第 21 卷 第 8 期　高能物理与核物理　Vol.21, No.8
1997年 8 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Aug., 1997

# 类 $O(6)$ 原子核三轴形变的解析描述 *

王保林

(淮阴师范专科学校物理系　江苏　223001)

1996-07-05收稿

## 摘　　要

在相互作用玻色子模型(IBM)的内禀态下，用自洽 $Q$ 算符框架(CQF)，引入 $L=3$ 的三体势，建立用 IBM 解析描述原子核三轴形变参数 $\beta$、$\gamma$ 的理论方案．计算了 Xe、Ba 和 Ce 偶偶核素的三轴形变参数，与硬三轴转子模型(RTRM)的结果进行比较，较精确地描述了原子核的三轴形变性质．

**关键词**　类 $O(6)$ 核，三轴形变参数，内禀态，自洽 $Q$ 框架，三体势．

近年来，关于 $A=120$—140 过渡区原子核三轴形变的实验信息不断增多．理论上，硬三轴转子模型(RTRM)是描述三轴形变最直接的理论框架[1]，在 RTRM 中，形变参数 $\beta$、$\gamma$ 被用来表征原子核的形状．相互作用玻色子模型(IBM)对这一区域的偶偶核，特别是 Xe、Ba、Ce 等核素的实验特征，进行过大量深入细致的研究工作[2—5]，认为这些核素接近于 IBM 的 $O(6)$ 极限，有关 IBM 和 RTRM 之间的关系也有许多系统的理论工作[6,7]．

直接包含 $\beta$、$\gamma$ 的 IBM 内禀态可由下式定义[8]:

$$|N,\ \beta,\ \gamma\rangle = [N!(1+\beta^2)^N]^{-1/2}(B^+)^N|0\rangle, \tag{1}$$

其中 $N$ 为总的玻色子数，$B^+$ 为内禀玻色子产生算符，

$$B^+ = s^+ + \beta\left[\cos\gamma\, d_0^+ + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\sin\gamma(d_2^+ + d_{-2}^+)\right], \tag{2}$$

$s^+$、$d_\mu^+$ ($\mu=-2,\ 0,\ 2$) 为玻色子产生算子．在(1)式的内禀态下，IBM 的单体和两体相互作用的一般 Hamiltonian 矩阵元没有 $\gamma \neq 0°$ 和 60° 的三轴极小值．文献 [7] 将 $\beta$、$\gamma$ 作为动力学变量处理，认为 RTRM 中的参数 $\gamma$ 对应于 IBM 中的期望值 $\langle\gamma\rangle$，即所谓有效形变参数．另一方面，K. Heyde 等人[9]通过引入立方三体势，在(1)式的内禀态下，$O(6)$ 极限可以得到稳定的 $\gamma=30°$ 的三轴极限值，从而直接沟通了 IBM 和 RTRM 之间的关系．

* 江苏省教委自然科学基金资助．

745—750

三体相互作用是原始IBM的一种扩展，它的引入可以有效地改善类$O(6)$极限能谱的staggering现象[3,4]，微观上具有直接的物理基础[10]，此外，三体相互作用还可通过g玻色子的重整化直接得到[9]．R. F. Casten等人[3,4]通过引入立方三体势，对Xe、Ba、Ce等核素的能谱和电磁跃迁等进行过大量的理论计算．但是，IBM尚没有对具体核素的三轴形变参数进行具体计算和预言的理论工作．本文提出一种用IBM计算类$O(6)$原子核三轴形变参数的近似解析方法，并和RTRM的结果进行系统的比较．

采用自洽的四极算符框架(CQF)[2]加立方三体势的Hamiltonian:

$$H = kQ\cdot Q + \theta_3[((d^+d^+)^2d^+)^3((\tilde{d}\tilde{d})^2\tilde{d})^3]^{(0)}, \tag{3}$$

其中四极算符

$$Q_\mu = (s^+\tilde{d} + d^+s)^{(2)}_\mu + \chi(d^+\tilde{d})^{(2)}_\mu, \tag{4}$$

