

QGP 中胶子的经典输运方程*

陈 相 君

(哈尔滨工业大学理论物理教研室 哈尔滨 150001)

1996-06-03收稿

摘 要

建立了夸克胶子等离子体中胶子的经典输运方程, 并讨论了它与胶子的量子输运方程以及它与夸克的经典输运方程之间的关系.

关键词 夸克胶子等离子体, 胶子经典输运方程, 胶子量子输运方程.

1 引 言

格点规范理论^[1,2]和有限温度场论^[3]都预言在高温高密条件下, 强子会发生退禁闭相变, 产生夸克胶子等离子体(简称 QGP). 退禁闭相变的临界温度大约在 200MeV 左右^[4,5]. 根据宇宙大爆炸理论, 在宇宙大爆炸的一瞬间, 温度可超过退禁闭相变的临界温度, 因此, 早期宇宙处于 QGP 状态. 目前地球上还不存在产生 QGP 的自然条件, 但在相对论重离子碰撞实验中, 能量在不断提高, 人们期望把巨大的动能转化为热能, 造成产生 QGP 的条件, 从实验上观察到 QGP. 因此, QGP 是高能物理的一个重要研究领域.

在早期宇宙的演化和相对论重离子碰撞的物理图象中, QGP 是在高温下产生的, 并经过膨胀、降温等过程, 最后转化为强子^[6]. 因此, 非平衡输运过程是 QGP 的一个重要物理过程, 许多物理学家从事这方面的研究, U. Heinz 和 E. Elze 等在这方面做了许多工作^[7,8]. 输运方程是研究 QGP 输运的基础, 它包括夸克和胶子的输运方程. 以前人们从不同角度建立了夸克的经典输运方程和它的量子输运方程. 但对于胶子, 由于它是无质量粒子, 人们只建立了它的量子输运方程^[9]. 如何建立它的经典输运方程? 很少有文献讨论. 本文则讨论胶子经典输运方程的建立问题, 并给出一种方案; 然后把建立的胶子经典输运方程和胶子的量子输运方程以及夸克的经典输运方程进行比较, 并讨论它们之间的关系.

2 胶子的经典输运方程

考虑 QGP 为经典系统, 可建立胶子的经典输运方程. 在这个系统中, 胶子被看作是相

* 国家自然科学基金, 高等学校博士点专项基金资助.

对论粒子, 描述它的动力学变量取坐标 x^μ , $p^\mu = \dot{x}^\mu$ (它对应于质量粒子的单位质量的动量) 和色荷 Q^a , 为了简单, 而不考虑它的自旋. 胶子的集体行为用单粒子分布函数 f 来描述, 它是动力学变量的函数, $f = f(x, p, Q)$, 它表示在相空间点 (x, p, Q) 附近找到胶子的几率密度. 为了直接得到协变的输运方程, 考虑 f 随固有时变化的方程

$$\frac{df}{d\tau} = \dot{x}^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \dot{p}^\mu \frac{\partial f}{\partial p^\mu} + \dot{Q}^a \frac{\partial f}{\partial Q^a} = C(x, p, Q), \quad (1)$$

其中 $C(x, p, Q)$ 是描述两体碰撞项. 在(1)式中, 首先要知道胶子的经典运动方程, \dot{p}^μ 和 \dot{Q}^a . 和文献 [7,8] 处理夸克的方法一样, 先求胶子的量子运动方程, 然后经典过渡得到它. 按照 Fock 和 Schwinger 早年的建议^[10,11], 协变的量子运动方程由固有时表象中的海森堡方程

$$\dot{A} = \frac{dA}{d\tau} = i[H, A] \quad (2)$$

决定, 其中 H 是固有时表象的哈密顿量. 胶子是非阿贝尔规范粒子, 按照非阿贝尔规范理论, 它在夸克之间运动, 传递着强相互作用, 这时它满足齐次场方程^[12]

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3)$$

其中 $F^{\mu\nu}$ 是场强张量, 且 $F^{\mu\nu} = -F_a^{\mu\nu} Q^a$, $Q^a = -\frac{\lambda^a}{2}$ 是色荷. 令 $E_i = F_{0i}$, $\epsilon_{ijk} B_k = F_{ij}$, 有

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} + ig[A_0, \mathbf{E}] - ig[\mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{A}] = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + ig[A_0, \mathbf{B}] + ig[\mathbf{A} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{A}] = 0. \quad (5)$$

定义

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ i\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (S^i)^{jk} = (-i\epsilon^i)^{jk}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{S} \\ \mathbf{S} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

(4)式和(5)式可统一描写为

$$i\boldsymbol{\gamma}^\mu D_\mu \Psi = 0, \quad (7)$$

它叫类狄拉克方程, 其中 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ 是协变微商.

