

# 400GeV/c pp 碰撞连续阶数阶乘矩 和多重分形分析\*

王韶舜 张 杰 叶云秀 肖臣国

(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230027)

1996-09-06收稿

## 摘 要

对华家照提出的  $F_q$  矩的矩阶数连续化方案进行了检验,发现它不能用于真实数据的分析,对此作了改进,使它能用于真实的实验数据的分析.对 400GeV/c pp 碰撞产生的带电粒子横快度分布实验数据的分析结果表明,阶乘矩的矩阶数连续化方法是可行的,说明在 400GeV/c pp 碰撞多重产生过程中可能存在多重分形行为.

**关键词** 连续阶数阶乘矩,负二项式分布,最大似然函数法,多重分形行为.

## 1 引 言

为了研究高能碰撞多粒子产生中的间歇现象,人们通过计算多重数分布的矩研究其与相空间大小的依赖关系.多重数分布来源于动力学涨落和统计涨落.通常在高能粒子碰撞中多重数是小的,特别是当相空间区间变小时,统计涨落可能掩盖了动力学涨落. Bialas 和 Peschanski<sup>[1]</sup>建议利用标度阶乘矩  $F_q$  来研究间歇现象,其定义为

$$F_q = \frac{\langle n(n-1)\cdots(n-q+1) \rangle}{\langle n \rangle^q}, \quad (1)$$

它给出有关矩的动力学涨落的无偏估计,因此极大地改进了间歇现象的研究.但是标度阶乘矩的缺点是其矩阶数只能取  $q \geq 2$  的正整数,因此不能得到  $D_0$ 、 $D_1$  两种重要的分形维数,也不能得到有关快度分布凹陷的信息.以后建议的  $G_q$  矩和各种改进方案,其  $q$  为任意实数,克服了  $F_q$  矩的缺点,但同时也带来了它自身固有的缺点,即它没有消除统计本底的影响,必须用人工的方法减去<sup>[2]</sup>,这不能说是一种令人满意的方法.因此使  $F_q$  矩的矩阶数连续变化,使它兼有  $F_q$  矩和  $G_q$  矩的优点而同时克服两者的缺点就显得必要了.华家照建议一种  $F_q$  矩的矩阶数连续化方案<sup>[3]</sup>,但它不能用于真实数据的分析,我们对此作了改进,实现了将连续阶数阶乘矩的方法用于实验数据的多重分形的研究.

\* 国家自然科学基金资助.

## 2 华家照的连续阶数阶乘矩方法

多重数分布  $P_n$  可表示为

$$P_n = S \times D, \quad (2)$$

其中  $S$  代表统计涨落部分, 由泊松分布描述,  $D$  代表动力学部分. 进一步可写为

$$P_n = \int_0^\infty dt \frac{t^n}{n!} e^{-t} D(t). \quad (3)$$

标度阶乘矩  $F_q$  可写为

$$F_q = f_q / f_1^q, \quad (4)$$

其中

$$f_q = \sum_{n=q}^{\infty} \frac{n!}{(n-q)!} P_n. \quad (5)$$

由于  $q$  为正整数, 可将 (3) 式代入 (5) 式并对  $n$  求和, 得

$$f_q = \int_0^\infty dt t^q D(t). \quad (6)$$

它是动力学起伏  $D(t)$  的  $q$  阶矩. 但对于连续的  $q$ , (5) 式不适用, 不能得到 (6) 式的  $q$  阶动力学起伏的矩  $f_q$  的表达式. 因此需寻找另外的途径. 文献 [3] 中要求 (6) 式对所有的  $q$  适用. 为得到  $D(t)$  的表达式, 利用负二项式分布来展开多重数分布  $P_n$ , 即

$$P_n = \sum_{j=0}^N a_j P_n^{\text{NB}}(k_j, x_j), \quad (7)$$

其中  $n = 0, 1, \dots, N$  ( $N$  是最大多重数),

$$P_n^{\text{NB}}(k_j, x_j) = \frac{\Gamma(n+k_j)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k_j)} \left(\frac{k_j}{k_j+x_j}\right)^{k_j} \left(\frac{x_j}{k_j+x_j}\right)^n. \quad (8)$$