相应的$E2$跃迁算符为

$$T(E2) = e_2Q. \tag{5}$$

参量$x$称为四极算符的内参量，$\chi = 0$时，(4)式对应于$O(6)$极限；$\chi = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$时，对应于$SU(3)$极限．考虑到$SO(3)$的Casimir $L\cdot L$对$\gamma$值没有影响，为简便起见，在(3)式中忽略了$\kappa' L\cdot L$项．在(1)式的内禀态下，可以求得

$$\begin{aligned}\langle H\rangle &= 2\kappa N(N-1)\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}\left(2-2\bar{\chi}\beta\cos3\gamma+\frac{1}{2}\bar{\chi}^2\beta^2\right)\\ &+\kappa N\frac{1}{1+\beta^2}\left[5+\left(1+\frac{7}{2}\bar{\chi}^2\right)\beta^2\right]\\ &+\theta_3N(N-1)(N-2)\frac{1}{7}\frac{\beta^6}{(1+\beta^2)^3}(\cos^23\gamma-1),\end{aligned} \tag{6}$$

式中的$\bar{\chi} = \sqrt{\dfrac{2}{7}}\chi$．而四极算符的矩阵元

$$\langle Q_0\rangle = \frac{N}{1+\beta^2}(2\beta\cos\gamma - \bar{\chi}\beta^2\cos2\gamma), \tag{7}$$

$$\langle Q_2\rangle = \frac{N}{\sqrt{2}(1+\beta^2)}(2\beta\sin\gamma + \bar{\chi}\beta^2\sin2\gamma). \tag{8}$$

通过对(6)式求极值，可以给出关于$\beta$、$\gamma$的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\langle H\rangle}{\partial\beta} = 0,\\[2ex] \dfrac{\partial\langle H\rangle}{\partial\gamma} = 0.\end{cases} \tag{9}$$

(6)式中$\cos^23\gamma$项将导致稳定的三轴形变极值．在选定(3)式中的参数$\kappa$、$\theta_3$和$\chi$的基础上，求解方程组(9)，即可得到$\beta$、$\gamma$的值．对过渡区原子核使用CQF有过许多研究工作，根据以往工作的结论，这里取$\kappa < 0$，$\chi \leqslant 0$，$\theta_3 > 0$．在$\chi = 0$时，(9)式可以给出$\gamma = 30°$

的解．

由于 IBM 内禀态中的$\beta$、$\gamma$是对$2N$个价核子(空穴)定义的，$\beta$表示四极玻色子最低本征态的混合效果，$\gamma$则表示内禀态关于$Z$轴的对称性质．而在 RTRM 中，四极形变参数$\beta_R$描述原子核表面半径的四极形变，由核内所有$A$个核子决定．因而 IBM 内禀态的形变参数$\beta$、$\gamma$与 RTRM 的参数$\beta_R$、$\gamma_R$不可能是等同的．但这两种模型描述相同的原子核集体运动，两组参数之间必然存在内在的关系，特别是$\gamma$与$\gamma_R$都是描述对$Z$轴的对称性质的，两种模型的结果应该比较接近．J. N. Ginocchio 等人[8]采用内禀态平均密度的方法，在四极相互作用下，假定体系是轴对称的，即取$\gamma = 0°$或$60°$，粗略地估算出 IBM 和 Bohr 模型(BMM)的$\beta$值关系为$\beta_{BMM} \doteq 1.18\dfrac{2N}{A}\beta$，这个关系式只适应于轴对称情况下的定性分析，表明$\beta_{IBM} \gg \beta_{BMM}$．对于三轴形变的情况和较复杂的相互作用体系，则需要寻找新的方法．为了进行定量的计算，我们采用将 IBM 和 RTRM 对电四极跃迁性质的描述进行对比的方法．在集体模型中，电四极跃迁算符$T^c(E2)$定义为[11—14]

$$T^c(E2) = e\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,Q^c, \tag{10}$$

在内禀态下的矩阵元为

$$\langle T^c(\mathrm{E2})\rangle = e\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,Q_0^c, \tag{11}$$

