lambda)\mathscr{C}^{(1)}(\mu)=-\frac{\lambda-\mu-\mathrm{i}}{\lambda-\mu+\mathrm{i}}\mathscr{C}^{(1)}(\mu)\mathscr{C}^{(1)}(\lambda). \tag{99}$$

对嵌套情形选参考态为：

$$|0\rangle_k^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ |0\rangle^{(1)}=\otimes_{k=1}^{n}|0\rangle_k^{(1)}\ . \tag{100}$$

利用定义(83,85)知道嵌套 monodromy 矩阵和 monodromy 矩阵的逆作用在参考态上的结果

$$T^{(1)}(\lambda,\{\mu_i\})|0\rangle^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}(\tilde{\lambda}) & B^{(1)}(\tilde{\lambda}) \\ C^{(1)}(\tilde{\lambda}) & D^{(1)}(\tilde{\lambda}) \end{pmatrix}|0\rangle^{(1)} =$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{i=1}^{n} a(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_i) & 0 \\ C^{(1)}(\tilde{\lambda}) & 1 \end{pmatrix}|0\rangle^{(1)}, \tag{101}$$

$$T^{(1)-1}(-\lambda,\{\mu_i\})|0\rangle^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{A}^{(1)}(\tilde{\lambda}) & \bar{B}^{(1)}(\tilde{\lambda}) \\ \bar{C}^{(1)}(\tilde{\lambda}) & \bar{D}^{(1)}(\tilde{\lambda}) \end{pmatrix}|0\rangle^{(1)} =$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{i=1}^{n} a(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_i) & 0 \\ \bar{C}^{(1)}(\tilde{\lambda}) & 1 \end{pmatrix}|0\rangle^{(1)}, \tag{102}$$

把这些关系带入(95)，得到嵌套 monodromy 矩阵作用在嵌套真空态 $|0\rangle^{(1)}$ 上的结果：

$$\mathscr{B}^{(1)}(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)} = 0,\ \mathscr{C}^{(1)}(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)} \neq 0, \tag{103}$$

$$\mathscr{D}^{(1)}(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)} = U_2(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)}. \tag{104}$$

这里采用标记 $U_2 = k_2^{(1)}$，对 K_{I} 情形，$U_2(\tilde{\lambda}) = \dfrac{(2\tilde{\lambda}+\mathrm{i})(\tilde{\lambda}+\tilde{\xi})}{2\tilde{\lambda}}$，对 K_{II} 情形 $U_2(\tilde{\lambda}) = \dfrac{(2\tilde{\lambda}+\mathrm{i})(\tilde{\xi}-\tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}}$.

$\tilde{\mathscr{A}}^{(1)}$的结果并不向以上那样直接，已知

$$\mathscr{A}^{(1)}(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)} = k_1^{(1)}(\tilde{\lambda})A^{(1)}(\tilde{\lambda})\bar{A}^{(1)}(-\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)} + k_2^{(1)}(\tilde{\lambda})B^{(1)}(\tilde{\lambda})\bar{C}^{(1)}(-\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)}. \tag{105}$$

利用 Yang–Baxterg关系(87)，上面的关系变为

$$\mathscr{A}^{(1)}(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)} = [k_1^{(1)}(\tilde{\lambda}) - k_2^{(1)}(\tilde{\lambda})b(2\tilde{\lambda})]\prod_{i=1}^{n}[a(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_i)a(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_i)]|0\rangle^{(1)} +$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2\tilde{\lambda}+\mathrm{i}}\mathscr{D}^{(1)}(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)}. \tag{106}$$

利用变换(95)得到

$$\tilde{\mathscr{A}}^{(1)}(\tilde{\lambda})|0\rangle^{(1)} = U_1(\tilde{\lambda})\prod_{i=1}^{n}[a(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_i)\,a(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_i)]|0\rangle^{(1)}, \tag{107}$$

其中 $U_1(\tilde{\lambda}) = k_1^{(1)}(\tilde{\lambda}) - k_2^{(1)}(\tilde{\lambda})b(2\tilde{\lambda})$，$U_1$的具体形式如下：

对 $K_{\mathrm{I}}(\lambda)$：

$$U_1(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} + \tilde{\xi}, \tag{108}$$

对 $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$：

$$U_2(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} + \tilde{\xi} + \mathrm{i}. \tag{109}$$

嵌套转移矩阵如下形式：

$$t^{(1)}(\tilde{\lambda}) = \mathrm{str}K^{(1)}(\tilde{\lambda})\mathscr{T}^{(1)}(\tilde{\lambda}) = -k_1^{(1)+}(\tilde{\lambda})\mathscr{A}^{(1)}(\tilde{\lambda}) + k_2^{(1)+}(\tilde{\lambda})\mathscr{D}^{(1)}(\tilde{\lambda}) =$$
$$-U_1^+(\tilde{\lambda})\tilde{\mathscr{A}}^{(1)}(\tilde{\lambda}) + U_2^+(\tilde{\lambda})\mathscr{D}^{(1)}(\tilde{\lambda}), \tag{110}$$