按照 Nambu 的建议^[13], 由(7)式, 可取

$$H = i\boldsymbol{\gamma}^\mu D_\mu \quad (8)$$

作为描述胶子随固有时变化的哈密顿量. 胶子带色, 存在自相互作用, 通过和阿贝尔规范粒子相比较, 可知(8)式如何反映胶子的这一物理特点. 阿贝尔规范粒子, 例如光子, 不存在自相互作用, 场方程(在无电荷的区域)为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

胶子有自相互作用, 在它的拉氏密度函数中含有三胶子、四胶子相互作用项, 使得它的场方程(无色荷区域)为(3)式. 比较两个场方程, 可知(8)式中的协变微商反映了胶子的自相互作用.

应用 (2) 式, 在经典极限下得到胶子的运动方程为

$$\dot{p}_\mu = g\dot{x}^\nu F_{\nu\mu} = gF_{\mu\nu}^a p^\nu Q_a, \quad (9)$$

$$\dot{Q}_a = -gf_{abc}p^\mu A_\mu^b Q_c, \quad (10)$$

把 (9) 式和 (10) 式代入 (1) 式, 得

$$p^\mu \partial_\mu f(x, p, Q) = gp^\mu F_{\mu\nu}^a Q^a \partial_p^\nu f(x, p, Q) + gf_{abc}p^\mu A_\mu^b Q_c \partial_Q^a f(x, p, Q) + C(x, p, Q), \quad (11)$$

它就是胶子的经典输运方程, 其中 $\partial_p^\nu = \frac{\partial}{\partial p_\nu}$, $\partial_Q^a = \frac{\partial}{\partial Q^a}$.

为了进一步和胶子的量子输运方程进行比较, 需寻找色荷矩满足的方程. 定义 $f^0(x, p) = \int f(x, p, Q) dQ$, $f^a(x, p) = \int Q^a f(x, p, Q) dQ$, 它们分别对应色单态和色八重态的单粒子分布函数, 其中^[7,8] $dQ = \delta(Q^a Q_a - q^2) \delta(d_{abc} Q^a Q^b Q^c - \bar{q}^3) d^8 Q$. 利用 (11) 式可以得到色单态方程

$$p^\mu \partial_\mu f^0(x, p) = gp^\mu F_{\mu\nu}^a \partial_p^\nu f^a(x, p) + C_0(x, p); \quad (12)$$

和色八重态方程

$$p^\mu \partial_\mu f^a(x, p) = gp^\mu F_{\mu\nu}^b \partial_p^\nu f^{ab}(x, p) - gf_{abc}p^\mu A_\mu^b f^c(x, p) + C_a(x, p), \quad (13)$$

其中 $C_0 = \int f(x, p, Q) dQ$; $f^{ab} = \int Q^a Q^b f(x, p, Q) dQ$ 是色荷的二阶矩; $C_a(x, p) = \int Q_a f(x, p, Q) dQ$.

3 和胶子量子输运方程的关系

考虑 QGP 为 QCD 量子系统, 用 Wigner 算符描述胶子, 可得到胶子的量子输运方程^[9]. 它非常复杂, 为了探索它的物理意义, 在近平衡态情况下, 文献 [9] 用平均场近似方法得到 Wigner 函数涨落满足的方程

$$\begin{aligned} p^\rho D_\rho G_{\mu\nu}(x, p) = & \frac{g}{2} p^\sigma \partial_p^\tau \int_0^1 dS \{ [e^{S\Delta} F_{\sigma\tau}, G_{\mu\nu}]_L + [G_{\mu\nu}, e^{-S\Delta} F_{\sigma\tau}]_R \} \\ & + \frac{ig}{4} \partial_p^\tau \int_0^1 dSS \{ [e^{S\Delta} F_{\tau\sigma}, D^\sigma G_{\mu\nu}]_L - [D^\sigma G_{\mu\nu}, e^{-S\Delta} F_{\tau\sigma}]_R \} \\ & + \frac{ig^2}{8} \partial_p^\sigma \partial_p^\tau \int_0^1 dSS \int_0^1 d\bar{S} \{ [e^{S\Delta} F_{\sigma\eta}, [e^{\bar{S}} F_\tau^\eta, G_{\mu\nu}]_L + [G_{\mu\nu}, e^{-\bar{S}} F_\tau^\eta]_R]_L \\ & - [[e^{\bar{S}\Delta} F_\tau^\eta, G_{\mu\nu}]_L + [G_{\mu\nu}, e^{-\bar{S}} F_\tau^\eta]_R, e^{-S\Delta} F_{\sigma\eta}]_R \} \\ & + g \{ [e^{\Delta} F_{\mu\lambda}, G_\nu^\lambda]_L - [G_{\mu\lambda}, e^{-\Delta} F_\nu^\lambda]_R \}, \end{aligned} \quad (14)$$