利用 (3) 式和下列关系式:

$$P_n^{\text{NB}}(k_j, x_j) = \int_0^\infty dt \frac{t^n}{n!} e^{-t} D^{\text{NB}}(t, j), \quad (9)$$

$$D^{\text{NB}}(t, j) = \left(\frac{k_j}{x_j}\right)^{k_j} \frac{t^{k_j-1}}{\Gamma(k_j)} e^{-(k_j t/x_j)}, \quad (10)$$

可以得到

$$D(t) = \sum_{j=0}^N a_j D^{\text{NB}}(t, j). \quad (11)$$

将 (11) 式代入 (6) 式并对  $t$  积分可得

$$f(q) = \sum_{j=0}^N a_j f^{\text{NB}}(q, j), \quad (12)$$

其中

$$f^{\text{NB}}(q, j) = \left(\frac{x_j}{k_j}\right)^q \frac{\Gamma(q+k_j)}{\Gamma(k_j)}. \quad (13)$$

类似于(4)式,有

$$F(q) = f(q) / f(1)^q. \quad (14)$$

为了定出  $a_j$  的值,需要指定  $N+1$  对  $x_j$  和  $k_j$  值,然后根据(8)式计算  $P_n^{NB}(k_j, x_j)$ ,再根据(7)式解  $N+1$  维线性代数方程组求出  $a_j$  的值,并由(12)式和(14)式求出连续阶数阶乘矩  $F(q)$ .

### 3 对华家照方法的检验

为了验证华家照的方法,我们将此方法用于泊松分布形式的多重数分布:

$$P_n = e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n / n!, \quad (15)$$

$P_n$  完全由上式解析地给出.取  $\langle n \rangle = 1, n = 0, 1, \dots, N; N = 10$ .用上述方法对  $P_n$  进行展开,求出  $N+1$  个展开系数  $a_j$ ,进而求出连续阶数阶乘矩  $F(q)$ .为了保证计算精度,计算中采用 MATHEMATICA 程序.计算结果由图 1 中实线所示.

由图可见,  $F(q)$  恒等于 1.在实验上若要得到  $P_n$  的精确值,必须进行无限多的事例测量.但是实际上所得到的事例数总是有限的,即所测得的  $P_n$  总是伴有统计涨落的.为了了解统计涨落的影响,根据泊松分布进行蒙特卡罗模拟,共产生三个样本,然后统计  $P_n$ ,并根据华家照

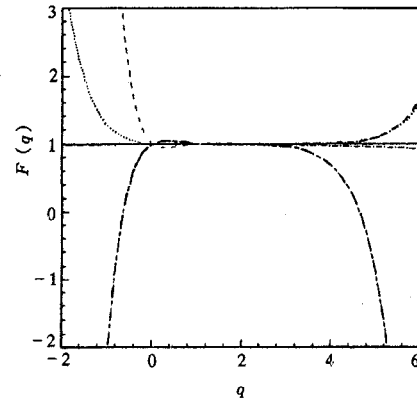


图1 用华家照方法和似然拟合法对泊松分布( $\langle n \rangle=1$ )的计算结果

实线: 解析的  $P_n$  分布的结果; 长短划线、点线、划线:  $10^5, 10^6, 10^7$  个 MC 事例样本的结果; 点划线: 利用似然拟合法对  $10^5$  MC 事例样本的计算结果.

表1 对  $10^5$  事例样本 ( $\langle n \rangle=1$  的泊松分布) 的计算结果

$n$	$N_n$	$N_n(\text{MC})$	$\tilde{N}_n$	$j$	$a_j$	$\tilde{a}_j$
0	36787.9	36571	36659.0	0	$-6.0310967075 \times 10^5$	-0.0436
1	36787.9	37130	36887.5	1	$5.1107712192 \times 10^6$	1.0867
2	18394.0	18274	18456.9	2	$-1.8943023020 \times 10^7$	-0.0431
3	6131.3	6120	6125.1	3	$4.0111196201 \times 10^7$	
4	1532.8	1558	1516.5	4	$-5.3070399844 \times 10^7$	
5	306.6	293	298.7	5	$4.4927260786 \times 10^7$	
6	51.1	41	48.7	6	$-2.3765120027 \times 10^7$	
7	7.3	12	6.8	7	$7.1816970312 \times 10^6$	
8	0.9	1	0.8	8	$-9.4927167512 \times 10^5$	

注:  $N_n$ : 根据(14)式解析计算的事例数分布;

$N_n(\text{MC})$ : 蒙特卡罗样本的事例数分布;

$\tilde{N}_n$ : 最大似然函数法对蒙特卡罗样本的拟合结果;

$a_j$ : 用华家照的方法求得对  $N_n(\text{MC})$  的展开系数;

$\tilde{a}_j$ : 用最大似然函数法对  $N_n(\text{MC})$  的拟合系数.

