

# $\alpha$ 模型中不固定多重数下的 阶乘矩、粒子数关联矩\*

林海 赵仁

(雁北师范学院物理系 山西大同 037000)

刘连寿

(华中师大粒子物理研究所 武昌 430070)

**摘要** 利用二维相空间自仿射分形的随机级联 $\alpha$ 模型,采用蒙特卡罗模拟的方法,研究了阶乘矩、粒子数关联矩在不固定多重数下,对应于多重数相对起伏强度 $n_f$ 的依赖关系.得到:阶乘矩、粒子数关联矩依赖于多重数相对起伏 $n_f$ ,但间歇指数一般不依赖于 $n_f$ ,当 $n_f$ 较小时这种依赖性得以消除.

**关键词** 高能碰撞 自仿射分形 蒙特卡罗模拟 间歇 阶乘矩  
多重数相对起伏

## 1 引言

在 高能碰撞多重产生中,由于实验的多重数是有限的,导致其相空间元胞 $\delta$ 中的末态粒子数,总是在一个平均数之间起伏不定,这就形成了由于多重数的不足而产生的统计起伏.另外,由于某些动力学的原因,相空间元胞 $\delta$ 中粒子出现的几率 $P$ ,对于不同事件或同一事件的不同区域都可能存在着起伏,这种起伏就是动力学起伏.这两种起伏叠加在一起,使人们很难从末态粒子的矩中直接研究动力学起伏所包含的信息. Bialas 和 Peschanski 提出<sup>[1,2]</sup>,在系统产生的多重数 $N$ 是固定的情况下,粒子数的统计起伏服从 Bernouli 分布,使用末态粒子归一化阶乘矩可以消除统计起伏而直接揭示出高能碰撞系统本身的动力学起伏.进而证明了阶乘矩与几率标度矩的一致性.然而,末态粒子多重数 $N$ 往往是不固定的,在这种情况下必须假定粒子数的统计起伏为 Poisson 分布,阶乘矩才能抑制统计起伏.

在 高能碰撞多重产生的唯象理论研究中,人们常常采用 $\alpha$ 模型<sup>[3]</sup>去研究几率矩 $C_q$ 随相空间改变时的标度行为—间歇现象.若要通过阶乘矩 $F_q$ 研究间歇现象<sup>[4]</sup>,一般是在固定多

1997-06-13收稿

\* 国家自然科学基金资助

重数下, 粒子数分布的统计起伏假定为 Bernouli 分布. 但是按照比较切合实验事实的方法, 如果在  $\alpha$ 模型中取每个碰撞事件的多重数不固定, 理论上粒子数分布的统计起伏应采用 Poisson 分布, 而在  $\alpha$ 模型中一般很难做到这一点. 此时, 粒子数分布如果仍按每个事件的实际多重数取 Bernouli 分布, 阶乘矩是否也能消除统计起伏呢?

由于末态粒子动量相空间的各向异性, 导致相空间分形应该是自仿射的. 而二维相空间自仿射分形的随机级联  $\alpha$ 模型<sup>[5,6]</sup>, 是较典型的自仿射分形模型, 因此, 本文针对这种典型的模型, 就阶乘矩消除统计起伏的问题, 采用蒙特卡罗模拟的方法进行了研究与讨论. 考虑到实验上一般是按照自相似的方式对相空间进行分割统计, 因此在文中的二维自仿射分形模型中采用了自相似的分析方法. 文中对不同平均多重数、不同多重数相对起伏强度的情况, 对每个事件按其实际多重数取粒子数的统计起伏为 Bernouli 分布, 分别找出了几率矩  $C_q$ 、阶乘矩  $F_q$ 随相空间改变时的标度行为. 文中第三部分是关于粒子数关联矩对多重数相对起伏依赖性的讨论. 实验上测量粒子数关联矩一般是在一维情况下进行, 为了能利用文中的二维模型进一步讨论一维的粒子数关联矩, 我们对二维相空间进行了一维投影<sup>[7]</sup>. 进而分别计算了几率关联矩  $C_{pq}$ 和粒子数关联矩  $F_{pq}$ 随相空间改变时的变化行为. 发现, 阶乘矩、粒子数关联矩是依赖于平均多重数的, 即在这种情况下统计起伏并未完全消除. 文中进一步讨论了阶乘矩  $F_q$ 、粒子数关联矩  $F_{pq}$ 依赖平均多重数的原因及消除这种依赖性的途径. 得到, 这种依赖性与碰撞事件多重数的相对起伏强度有很大的关系. 在相对起伏较大时, 依赖性很明显, 但在相对起伏强度比较小时, 即使平均多重数差别很大,  $F_q$ 、 $F_{pq}$ 对多重数的依赖性也能消除. 此时, 阶乘矩、粒子数关联矩分别趋于几率矩和几率关联矩, 统计起伏得以消除. 通过计算, 我们也得到, 间歇指数并不明显依赖于多重数相对起伏强度.