它被称为胶子的固有半经典方程, 其中 $G_{\mu\nu}$ 表示 Wigner 函数的涨落. 由于在半经典极限下, 色荷 Q_a 仍是 $-\frac{\lambda_a}{2}$, 因此 $G_{\mu\nu}$ 还是矩阵形式, 所以 (14) 式中还存在对易括号和反对易括号. 这里还定义了运算

$$\begin{aligned}
D_\mu(A \otimes B) &= (D_\mu A) \otimes B + A \otimes (D_\mu B), \\
\hat{O}A \otimes B &= A \otimes \hat{O}B, \quad A \otimes B \hat{O} = A \hat{O} \otimes B, \\
[\hat{O}, A \otimes B]_L &= [\hat{O}, A] \otimes B, \quad [A \otimes B, \hat{O}]_R = A \otimes [B, \hat{O}].
\end{aligned} \tag{15}$$

(14)式还很复杂, 它含有算符函数 e^A , 其中 $\Delta = \frac{i}{2} D_\mu \partial_\rho^\mu$, ∂_ρ^μ 作用到 $G_{\mu\nu}$ 上. 把 e^A 展开后代入 (14) 式, 会出现 $G_{\mu\nu}$ 的高次微商项. 在输运过程的经典描述中, 分布函数的变化是缓慢的^[14]. 因此, 在上述过程中考虑保留到 $G_{\mu\nu}$ 的一次微商项, (14) 式变为

$$\begin{aligned}
p^\rho D_\rho G_{\mu\nu}(x, p) &= \frac{g}{2} p^\sigma \partial_\rho^\tau \{ [F_{\sigma\tau}, G_{\mu\nu}]_L + [G_{\mu\nu}, F_{\sigma\tau}]_R \} + g \{ [F_{\mu\lambda}, G_\nu^\lambda]_L - [G_{\mu\lambda}, F_\nu^\lambda]_R \} \\
&\quad + \frac{ig}{2} \{ [D_\sigma F_{\mu\lambda}, \partial_\rho^\sigma G_\nu^\lambda]_L + [\partial_\rho^\sigma G_{\mu\lambda}, D_\sigma F_\nu^\lambda]_R \} + O[G_{\mu\nu}^{(2)}(x, p)],
\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $O[G_{\mu\nu}^{(2)}(x, p)]$ 表示 $G_{\mu\nu}(x, p)$ 的二次微商项.

为了和 (11) 式进行比较, 对 (16) 式要进一步简化, 在色空间中

$$G_{\mu\nu}(x, p) = G_{\mu\nu}^{ab} \frac{\lambda_a}{2} \otimes \frac{\lambda_b}{2}, \quad F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a \frac{\lambda_a}{2}. \tag{17}$$

把它们代入 (16) 式得

$$\begin{aligned}
&p^\rho \partial_\rho G_{\mu\nu}^{ab} - ip^\rho A_\rho^c (-if^{cad}) G_{\mu\nu}^{ab} + iG_{\mu\nu}^{ad} p^\rho A_\rho^c (-if^{cdb}) \\
&= \frac{g}{2} p^\sigma \partial_\rho^\tau F_{\sigma\tau}^d [(-if^{dac}) G_{\mu\nu}^{cb} + G_{\mu\nu}^{ac} (-if^{dcb})] \\
&\quad + g [F_{\mu\lambda}^c (-if^{cad}) (G_\nu^\lambda)^{db} - (G_{\mu\lambda})^{ad} F_\nu^{\lambda c} (-if^{cdb})] \\
&\quad + \frac{ig}{2} [\partial_\sigma F_{\mu\lambda}^c (-if^{cad}) (\partial_\rho^\sigma G_\nu^\lambda)^{db} + f^{ehc} A_\sigma^e F_{\mu\lambda}^h (-if^{cad}) (\partial_\rho^\sigma G_\nu^\lambda)^{db} \\
&\quad + (\partial_\rho^\sigma G_{\mu\lambda}^{ad}) \partial_\sigma F_\nu^{\lambda c} (-if^{cdb}) + (\partial_\rho^\sigma G_{\mu\lambda}^{ad}) f^{ehc} A_\sigma^e (F_\nu^{\lambda h}) (-if^{cdb})] + O[G_{\mu\nu}^{(2)}],
\end{aligned} \tag{18}$$