的方法计算  $F(q)$ , 计算结果示于图 1. 由图可见,  $F(q)$  值对 1 有明显的偏离, 而且并不因事例数的增加而改善. 这是因为展开式 (7) 要求完全准确地穿过所有的实验点  $P_n$ , 使得展开式系数  $a_j$  中包含了很大的噪声信号, 即所得到的是一组数值非常大的正、负号交替出现的  $a_j$  值. 这就导致  $F(q)$  非常大的不稳定性. 表 1 列出事例数为  $10^5$  时的多重数分布及计算结果.

#### 4 对华家照方法的改进

由于负二项式分布能很好地符合实验结果, 可以选择较少的参数 ( $j = 0, 1, \dots, J$ ;  $J \leq N$ ) 来拟合实验结果.

$$\tilde{P}_n = \sum_{j=0}^J a_j P_n^{\text{NB}}(k_j, x_j), \quad (16)$$

其中

$$x_j = x(1 + \Delta_j); \quad k_j = k(1 + \Delta_j);$$

$$x = \langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n P_n;$$

$$k = (F_2 - 1)^{-1}, \quad F_2 = \langle n(n-1) \rangle / x^2;$$

$$\Delta_j = \Delta \left( -\frac{1}{2} + \frac{j}{J} \right), \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (17)$$

$\Delta$  定为  $0.5^{[3]}$ ,  $\Delta_j$  在  $-\Delta/2$  到  $\Delta/2$  之间以等间隔分布. 拟合对  $N+1$  个  $P_n$  点进行并采用最大似然法, 即选择  $a_j$  以使下列似然函数取最大值,

$$L = \frac{N_{\text{ev}}!}{\prod_{n=0}^N N_n!} \prod_{n=0}^N (N_{\text{ev}} \tilde{P}_n)^{N_n}, \quad (18)$$

其中  $N_{\text{ev}}$  为总的事例数,  $N_n$  为多重数为  $n$  的事例数. 由 (16) 式可得

$$\sum_{j=0}^J a_j = 1. \quad (19)$$

上式在整个求解过程中都应满足. 起初将所有的  $a_j$  置为  $1/J$ , 然后以步长  $h = 1/2J$  轮流改变  $a_j$  的值以使得  $L$  最大. 若步长为  $h$  时得到最佳的  $a_j$ , 减小步长  $h$ , 并在新的步长下得到一组更佳的  $a_j$ . 改变可以是正的或负的, 当对某一  $a_j$  进行改变时, 须对所有的  $a_j$  乘以因子  $\frac{1}{1+h}$  或  $\frac{1}{1-h}$ , 以保证 (19) 式

成立. 计算中的最终步长为 0.0001. 拟合时一般根据实验测得的多重数分布情况选择适当数目的  $a_j$ . 图 1 中点划线为取  $J=2$  时对  $10^5$  蒙特卡罗事例样本的计算结果. 其事例数分布的拟合值  $\tilde{N}_n$  列于表 1 中. 由图 1 可见, 似然拟合能较好地抑制  $P_n$  测量误差的影响.

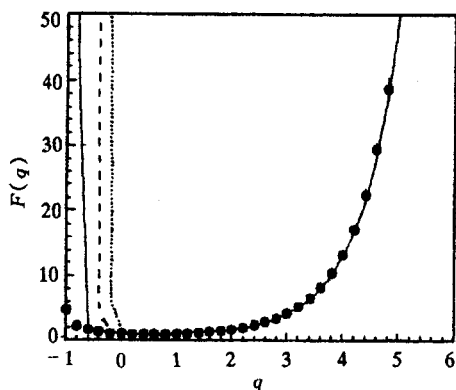


图 2  $P_n^{(2)}$  分布的  $F(q)$  的计算结果

实心圆点: 用最大似然函数法对蒙特卡罗事例样本的计算结果;  
实线、划线、点线: 华家照的方法对解析的  $P_n^{(2)}$  的计算结果, 分别取  $N=10, 15, 20$ .