这里 $U_1^+ = k_1^{(1)+}$，$U_2^+(\tilde{\lambda}) = k_2^{(1)+}(\tilde{\lambda}) - \frac{\mathrm{i}}{2\tilde{\lambda}+\mathrm{i}}k_1^{(1)+}(\tilde{\lambda})$，具体的：

对 $K_{\mathrm{I}}^+(\lambda)$：

$$U_1^+(\tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}^+ - \mathrm{i} - \tilde{\lambda}\ , \tag{111}$$

$$U_2^+(\tilde{\lambda}) = \frac{2\tilde{\lambda}(\tilde{\xi}^+ - \mathrm{i} - \tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}+\mathrm{i}}\ . \tag{112}$$

对 $K_{\mathrm{II}}^+(\lambda)$：

$$U_1^+(\tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}^+ - \mathrm{i} - \tilde{\lambda}\ , \tag{113}$$

$$U_2^+(\tilde{\lambda}) = \frac{2\tilde{\lambda}(\tilde{\xi}^+ + \tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}+\mathrm{i}}\ . \tag{114}$$

利用标准的代数 Bethe ansatz 方法，假定嵌套转移矩阵的本征矢构造为 $\mathscr{C}(\tilde{\mu}_1^{(1)})\mathscr{C}(\tilde{\mu}_2^{(1)})\cdots\mathscr{C}(\tilde{\mu}_m^{(1)})|0\rangle^{(1)}$，嵌套转移矩阵作用于本征矢上，重复使用对易关系(97,98)，就得到本征值：

$$\Lambda^{(1)}(\tilde{\lambda}) = -U_1^+(\tilde{\lambda})U_1(\tilde{\lambda})\prod_{i=1}^{n}[a(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_i)\,a(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_i)]\prod_{l=1}^{m}\frac{(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_l^{(1)})(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_l^{(1)}-\mathrm{i})}{(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_l^{(1)})(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_l^{(1)}+\mathrm{i})} +$$
$$U_2^+(\tilde{\lambda})U_2(\tilde{\lambda})\prod_{l=1}^{m}\frac{(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_l^{(1)})(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_l^{(1)}-\mathrm{i})}{(\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}_l^{(1)})(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}_l^{(1)}+\mathrm{i})} \tag{115}$$

其中 $\tilde{\mu}_1^{(1)},\cdots,\tilde{\mu}_m^{(1)}$ 应该满足如下的 Bethe ansatz 方程：

$$\frac{U_1(\tilde{\mu}_j^{(1)})U_1^+(\tilde{\mu}_j^{(1)})}{U_2(\tilde{\mu}_j^{(1)})U_2^+(\tilde{\mu}_j^{(1)})}\prod_{i=1}^{n}[a(\tilde{\mu}_j^{(1)}+\tilde{\mu}_i)a(\tilde{\mu}_j^{(1)}-\tilde{\mu}_i)] = 1,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m. \tag{116}$$

因此，带反射边界条件的转移矩阵(36)的本征值就得到了：

$$\Lambda(\lambda) = [U_3^+(\lambda)U_3(\lambda) - a^{2L}(\lambda)\Lambda^{(1)}(\tilde{\lambda})]\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda+\mu_i)(\lambda-\mu_i+\mathrm{i})}{(\lambda-\mu_i)(\lambda+\mu_i-\mathrm{i})}\ . \tag{117}$$

为了直观，给出 U 和 U^+ 的一个总结：

对 $K_{\mathrm{I}}^+(\lambda)$：

$$U_1^+(\tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}^+ - \mathrm{i} - \tilde{\lambda}\ ,$$

$$U_2^+(\tilde{\lambda}) = \frac{2\tilde{\lambda}(\tilde{\xi}^+ - \mathrm{i} - \tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}+\mathrm{i}}\ ,$$

$$U_3^+(\lambda) = \xi^+ - \mathrm{i} + \lambda\ . \tag{118}$$

对 $K_{\mathrm{II}}^{+}(\lambda)$:

$$U_1^+(\tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}^+ - \mathrm{i} - \tilde{\lambda} ,$$

$$U_2^+(\tilde{\lambda}) = \frac{2\tilde{\lambda}(\tilde{\xi}^+ + \tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}+\mathrm{i}} ,$$

$$U_3^+(\lambda) = -(\xi^+ + \lambda). \tag{119}$$

对 $K_{\mathrm{I}}(\lambda)$:

$$U_1(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} + \tilde{\xi} ,$$

$$U_2(\tilde{\lambda}) = \frac{(2\tilde{\lambda}+\mathrm{i})(\tilde{\lambda}+\tilde{\xi})}{2\tilde{\lambda}} ,$$

$$U_3(\lambda) = \xi - \lambda . \tag{120}$$

对 $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$:

$$U_1(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} + \tilde{\xi} + \mathrm{i},$$

$$U_2(\tilde{\lambda}) = \frac{(2\tilde{\lambda}+\mathrm{i})(\tilde{\xi}-\tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}} ,$$

$$U_3(\lambda) = \xi - \lambda . \tag{121}$$

我们知道 U 和 U^+ 彼此独立,故这里有 $\{U,U^+\}$ 的四种组合,它们分别为 $\{\mathrm{I},\mathrm{I}\}$,$\{\mathrm{I}\ \mathrm{II}\}$,$\{\mathrm{II}\ \mathrm{I}\}$ 和 $\{\mathrm{II},\mathrm{II}\}$.

5 总结和讨论

我们研究了带反射边界条件的超对称 t-J模型. 首先研究了R矩阵的幺正关系和交叉幺正关系,利用这些关系引出了超对称 t-J 模型的反射方程和对偶反射方程. 解反射方程和对偶反射方程,得到了它们各自两个不同类型的解. 这样就构造出了超对称 t-J模型的转移矩阵,证明了转移矩阵构成一个对易族. 利用嵌套 Bethe ansatz 方法,得到了转移矩阵的本征值.

上面所讨论的都是在 FBF 阶化的情形下. 对周期性边界条件而言,三种阶化背景[3]下的超对称 t-J模型已被研究的很完备,我们也可以研究另外两种阶化(FFB, BFF)下的性质,其研究方法同本文类似.

本文中超对称 t-J 模型的 R矩阵是有理的,当然存在更一般的超对称 t-J模型的 R矩阵——三角 R矩阵,故还可以研究带反射边界条件的三角 R矩阵的超对称 t-J模型.

进一步研究本文的结果非常有趣,比如取热力学极限,将得到诸如自由能,表面自由能和面际张力等物理量.

另外还可以把超对称 t-J模型扩张到一个更一般的超对称情形,它的 R矩阵将等价于 Perk-Shultz模型[12]的 R矩阵.

参 考 文 献

1 Anderson P W. Science, 1987, **235**:1196—1209; Phys. Rev. Lett., 1990, **65**:2306—2315

2 Zhang F C, Rice T M. Phys. Rev., 1998, **B37**:3759—3772

3 Essler F H L, Korepin V E. Phys. Rev., 1992, **B46**:9147—9165

4 Sklyanin E K. J. Phys., 1988, **A21**:2375—2389

5 Vega H J de. Int. J. Mod. Phys., 1989, **A4**:2371—2386; Ghoshal S, Zamolodchikov A. Int. J. Mod. Phys., 1994, **A9**:3841—3885; Shiroishi M, Wadati M. J. Phys. Soc. Jpn., 1997(1), **66**:1—23

6 Jimbo M, Kedem K, Kojima T et al. Nucl. Phys., 1995, **B441**:437—470

7 Fan H, Hou B Y, Shi K J et al. Nucl. Phys., 1996, **B478**:723—757; Yue R H, Fan H, Hou B Y. Nucl. Phys., 1996, **B462**:167—192; Fan H. Nucl. Phys., 1997, **B488**:409—425; Fan H, Hou B Y, Shi K J. Nucl. Phys., 1997, **B496**[PM]:551—570

8 Yang C N, Yang C P. Phys. Rev., 1996, **105**:321—347; 1996, **151**:258—279

9 Baxter R J. Exactly Slowed Models in Statistical Mechanics. London: Academic Press, 1982

10 Takhtajan L A, Faddeev L D. Russ. Math. Surv., 1979, **34**:11—29; Korepin V E, Izergin G, Bogoliubov N M. Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions and Algebraic Bethe Ansatz. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

11 Cherednik I V. Theor. Math. Phys., 1983, **17**:77—101; 1984, **61**:911—936

12 Perk J H, Shultz C L. Phys. Lett., 1981, **A84**:3759—3776

Algebraic Bethe Ansatz for the Supersymmetric t–J Model With Reflecting Boundary Conditions in FBF Background

Xi Xiaoqiang Shi Kangjie Hou Boyu Fan Heng

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian* 710069)

Abstract In the framwork of the graded quantum inverse scattering method (QISM), we obtain the eigenvalues and eigenvectors of supersymmetric t-J model with reflecting boundary conditions in FBF background. The corresponding Bethe ansatz equation are also obtained.

Key words supersymmetric t-J model, algebraic Bethe ansatz, reflection equation.

Received 10 August 1998