## 2 阶乘矩对多重数相对起伏强度的依赖性

对高能碰撞二维相空间, 采用自仿射分形, 构造二维自仿射随机级联模型<sup>[6]</sup>, 在水平方向和垂直方向分别取  $\lambda_{\parallel} = 2$ ,  $\lambda_{\perp} = 3$  的分割数, 基元分割几率取为<sup>[5]</sup>

$$w_{ij} = \frac{1 + \alpha r_{ij}}{\sum_{i=1}^{\lambda_{\parallel}} \sum_{j=1}^{\lambda_{\perp}} (1 + \alpha r_{ij})}, \quad (1)$$

其中  $\alpha$  是模型的动力学起伏强度参数,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $r_{ij}$  是  $[0, 1]$  之间的均匀随机数. 在级联分割到第  $v$  代时, 各元胞的几率为

$$P_{i_v j_v}^{(v)} = w_{i_1 j_1}^{(1)} w_{i_2 j_2}^{(2)} \cdots w_{i_v j_v}^{(v)}. \quad (2)$$

这里  $w_{i_v j_v}^{(v)}$  表示分割到第  $v$  代时的基元分割几率,  $i_v = 1, \dots, \lambda_{\parallel}$ ,  $j_v = 1, \dots, \lambda_{\perp}$ . 不论分割到多少代, 各元胞几率之和总是归一的.

利用这个模型, 我们做了 20000 个事件的蒙特卡罗模拟. 取  $v = 5$ , 模型参数  $\alpha = 0.8$ , 用自相似分析的方法<sup>[5,6]</sup>进行统计, 即按  $\lambda_{\parallel} = \lambda_{\perp} = \lambda = 2$  的窗口分割方式, 计算出各代各统计元胞中的几率. 得到数据样本后, 首先计算二阶归一化几率矩

$$C_2 = \frac{\langle (P^{(v)})^2 \rangle}{\langle P^{(v)} \rangle^2}, \quad (3)$$

这里  $\langle (P^{(v)})^2 \rangle$  表示分割到第  $v$  代时, 元胞几率 2 次幂的平均值, 而  $\langle P^{(v)} \rangle^2$  表示元胞几率平均值的 2 次幂. 取  $M = (\lambda \cdot \lambda)^v$ ,  $M$  表示分割到第  $v$  代时的统计元胞总数. 图 1 显示了  $\ln C_2 - \ln M$  的行为.