我们还对文献 [3] 中的分布

$$P_n^{(2)} = (n+1)^{0.5} e^{-n} / Z \quad (20)$$

计算连续阶数阶乘矩, 这里  $Z$  为归一化常数. 与泊松分布不同,  $P_n^{(2)}$  分布中不仅包括统计涨落的贡献, 还有动力学起伏的贡献. 首先根据  $P_n^{(2)}$  分布进行蒙特卡罗模拟产生  $10^5$  事例, 然后统计多重数分布  $P_n$  并用似然拟合法求出  $a_j$  和  $F(q)$ .  $F(q)$  由图 2 中实心圆点表示. 利用华家照的办法对此蒙特卡罗样本的  $P_n$  进行展开, 求出  $a_j$  和  $F(q)$ . 计算结果列于表 2 中. 由表 2 可见,  $F(q)$  已被噪声淹没了.

表 2 对  $10^5$  蒙特卡罗事例样本 ( $P_n^{(2)}$  分布) 的计算结果

$n$	$N_n^{(2)}$	$N_n$ (MC)	$\tilde{N}_n$	$q$	$F(q)$
0	52016.2	52231	52206.9	-1.0	$7.7765 \times 10^{18}$
1	27061.9	26955	27047.2	-0.8	$2.1717 \times 10^{15}$
2	12193.0	12137	12103.6	-0.6	$1.5422 \times 10^{13}$
3	5179.5	5230	5124.6	-0.4	$3.1475 \times 10^{11}$
4	2130.3	2043	2107.2	-0.2	$9.1117 \times 10^9$
5	858.5	850	850.9	0.0	0.9978
6	341.1	343	339.3	0.2	$-8.5623 \times 10^7$
7	134.2	132	134.1	1.0	1.0000
8	52.3	51	52.7	1.2	$5.1967 \times 10^4$
9	20.3	14	20.6	2.0	0.7846
10	7.8	10	8.0	3.0	-18.959
11	3.0	2	3.1	4.0	-477.21
12	1.2	1	1.2	5.0	$-9.8628 \times 10^3$
13	0.4	1	0.5	6.0	$-1.9438 \times 10^5$

注:  $N_n^{(2)}$ : 根据 (20) 式解析计算的事例数分布;

$N_n$ (MC): 蒙特卡罗样本的事例数分布;

$\tilde{N}_n$ : 最大似然函数法对蒙特卡罗样本的拟合结果.

图 2 中亦画出用解矩阵的办法对解析的  $P_n^{(2)}$  的计算结果以与似然拟合法对蒙特卡罗样本的计算结果作比较. 由图可见, 在  $q > 0$  时两者符合得很好, 但在  $q < 0$  时有偏离, 而且  $N$  越大, 偏离越严重. 这表明原始的解矩阵的办法有明显的缺陷.

## 5 连续阶数阶乘矩 $F(q)$ 的实验结果

利用 CERN NA27 合作组提供的 LEBC 泡室照片, 测量了 400GeV/c pp 碰撞产生的带电粒子的赝快度分布, 共测量了 3730 个非单衍事例. 测量方法详见文献 [4]. 用上述连续阶数阶乘矩的方法研究粒子多重产生的分形行为. 为了消除赝快度分布起伏的影响, 采用归一化的赝快度  $x(\eta)$  作为变量<sup>[5]</sup>,