其中$Q_0^c \doteq \dfrac{3}{\sqrt{5\pi}}\,ZR_0^2\,\beta_R$，$Z$表示原子系数．由于(10)式与(5)式描述同一个物理量，故有$\langle T^c(E2)\rangle = \langle T(E2)\rangle$，可以近似得到三轴形变参数有效值的计算公式

$$\begin{cases} \beta_{\text{eff}} = \dfrac{4\pi\, e_2 N}{3ZeR_0^2}\,\dfrac{\beta}{1+\beta^2}(2\cos\gamma - \bar{\chi}\,\beta\cos 2\gamma), \\[2ex] \gamma_{\text{eff}} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\langle Q_2\rangle}{\langle Q_0\rangle}\right). \end{cases} \tag{12}$$

结合(7)、(8)式，可以看到 RTRM 的三轴非对称角$\gamma_{\text{eff}}$和 IBM 内禀态的$\gamma$在$\chi$不太大时是很接近的，特别是在$\chi = 0$时，严格地有$\gamma_{\text{eff}} = \gamma = 30°$．而对$\beta_{\text{eff}}$的计算，只需调节有效电荷$e_2$一个参数，$R_0 = r_0 A^{1/3}$，对形变核可取$r_0 = 1.2\text{fm}$．根据文献[15]的系统研究，$B(E2,\ 2_1^+ \to 0_1^+)$值取决于核的平衡形变，亦即直接联系于核位能面极小所对应的形变值．因此，计算形变参数所给出的有效电荷$e_2$，与计算$B(E2)$的有效电荷是完全等价的，

$$B(E2,\ 2_1^+ \to 0_1^+) = \frac{1}{5}\,e_2^2\langle Q_0\rangle^2. \tag{13}$$

根据上述理论公式，对 3 个典型的三轴形变核素 Xe、Ba 和 Ce 的三轴形变参数$\beta_{\text{eff}}$、$\gamma_{\text{eff}}$以及$B(E2,\ 2_1^+ \to 0_1^+)$进行了系统的理论计算，其结果见表 1．表中还列出了文献[1]用 RTRM，通过$2_2^+$态衰变的分支比和$E_{2_2^+}/E_{2_1^+}$的能量比计算的结果$\beta_B$、$\gamma_B$和$\beta_E$、$\gamma_E$以及

**表1 Xe、Ba和Ce偶偶同位素三轴形变的IBM计算**

| 核素 | $N$ | $\theta_3/\kappa$ | $e_2$(eb) | $\beta_R$ | $\gamma_R(°)$ | $B_t(E2)$ | $\beta_B$ | $\gamma_B(°)$ | $B_e(E2)$ | $\beta_E$ | $\gamma_E(°)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $^{122}$Xe | 9 | −0.57 | 0.141 | 0.252 | 24.8 | 0.265 | 0.261 | 24.7 | 0.265 | 0.26 | 24.2 |
| $^{124}$Xe | 8 | −0.78 | 0.151 | 0.238 | 25.5* | 0.240 | 0.250 | 25.5 | 0.240 | 0.25 | 25.1 |
| $^{126}$Xe | 7 | −1.12 | 0.139 | 0.188 | 26.1 | 0.154 | 0.191 | 27.2 | 0.154 | 0.24 | 26.0 |
| $^{128}$Xe | 6 | −1.75 | 0.160 | 0.184 | 26.8 | 0.150 | 0.186 | 27.4 | 0.150 | 0.22 | 26.6 |
| $^{130}$Xe | 5 | −3.11 | 0.181 | 0.169 | 27.4 | 0.130 | 0.170 | 28.2 | 0.130 | 0.20 | 27.7 |
| $^{132}$Xe | 4 | −6.99 | 0.200 | 0.141 | 28.2 | 0.092 | 0.141 | 29.1 | 0.092 | 0.18 | 30 |
| $^{124}$Ba | 10 | −0.34 | 0.149 | 0.293 | 19.2 | 0.401 | 0.295 | 20.3 | 0.401 | 0.30 | 20.0 |
| $^{126}$Ba | 9 | −0.46 | 0.164 | 0.282 | 21.8* | 0.380 | 0.284 | 21.8 | 0.380 | 0.28 | 20.9 |
| $^{128}$Ba | 8 | −0.66 | 0.159 | 0.238 | 23.0 | 0.276 | 0.240 | 22.3 | 0.276 | 0.26 | 21.8 |
| $^{130}$Ba | 7 | −1.04 | 0.168 | 0.215 | 24.6 | 0.230 | 0.217 | 24.4 | 0.230 | 0.24 | 24.3 |
| $^{132}$Ba | 6 | −1.84 | 0.172 | 0.184 | 26.1 | 0.172 | 0.190 | 26.4 | 0.172 | 0.21 | 26.3 |
| $^{134}$Ba | 5 | −4.15 | 0.210 | 0.162 | 27.5 | 0.136 | 0.164 | 28.3 | 0.136 | 0.18 | 30 |
| $^{128}$Ce | 10 | −0.31 | 0.155 | 0.289 | 19.6 | 0.430 | 0.289 | | 0.430 | 0.26 | |
| $^{130}$Ce | 9 | −0.45 | 0.157 | 0.257 | 21.9* | 0.346 | 0.274 | 21.9 | 0.346 | 0.30 | 21.3 |
| $^{132}$Ce | 8 | −0.70 | 0.181 | 0.258 | 24.0 | 0.354 | 0.269 | 24.5 | 0.354 | 0.28 | 24.3 |
| $^{134}$Ce | 7 | −1.24 | 0.161 | 0.194 | 25.9 | 0.206 | 0.205 | 23.7 | 0.206 | 0.26 | 25.3 |
| $^{136}$Ce | 6 | −2.80 | | | 27.7 | | | 27.7 | | 0.22 | 30 |