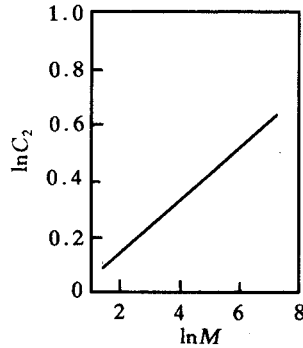


图1  $\ln C_2$  随  $\ln M$  的变化曲线

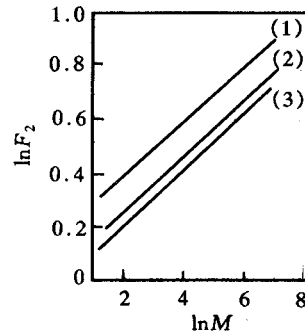


图2  $\ln F_2$  随  $\ln M$  的变化曲线

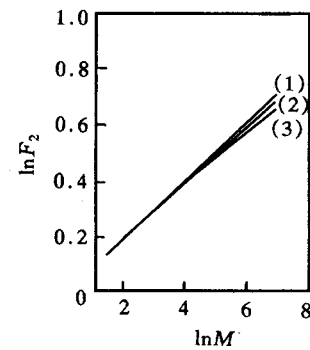


图3  $\ln F_2$  随  $\ln M$  的变化曲线

曲线(1), (2), (3)对应的平均多重数  $\langle n \rangle$  分别为 59, 90, 140. 对应的多重数  $\langle n \rangle$  分别为 60, 89, 140. 对应的多重数的相对起伏强度  $n_r$  分别为 0.848, 0.555, 0.375. 曲线(1), (2), (3)对应的平均多重数  $\langle n \rangle$  分别为 60, 89, 140. 对应的多重数的相对起伏强度  $n_r$  分别为 0.166, 0.112, 0.071.

在同样的事件数、分割代数、模型参数下, 利用上述的模拟方法, 对不同的平均多重数、不同的多重数起伏强度, 计算了二阶乘矩. 具体做法是:

对一个事件得到各统计元胞的几率样本后, 选取该事件的一个多重数, 其粒子数分布假定为 Bernouli 分布, 可得到该事件在各个统计元胞中的粒子数分布  $n_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), 从而可得到因子  $n_m(n_m - 1) \cdots (n_m - q + 1)$  和  $\langle n_m \rangle$ , 其中  $\langle n_m \rangle$  为该事件一个元胞中粒子数的平均值. 对于另一个事件, 得到各统计元胞的新的几率样本后, 再选取不同的多重数, 仍取粒子数分布为 Bernouli 分布, 重复上述过程. 做 20000 个事件的模拟后, 对因子  $n_m(n_m - 1) \cdots (n_m - q + 1)$  和  $\langle n_m \rangle$  求统计平均值. 利用公式

$$F_q = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\langle n_m(n_m - 1) \cdots (n_m - q + 1) \rangle}{\langle n_m \rangle^q}, \quad (4)$$

计算二阶乘矩.

在各个不同事件的多重数的取值上, 采用了如下的方法: 把多重数分为两部分  $n$  和  $n_r$ ,  $n$  对于不同的事件是一个不变的量, 而  $n_r$  对于不同的事件随机起伏, 它是在  $[0, n_r]$  之间随机取值. 而平均多重数  $\langle n \rangle$  为

$$\langle n \rangle = n + \langle n_r \rangle, \quad (5)$$

其中  $\langle n_r \rangle$  表示对事件求平均. 把

$$n_f = \frac{\langle n_r \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (6)$$

称做多重数的相对起伏强度.

首先,取  $n = 10, 40, 90$  三种情况,而  $n_R$  都取为 100,这是多重数相对起伏强度较大的情况. 模拟结果见图 2. 由图 2 可以看出,随着平均多重数  $\langle n \rangle$  的增加,  $\ln F_2$  是趋于减少. 即阶乘矩依赖于平均多重数. 仔细分析可以看出,平均多重的逐渐增加,实际上也是多重数相对起伏强度逐渐在减小,那么也可以认为是随着相对起伏  $n_f$  的减小,  $\ln F_2$  在逐渐减小. 为了能更清楚地说明这个问题,又取了  $n = 50, 80, 130$ ,  $n_R$  都取为 20 进行模拟. 这是多重数相对起伏强度较小的情况. 计算结果见图 3. 图 3 的平均多重数与图 2 的平均多重数基本上是一致的,但由于图 3 情况下的  $n_f$  较小,故而  $\ln F_2$  也较图 1 为小. 这说明阶乘矩实质上是依赖于相对起伏强度  $n_f$  的.