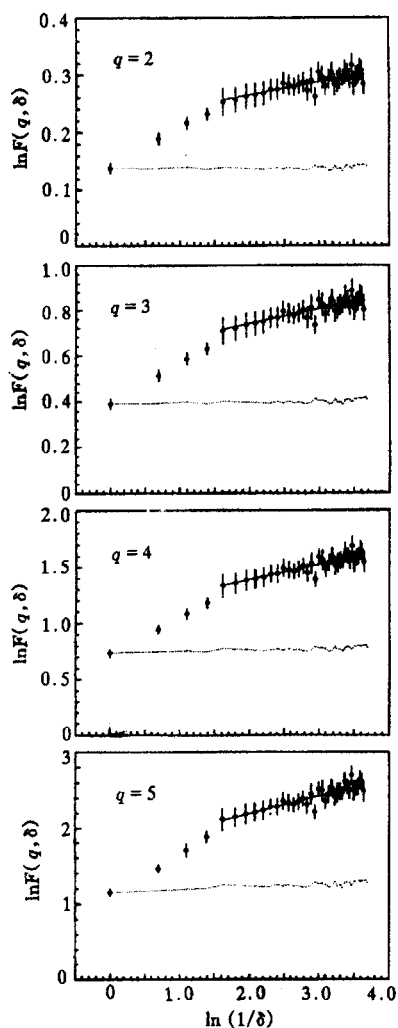


图3 用最大似然函数法所得的  
 $F(q, \delta)$ 的实验结果

实心点: 实验结果;

实线: 对(23)式的拟合结果;

点线: 蒙特卡罗事例的计算结果.

pp碰撞多重产生过程具有多重分形性质.对粒子在赝快度空间随机分布的蒙特卡罗事例的计算结果由图4中的实线所示.由图可见,对所有的 $q$ ,蒙特卡罗事例的 $D(q)$ 约为1,说明似然拟合法中统计涨落的影响已被滤除.

将计算出的 $D(q)$ 值列于表3中并与以前用标度阶乘矩方法和改进的 $G$ 矩方法所得的结果进行比较,两者符合得较好,说明阶乘矩的矩阶数连续化方法是成功的.

多重分形谱 $f(\alpha)$ 的计算结果示于图5.谱为开口向下的凸曲线,峰位于 $q=0$ 处, $f(\alpha)=D(0)=1$ .直线 $f(\alpha)=\alpha$ 与谱曲线在 $q=1$ 处相切.图中实心点为蒙特卡罗事例的计算结果,它们几乎集结于一点, $\alpha=f(\alpha)=1$ .实验所得的谱曲线不是一个点,说明在

$$x(\eta) = \int_{\eta_{\min}}^{\eta} \rho(\eta') d\eta' / \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \rho(\eta') d\eta'. \quad (21)$$

$\eta$ 窗口取为 $[-2, 2]$ ,  $x$ 在 $[0, 1]$ 区间均匀分布.  $x$ 空间被分成 $M$ 个大小为 $\delta$ 的子区间.在子区间 $m$ 内,统计出实验的多重数分布 $P_{n,m}$ ,由(8)式计算出 $P_{n,m}^{\text{NB}}(k_{j,m}, x_{j,m})$ ,根据(16)式和(18)式由最大似然函数法确定 $a_{j,m}$  ( $j=0, \dots, J$ ),当 $M \leq 4$ 时取 $J=4$ ,当 $M > 4$ 时取 $J=2$ .然后由(12)式计算出区间 $m$ 内的矩 $f_m(q)$ ,最后对各子区间求平均,

$$F(q, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{f_m(q)}{[f_m(1)]^q}, \quad (22)$$

即得区间大小为 $\delta$ 的阶数为 $q$ 的连续阶数阶乘矩 $F(q, \delta)$ ,在图3中用实心圆点表示.为了了解统计涨落对 $F(q, \delta)$ 的影响,进行了蒙特卡罗模拟.蒙特卡罗事例具有与实验事例相同的多重数分布 $P_n$ ,但是在 $x$ 空间无关联存在.对事例 $i, n_i$ 个粒子被随机地均匀分布在 $x$ 空间.共产生 $100N_{\text{ev}}$ 个蒙特卡罗事例,其计算结果由图3中的点线表示.由图可见,如果只有统计涨落存在的话,当 $\delta$ 减小时, $F(q, \delta)$ 近似为常数,间歇指数等于零,表明统计涨落已被滤掉.

当 $\delta \rightarrow 0$ 时,可由

$$F(q, \delta) \approx \delta^{-\phi(q)} \quad (23)$$

对 $F(q, \delta)$ 进行拟合(对 $M > 4$ 的点),得出间歇指数 $\phi(q)$ .然后可由下式计算广义分形维数和多重分形谱:

$$\tau(q) = q - 1 - \phi(q), \quad D(q) = \tau(q) / (q - 1); \quad (24)$$

$$\alpha = d\tau(q) / dq, \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q).$$

实验所得的广义分形维数 $D(q)$ 随 $q$ 的变化如图4所示.由图可见,随着 $q$ 的增加, $D(q)$ 单调地减小,表明

400GeV / c pp 碰撞多重产生过程中可能存在多重分形行为.