定义 $(F^a)^{bc} = (-if^a)^{bc}$, (18) 式变成 (以下用 $G_{\mu\nu}$ 表示矩阵 $(G_{\mu\nu}^{ab})$)

$$\begin{aligned}
p^\rho D_\rho G_{\mu\nu} &= \frac{g}{2} p^\sigma \partial_\rho^\tau \{ F_{\sigma\tau}, G_{\mu\nu} \} + g (F_{\mu\lambda} G_\nu^\lambda - G_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda) \\
&\quad + \frac{ig}{2} [(D_\sigma F_{\mu\lambda}) \partial_\rho^\sigma G_\nu^\lambda + \partial_\rho^\sigma G_{\mu\lambda} (D_\sigma F_\nu^\lambda)] + O[G_{\mu\nu}^{(2)}],
\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $F_{\sigma\tau} = F_{\sigma\tau}^a F^a$, $D_\rho = \partial_\rho - iA_\rho^c F^c$, $D_\rho Q = \partial_\rho Q - i[A_\rho, Q]$. $G_{\mu\nu}$ 是一个 $SU(3)$ 群伴随表示空间的 8×8 矩阵, 按照群的表示理论, 它是可约的, 可被分解为^[15]

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^0 \frac{I}{8} + G_{\mu\nu}^a \frac{F^a}{3} + \dots \tag{20}$$

在上式中, 只考虑了直积分解的 1 维表示和 8 维表示部分, 因为它们分别对应和色单态与色八重态有关的部分.

在色空间中求迹, 并用闵氏空间度规张量 $g^{\mu\nu}$ 对 $G_{\mu\nu}$ 的时空脚标进行缩并, 得到

$$p^\rho \partial_\rho G^0 = gp^\sigma F_{\sigma\tau}^a \partial_\rho^\tau G^a + ig (D_\sigma F_{\mu\lambda})^a \partial_\rho^\sigma G_a^{\lambda\mu} + O[\text{Tr} G_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu}], \tag{21}$$

其中 $G^0 = \text{Tr}(g^{\mu\nu} G_{\mu\nu})$, $G^a = \text{Tr}(g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} F^a) G_a^{\lambda\mu} = \text{Tr}(g^{\mu\nu} G_{\nu}^{\lambda} F^a)$. (21)式有实部和虚部, 它给出两个方程:

$$p^\rho \partial_\rho G^0 = g p^\sigma F_{\sigma\tau}^a \partial_\rho^\tau G^a + O[\text{Tr} G_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu}], \quad (22)$$

$$(D_\sigma F_{\mu\lambda})^a \partial_\rho^\sigma G_a^{\lambda\mu} = 0. \quad (23)$$

(22)式对应色单态方程, (23)式是一个约束方程. 用 F^a 乘(19)式两边, 然后和求(21)式进行相同的运算, 得到

$$\begin{aligned} p^\rho \partial_\rho G^a &= g p^\sigma F_{\sigma\tau}^b \partial_\rho^\tau G^{ab} - g f_{abc} p^\mu A_\mu^b G^c \\ &+ i \left[2g f_{abc} F_{\mu\lambda}^b G_c^{\lambda\mu} + \frac{3g}{4} (D_\sigma F_{\mu\lambda})^a \partial_\rho^\sigma G_0^{\lambda\mu} \right] + O[\text{Tr} Q_a G_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $G^{ab} = \text{Tr} \left(g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \frac{\{F^a, F^b\}}{2} \right) = \frac{3}{8} G^0 \delta^{ab}$. (24)式也有实部和虚部, 其实部

$$p^\rho \partial_\rho G^a = g p^\sigma F_{\sigma\tau}^b \partial_\rho^\tau G^{ab} - g f_{abc} p^\mu A_\mu^b G^c + O[\text{Tr} Q_a G_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu}], \quad (25)$$

表示色八重态方程; 其虚部

$$f_{abc} F_{\mu\lambda}^b G_c^{\lambda\mu} + \frac{3}{8} (D_\sigma F_{\mu\lambda})^a \partial_\rho^\sigma G_0^{\lambda\mu} = 0, \quad (26)$$

给出另一个约束方程.

把(22)式和(25)式分别与(12)式和(13)式相比较, 可知除了碰撞项外两组方程是一样的. 这说明两者的物理意义是一致的, 也说明这里建立的胶子经典输运方程是合理的, 反映了胶子的输运性质. 顺便指出, 胶子的量子输运方程还给出了两个约束方程, 说明它包含更多的物理内容.