将图 1 与图 2 和图 3 相比较可以得到,当多重数相对起伏强度  $n_f$  小于 0.15 时,阶乘矩趋于几率矩. 此时统计起伏基本消除.

我们也对图 1—图 3 所示的七条曲线,用最小二乘法拟合其斜率,计算了间歇指数,其结果见表 1.

表1 各曲线的间歇指数和相应的  $n_f$

	间歇指数	相对起伏强度 $n_f$
图1曲线	0.102443	
图2曲线(1)	0.104491	0.848
图2曲线(2)	0.101703	0.555
图2曲线(3)	0.104404	0.375
图3曲线(1)	0.102580	0.166
图3曲线(2)	0.102281	0.112
图3曲线(3)	0.102114	0.071

从表中的数据可以看出,当多重数相对起伏强度逐渐增大时,间歇指数并不明显变化,由此可知,间歇指数基本上不依赖于多重数的相对起伏强度  $n_f$ .

### 3 粒子数关联对多重数相对起伏强度的依赖性

采用与前部分相同的模型,做 20000 个事件的蒙特卡罗模拟. 在得到自仿射分形的第  $\nu$  代 ( $\nu = 5$ ) 各窗口的几率数据样本之后,让各窗口几率向水平方向投影<sup>[8]</sup>. 这实际上得到的是一维投射  $\alpha$  模型<sup>[7]</sup> 分割到第 5 代时各窗口的几率. 这个一维相空间,可认为是快度空间. 取快度区域宽度为  $\Delta y = 4$ .

首先采用如下公式

$$C_{pq}(D) = \frac{\langle \rho_m^p \rho_{m'}^q \rangle}{\langle \rho_m^p \rangle \langle \rho_{m'}^q \rangle}, \quad (7)$$

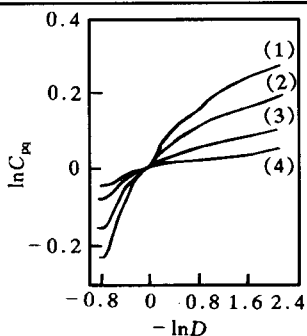


图 4  $\ln C_{pq}$  随  $-\ln D$  的变化曲线  
曲线 (1) 代表  $\ln C_{23}$ ; 曲线 (2) 代表  $\ln C_{22}$ ; 曲线 (3) 代表  $\ln C_{12}$ ; 曲线 (4) 代表  $\ln C_{11}$ .

去计算几率关联矩. 其中  $\rho_m^p, \rho_m^q$  分别代表第  $m, m'$  个窗口中几率的  $p, q$  次幂,  $\langle \rangle$  代表对事件数的平均. 图 4 显示了计算结果. 在图中  $\ln D$  表示两窗口距离  $D$  的对数. 取模型参数  $\alpha = 0.8$ . 然后分别对三种不同的平均多重数  $\langle n \rangle = 53, 135, 173$ , 相应的多重数相对起伏强度分别为  $n_f = 0.66, 0.26, 0.20$ , 对每一个事件, 按 Bernouli 分布形式在各窗口产生粒子, 进而计算粒子数关联矩.

取粒子数关联矩为

$$F_{pq}^{mm'}(\delta y) = \frac{\langle n_m(n_m - 1) \cdots (n_m - p + 1) n_{m'}(n_{m'} - 1) \cdots (n_{m'} - q + 1) \rangle}{\langle n_m(n_m - 1) \cdots (n_m - p + 1) \rangle \langle n_{m'}(n_{m'} - 1) \cdots (n_{m'} - q + 1) \rangle} \quad (8)$$

其中  $n_m, n_{m'}$  分别表示位于第  $m, m'$  个窗口的粒子数.  $\delta y$  代表一个窗口的宽度, 符号  $\langle \rangle$  表示对所有事件样本求平均. 而两窗口之间的距离  $D = |m - m'| \delta y$ .