表3 不同方法得到的 $D(q)$ 值的比较

$q$	$D(q)$ ( $F(q)$ )	$D_q$ ( $F_q$ 矩)	$D_q^{\text{dyn}}$ ( $G_q$ 矩)
0	1		
1	$0.9868 \pm 0.0004$		
2	$0.9764 \pm 0.0060$	$0.973 \pm 0.003$	$0.963 \pm 0.004$
3	$0.9654 \pm 0.0076$	$0.968 \pm 0.005$	$0.959 \pm 0.005$
4	$0.9535 \pm 0.0087$	$0.968 \pm 0.009$	$0.963 \pm 0.007$
5	$0.9400 \pm 0.0094$	$0.942 \pm 0.015$	$0.944 \pm 0.009$

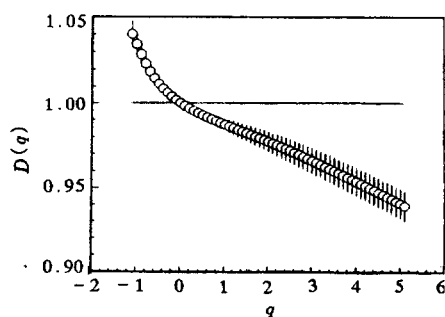


图4 广义分形维数 $D(q)$ 随 $q$ 的变化

空心圆点: 实验值;

实线: 蒙特卡罗事例的结果.

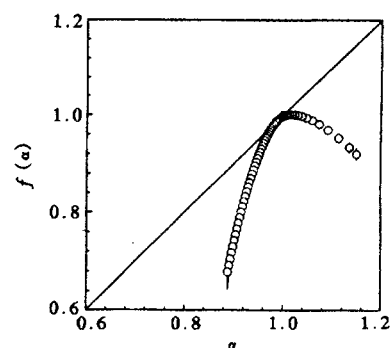


图5 多重分形谱 $f(\alpha)$ 随 $\alpha$ 的变化

空心圆点: 实验结果;

实心圆点: 蒙特卡罗事例的计算结果.

## 6 结 束 语

对华家照提出的  $F_q$  矩的矩阶数连续化方案进行了检验, 发现它不能用于真实数据的分析. 对此作了改进, 使它能用于真实的实验数据的分析. 对 400GeV / c pp 碰撞产生的带电粒子的赝快度分布实验数据的分析结果表明, 阶乘矩的矩阶数连续化方法是可行的. 实验结果说明在 400GeV / c pp 碰撞多重产生过程中可能存在多重分形行为.

作者对 CERN NA27 合作组提供 LEBC 泡室照片和测量设备深表感谢.

## 参 考 文 献

- [1] A. Bialas, R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273**(1986)703; *Nucl. Phys.*, **B308**(1988)857.
- [2] R. C. Hwa, *Phys. Rev.*, **D41**(1990)1456; R. C. Hwa, J. Pan, *Phys. Rev.*, **D45**(1992)1476; I. Derado *et al.*, *Phys. Lett.*, **B283**(1992)151; Wang Shaoshun *et al.*, *Phys. Lett.*, **B344**(1995)447.
- [3] R. C. Hwa, *Phys. Rev.*, **D51**(1995)3323.
- [4] Wang Shaoshun *et al.*, *Z. Phys.*, **C68**(1995)415.
- [5] W. Ochs, *Z. Phys.*, **C50**(1991)339.

## Factorial Moments of Continuous Order and Multifractal Analysis in 400GeV/c pp Collisions

Wang Shaoshun   Zhang Jie   Ye Yunxiu   Xiao Chenguo

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Received 6 September 1996

### Abstract

The method of the factorial moments  $F_q$  of continuous order suggested by Hwa has been tested. It is found that this method can not be used to analyse the real experimental data. Some improvement has been made in the method, which can be used for the real experimental data. The analytic results for the experimental pseudorapidity distributions of charged particles produced in 400GeV / c pp collisions indicated that the method of the factorial moments of continuous order is available. And there is seemingly multifractal behavior in the process of multiplicity production in pp collisions at 400GeV / c.

**Key words** factorial moments of continuous order, negative binomial distribution, maximum likelihood function method, multifractal behavior.