4 和夸克经典输运方程之间的关系

胶子带色, 这一点和夸克相似, 那么在输运方面它们的关系怎样? 文献[7, 8]中给出了夸克的经典输运方程为

$$\begin{aligned} p^\mu \partial_\mu f(x, p, Q, S) &= \left[g Q^a p^\mu F_{\mu\nu}^a - \frac{g}{2} (D_\nu S^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})^a Q^a \right] \partial_p^\nu f(x, p, Q, S) \\ &- \left\{ g Q_a \left[F_{\mu\lambda}^a S^\lambda + \frac{1}{m^3} (p_\mu S^\nu - p^\nu S_\mu) (D_\nu \bar{F}_{\alpha\beta})^a p^\alpha S^\beta \right] \right\} \partial_S^\mu f(x, p, Q, S) \\ &+ \left[g f_{abc} (p^\mu A_\mu^b + \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^b) Q_c \right] \partial_Q^a f(x, p, Q, S) + C(x, p, Q, S). \end{aligned} \quad (27)$$

当忽略自旋效应时, (27)式变为

$$\begin{aligned} p^\mu \partial_\mu f(x, p, Q) &= g p^\mu F_{\mu\nu}^a Q^a \partial_p^\nu f(x, p, Q) \\ &+ g f_{abc} p^\mu A_\mu^b Q_c \partial_Q^a f(x, p, Q) + C(x, p, Q). \end{aligned} \quad (28)$$

和(11)式比较知它们形式上是一样的. 因此, 有的文献[7, 8]把(11)式称为带色粒子的输运方程.

输运方程虽然形式上一样, 但由于夸克和胶子的动力学顶点不一样, 方程中的分布

函数还是有差别的. 这一点在量子的半经典输运方程中看得比较清楚. 夸克的半经典输运方程和(19)式相似, 在那里夸克的分布函数是 $SU(3)$ 群基础表示空间的 3×3 矩阵, 而(19)式中, 胶子的分布函数则是 $SU(3)$ 群伴随表示空间的 8×8 矩阵, 差别是明显的.

5 结 束 语

本文建立了胶子的经典输运方程, 把它和胶子量子输运方程进行比较, 知道两种输运方程的物理意义是一致的, 这说明所建立的经典输运方程是合理的; 把它和不考虑自旋效应的夸克经典输运方程相比, 两者形式一样. 但由于夸克和胶子的动力学顶点不一样, 描述它们的分布函数还是有差别的.

这里建立的胶子经典输运方程, 没有考虑胶子的自旋效应, 如何在方程中考虑自旋的影响, 还是一个值得研究的问题.

作者感谢 U. Heinz 教授好的建议和有益讨论; 并感谢刘连寿教授、刘亦铭教授的帮助和支持.

参 考 文 献

- [1] T. Celik, J. Engels, H. Satz, *Phys. Lett.*, **B129**(1983)323.
- [2] F. Fucito, C. Rebbi, S. Solomon, *Nucl. Phys.*, **B248**(1984)615.
- [3] Wang Enke, Li Jiarong, Liu Lianshou, *Phys. Rev.*, **D41**(1992)2288.
- [4] T. Celik, J. Engels, H. Satz, *Phys. Lett.*, **B125**(1983)411.
- [5] L. D. McLerran, *Rev. Mod. Phys.*, **58**(1986)1021.
- [6] 李家荣, 夸克物质理论导论, 湖南教育出版社, 1989.
- [7] U. Heinz, *Phys. Lett.*, **B144**(1984)228.
- [8] H. Else, M. Gyulassy, D. Vasak, *Phys. Lett.*, **B177**(1986)402.
- [9] H. Else, *Z. Phys.*, **C38**(1988)211; U. Heinz, *Ann. Phys.*, **161**(1985)48.
- [10] J. Schinger, *Phys. Rev.*, **82**(1951)664.
- [11] C. Itzykson, J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGAW-Hill, New York, 1980.
- [12] K. Moriyasu, *An Elementary PRIMER For GAUGE HTEORY*, World Scientific, 1983.
- [13] Y. Nambu, *Prog. theor. Phys.*, **1**(1950)82.
- [14] 黄祖洽、丁鄂江, 输运理论, 科学出版社, 1987.
- [15] 李政道, 粒子物理和场论简引, 科学出版社, 1984.

Classical Transport Equation of Gluons in QGP

Chen Xiangjun

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Received 3 June 1996

Abstract

In this paper, the classical transport equation of gluons in QGP is set up and the relations between it and the quantum transport equation of gluons as well as the classical transport equation of quarks are discussed.

Key words quark-gluon plasma, classical transport equation of gluons, quantum transport equation of gluons.