为了增加统计量, 在计算中采用了公式

$$F_{pq}(D, \delta y) = \frac{1}{2(M-d)} \left( \sum_{m=1}^{M-d} F_{pq}^{m, m+d}(\delta y) + \sum_{m'=1}^{M-d} F_{pq}^{m'+d, m'}(\delta y) \right) \quad (9)$$

其中  $M$  为总窗口数,  $d = |m - m'|$ . 取计算  $C_{pq}$  时的模型参数  $\alpha$ , 即仍取  $\alpha = 0.8$ . 计算结果见图 5. 图中的曲线反映出了  $\ln F_{pq}$  随平均多重数  $\langle n \rangle$  的增加或随多重数起伏强度  $n_f$  的减少而减少的行为. 对比图 4 与图 5 可知, 当  $\langle n \rangle$  较小,  $n_f$  较大时, 粒子数关联矩大于几率关联矩. 这种在不同平均多重数下, 粒子数关联矩不一致的行为, 实质上是由统计起伏没有完

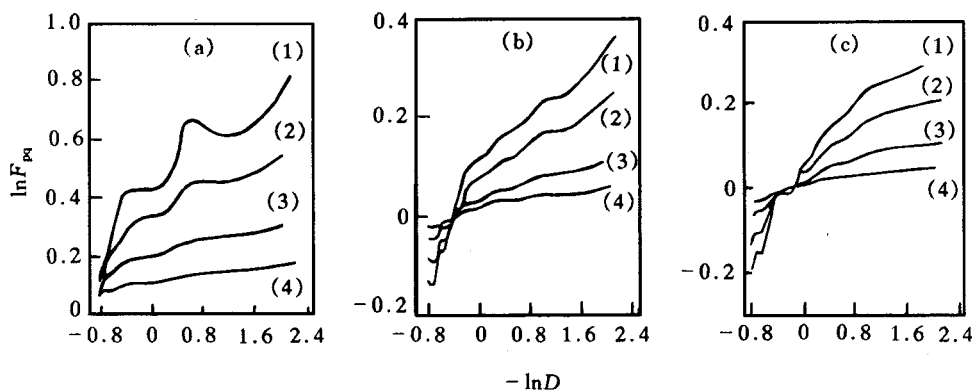


图 5  $\ln F_{pq}$  随  $-\ln D$  的变化曲线

(a)  $\langle n \rangle = 53, n_f = 0.66$ ; (b)  $\langle n \rangle = 135, n_f = 0.26$ ; (c)  $\langle n \rangle = 173, n_f = 0.20$ . 在 (a), (b), (c) 中, 曲线 (1) (2) (3) (4) 分别代表  $\ln F_{23}, \ln F_{22}, \ln F_{12}, \ln F_{11}$ .

全消除而引起. 如何消除这种统计起伏呢?

有这样的迹象, 随着多重数起伏强度  $n_f$  的减小, 粒子数关联矩逐渐趋于几率关联矩. 为了能进一步证实这一点, 我们固定两窗口之间的距离  $D$  为一个窗口的宽度  $\delta y$ , 模拟了  $\ln F_{23}$  对应于多重数相对起伏强度  $n_f$  的依赖关系. 此时的分割代数数为最后一代, 即第五代, 所以一个窗口的宽度为

$$\delta y = \frac{\Delta y}{2^5}. \quad (10)$$

仍取模型参数为  $\alpha = 0.8$ . 所得结果见图 6. 在图中也给出了  $\ln C_{23}$  的曲线. 由于几率关联矩与平均多重数及多重数相对起伏强度无关, 故它是一条直线. 可以看出, 随着  $n_f$  的减小,  $\ln F_{23}$  的值逐渐接近于  $\ln C_{23}$ . 当然在计算几率关联矩  $C_{23}$  时, 所取的最后分割代数、模型参数、两窗口的固定距离等与计算  $\ln F_{23}$  时所取的参数是一致的.