$\beta_{eff}$、$\gamma_{eff}$为本文的计算结果，$\beta_B$、$\gamma_B$ 和$\beta_E$、$\gamma_E°$ 分别为RTRM用$2_2^+$态衰变分支比和用$E_{2_2^+}/E_{2_1^+}$计算的结果．$B(E2)$表示$B(E2, 2_1^+\to0_1^+)$，$B_t(E2)$为本文的计算结果，$B_e(E2)$为实验值(单位: $e^2b^2$)取自文献[1]．参数$\overline{\chi}$的取值: Xe: $\overline{\chi}=-0.030$; Ba: $\overline{\chi}=-0.038$; Ce: $\overline{\chi}=-0.035$．参数$\theta_3/\kappa$的值由(14)式计算，Xe: $\alpha=-55.9$; Ba: $\alpha=-49.8$; Ce: $\alpha=-48.8$．有效电荷$e_2$由$B(E2)$确定．

$B(E2,\ 2_1^+\to0_1^+)$的实验数值．文献[3,4]是在$\overline{\chi}=0(\gamma=30°)$并考虑$L\cdot L$相互作用项时，拟合能谱和$E2$跃迁来确定参数的．本文忽略了$L\cdot L$项，为了得到$\gamma\neq30°$的三轴不对称角，同时注意到三体项对$E2$跃迁的影响极小[16]，因而应取比较小的$\overline{\chi}$值，以保证$E2$跃迁的计算与以往的工作[18]相接近，为简便起见，对同一组同位素采用相同的$\overline{\chi}$值，则$\gamma_{eff}$的数值由$\theta_3/\kappa$决定，$\theta_3/\kappa$的数值可通过拟合RTRM处理的结果得到．计算中发现，对一组同位素族，$\theta_3/\kappa$的数值随质子、中子玻色子数$N_\pi$、$N_\nu$的变化可近似地用下列关系式给出:

$$\frac{\theta_3}{\kappa}=\frac{\alpha}{N_\pi}\cdot\frac{1}{N_\nu^2}\ . \tag{14}$$

根据某一适当核素的$\gamma$值(表1中“＊”的数值)可以确定$\alpha$的取值．对Xe、Ba和Ce3组同位素分别有$\alpha=-55.9$、$-49.8$和$-48.8$．由此给出的参数$\theta_3/\kappa$的取值与文献[3，4]在计算能谱时所采用的参数$\theta_3/B(B=-2\cdot\kappa)$在数量级和随中子数变化趋势上都是相吻合的．确定了$\gamma_{eff}$的数值之后，通过拟合$B(E2,\ 2_1^+\to0_1^+)$的实验结果，用(13)式来确定有效电荷$e_2$的数值，并通过(12)式计算核的四极形变参数$\beta_{eff}$．表1中给出的计算结果，与

RTRM 的计算结果及实验结果符合得相当好.