由此可见, 当相对起伏强度较小时, 粒子数关联矩确实趋于几率关联矩. 当  $n_f$  小于 0.15 时, 统计起伏基本消除.

## 4 结论

本文通过做蒙特卡罗模拟, 在二维相空间自仿射分形下, 研究了  $\alpha$  模型中, 在不固定多重数下, 阶乘矩、粒子数关联矩消除统计起伏的情况. 结论是:

(1) 在利用  $\alpha$  模型通过阶乘矩、粒子数关联矩研究间歇与分形时, 不固定多重数的每个事件的粒子数的统计起伏可以取做 Bernoulli 分布, 但是统计起伏不能完全消除. 如果各个事件粒子数的相对起伏比较小时, 统计起伏得以消除.

(2) 在多重数相对起伏较大时, 阶乘矩  $F_q$  大于几率矩  $C_q$ , 粒子数关联矩  $F_{pq}$  也大于几率关联矩  $C_{pq}$ , 随着相对起伏强度的减少, 大约小于 0.15,  $F_q$  趋于  $C_q$ ,  $F_{pq}$  趋于  $C_{pq}$ , 且与平均多重数无关.

(3) 阶乘矩随相空间元胞变化时的标度行为, 反映了碰撞系统的动力学起伏, 即使在统计起伏不能完全消除的情况下 (见图 2、图 3 和表 1), 间歇指数也基本上不依赖于平均多重数或相对起伏强度.

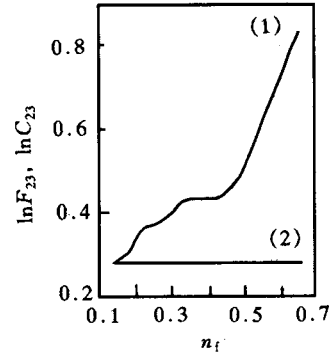


图 6  $\ln F_{23}, \ln C_{23}$  随  $n_f$  的变化曲线

(1)  $\ln F_{23}$ ; (2)  $\ln C_{23}$ .

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Bialas A, Peschanski R. Nucl. Phys., 1986, **B273**:703—718
- [ 2 ] Bialas A, Peschanski R. Nucl. Phys., 1988, **B308**:857—867
- [ 3 ] Wu Yuanfang, Zhang Kunshi, Liu Lianshou. Chinese Science Bulletin, 1991, **36**(13):1077—1080
- [ 4 ] Liu Lianshou, Zhang Yang, Wu Yuanfang. Z. Phys., 1996, **C69**:323—326
- [ 5 ] Wu Yuanfang, Liu Lianshou. Phys. Rev., Lett., 1993, **70**:3197—3200
- [ 6 ] Lin Hai, Zhang Yang, High Energy Physics & Nuclear Physics (in Chinese), 1996, **20**(1):65—75  
(林海, 张阳, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1996, **20**(1): 65—75)

- [ 7 ] Lin Hai, Liu Lianshou. High Energy Physics & Nuclear Physics (in Chinese), 1996, 20(7):625—634  
(林海, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1996, 20(7): 625—634)
- [ 8 ] Ochs W. Phys. Lett., 1990, B247(1):101—106

## Factorial Moments and Factorial Correlations in $\alpha$ Model for Non-Fixing Multiplicity \*

Lin Hai      Zhao Ren

( Physics Department, Yanbei Teacher's College, Datong 037000)

Liu Lianshou

( Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

**Abstract**      Using the self-affine fractal of two-dimensional phase space and Monte Carlo simulation, the dependence of the factorial moments and the factorial correlations on the multiplicity relative strength of fluctuation are studied for non-fixing multiplicity. It is discovered that the factorial moments and the factorial correlations depend on the multiplicity relative strength of fluctuation  $n_f$ , but the intermittency does not depend on  $n_f$ . When  $n_f$  is smaller, these dependence are dispelled.

**Key words** high energy collision, self-affine fractal, Monte Carlo simulation, intermittency, factorial moments, relative strength of multiplicity fluctuation

---

Received 13 June 1997

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China