本文采用简单的 CQF 加立方三体势的 Hamiltonian，对类 $O(6)$形变原子核的三轴形变性质进行了系统的理论计算，与 RTRM 的处理结果对照，结果是令人满意的. 三轴不对称角$\gamma$的数值，具有很强的模型依赖性[17,18]，本文以 RTRM 确定的数值作为对照，是因为RTRM 是描述三轴形变最直接的理论模型. 从这个意义上讲，本文提出了一套新的 IBM 与 RTRM 联系的更为简洁的理论方案，比文献 [6,7]提出的方法要简便许多. 同时还对三体相互作用强度$\theta_3 / \kappa$的系统性进行了探讨，为深入研究三轴形变核的微观结构以及用 IBM 对三轴形变核数据的理论研究提供了简单而有用的工具.

## 参　考　文　献

[1] J. Yan, O. Vogel, P. Von Brentano, *Phys. Rev.*, **C48**(1993)1046.
[2] R. F. Casten, D. D. Warner, *Rev. Med. Phys.*, **60**(1988)389.
[3] R. F. Casten, P. Von Brentano, K. Heyde *et al.*, *Nucl. Phys.*, **A439**(1985)289.
[4] R. F. Casten, P. von Brentano, *Phys. Lett.*, **B152**(1985)22.
[5] R. F. Casten, P. Von Brentano, N. V. Zamfir, *Phys. Rev.*, **C49**(1994)1940.
[6] M. Sugita, T. Otsuka, A. Gelberg, *Nucl. Phys.*, **A439**(1989)350.
[7] O. Castanos, A. Frank, P. Van Isacker, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984)263.
[8] J. N. Ginocchio, M. W. Kirson, *Nucl. Phys.*, **A350**(1980)31.
[9] K. Heyde, P. Van Isacker, M. Waroqnier *et al.*, *Phys. Rev.*, **C29**(1984)1420.
[10] Liao Ji-zhi, Wang Huang-sheng, *Phys. Rev.*, **C49**(1994)2465.
[11] A. Bohr, B. R. Mottelson, Nuclear Structure (Benjamin Reading, 1975)Vol. Ⅱ.
[12] J. M. Eiserberg, W. Greiner, Nuclear Models, (North-Holland Publishing Company, 1970).
[13] 徐躬耦、杨亚天，原子核理论(核结构与核衰变部分)，高等教育出版社，1989.
[14] 曾谨言、孙洪洲，原子核结构理论，上海科技出版社，1987.
[15] 张敬业，高能物理与核物理，**18**(1994)1119.
[16] K. Loewenich *et al.*, *Nucl. Phys.*, **A460**(1986)361.
[17] W. Andrejtscheff, P. Petkov, *Phys. Rev.*, **C48**(1993)2531.
[18] J. A. Shannon *et al.*, *Phys. Lett.*, **B336**(1994)136.

# Analytical Description of Triaxial Deformation in $O(6)$-Like Nuclei

Wang Baolin

(*Department of Physics, Huaiyin Teachers College, Jiangsu* 223001)

Received 5 July 1996

Abstract

Utilizing the consistent $Q$ framework via an additicnal three-body potential of $L=3$ in the interacting boson model, an analytical description for the triaxial deformation in the $O(6)$-like nuclei is given on the basis of the intrinsic frame. The deformation parameters $\beta$ and $\gamma$ of the even-even Xe, Ba and Ce isotopes are calculated. The calculated results are in good agree nont with the results of the rigid triaxial rotor model.

**Key words** $O(6)$-Like nuclei, triaxial deformation parameters, intrinsic state, consistent $Q$ framework, three-body potential.