

# 一维投影 $\alpha$ 模型的子波关联\*

林 海

(雁北师范学院物理系 大同 037000)

刘 连 寿

(华中师大粒子物理研究所 武汉 430079)

1996-04-19 收稿

## 摘 要

对二维相空间的两种典型的自仿射分形作了一维投影, 对所得的一维投影  $\alpha$  模型, 从特征函数着手, 研究了模型的关联密度和子波关联矩. 找出了分割数  $\Lambda = 2, 3, 4$  的子波基函数和关联矩. 得到了二阶子波关联矩解除子波幅之间的关联耦合的结论, 并对这一结论给出了模型无关的普遍证明.

**关键词** 高能碰撞, 自仿射分形, 一维投影  $\alpha$ 模型, 关联密度, 子波, 子波关联矩.

## 1 引 言

近年来, 一种新的数学工具——子波变换 (wavelet transformation) 已经在高能物理多重产生中广泛应用. 其中 M. Greiner 和 P. Carruthers 等人将子波变换应用于基元分割数  $\Lambda = 2$  的一维随机级联模型上<sup>[1,2]</sup>, 利用较简单的 Haar 子波基集合, 研究了几种级联模型的关联密度与子波关联矩.

已经知道, 高能碰撞多重产生中的间歇与分形应存在于高维相空间, 并且研究表明<sup>[3]</sup>, 高维相空间的分形很可能是自仿射的. 而一维相空间的分形<sup>[4,5]</sup>应该是高维相空间分形的一维投影<sup>[6]</sup>. 为了能与一维实验的结果相比较, 有必要研究自仿射分形在一维相空间投影的情况.

在本文中, 首先从二维相空间自仿射分形体的两种典型分割方式出发进行一维投影, 得到一维投影  $\alpha$ 模型的各代窗口几率密度的递推公式. 这种投影模型分别具有  $\Lambda = 2, 3, 4$  的基元分割数; 然后针对模型的三种分割数推出了关联密度特征函数的递推公式; 由此公式得到关联密度的递推公式; 并且针对这三种情况, 找出了三种阶梯形的子波基函数. 在此基础上, 由子波关联矩特征函数的递推公式, 得到解除了关联耦合的二阶子波关联矩, 而且证明了一阶子波关联矩为零, 二阶子波关联矩解除关联耦合是一个不依

\* 国家自然科学基金资助.

赖于模型的普遍结论.

## 2 二维相空间自仿射分形的一维投影 $\alpha$ 模型

对二维相空间取两种典型的自仿射分形方式<sup>[3]</sup>, 即  $\Lambda_{\parallel} = 2$ ,  $\Lambda_{\perp} = 3$  (简称 2-3 分形),  $\Lambda_{\parallel} = 2$ ,  $\Lambda_{\perp} = 4$  (简称 2-4 分形). 基元分割几率取为<sup>[7]</sup>

$$w_i = \frac{1 + \alpha(\Lambda r_i - \sum_{i=1}^{\Lambda} r_i) / 2(\Lambda - 1)}{\Lambda}, \quad (i = 1, 2, \dots, \Lambda), \quad (1)$$

其中  $\Lambda = \Lambda_{\parallel} \cdot \Lambda_{\perp}$  为基元分割数. 如 2-3 分形时  $\Lambda = 6$ , 2-4 分形时  $\Lambda = 8$ ,  $r_1, r_2, \dots, r_{\Lambda}$  代表  $[-1, 1]$  之间的均匀随机数,  $\alpha$  为模型动力学起伏参数, 取值范围在  $[0, 1]$  之间.

对  $\Lambda_{\parallel} = 2$ ,  $\Lambda_{\perp} = 3$  的 2-3 分形体, 当自仿射分形级联分割到第  $J$  代时, 分别向  $x$  方向和  $y$  方向投影<sup>[6]</sup>, 可以得到  $x$  方向分割数  $\Lambda_x = \Lambda_{\parallel} = 2$ , 在  $y$  方向上分割数  $\Lambda_y = \Lambda_{\perp} = 3$  的一维投影  $\alpha$  模型各代窗口几率密度的递推关系<sup>[8]</sup>

$$\begin{cases} \varepsilon_k^{(J)} = 2w_1^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(1) + 2w_2^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(2) + 2w_3^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(3), \\ \varepsilon_{2^{J-1}+k}^{(J)} = 2w_4^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(4) + 2w_5^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(5) + 2w_6^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(6), \end{cases} \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \dots, 2^{J-1}.$$

(在  $x$  方向投影)

$$\begin{cases} \varepsilon_k^{(J)} = 3w_1^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(1) + 3w_6^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(2), \\ \varepsilon_{3^{J-1}+k}^{(J)} = 3w_2^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(3) + 3w_5^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(4), \\ \varepsilon_{2 \cdot 3^{J-1}+k}^{(J)} = 3w_3^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(5) + 3w_4^{(2-3)}\varepsilon_k^{(J-1)}(6), \end{cases} \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, 3^{J-1}.$$

(在  $y$  方向投影)

其中  $\varepsilon_k^{(J)}$  分别代表分割数  $\Lambda_x = 2$  或  $\Lambda_y = 3$  时一维投影  $\alpha$  模型分割到  $J$  代时第  $k$  个窗口的几率密度.  $\varepsilon_k^{(J-1)}(m)$  ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ) 表示  $J-1$  代时第  $k$  个窗口的几率密度. 不同的  $m$  表示不同的组态, 其平均值是相同的. 而  $w_1^{(2-3)}, w_2^{(2-3)}, \dots, w_6^{(2-3)}$  代表二维相空间按 2-3 自仿射分形时的基元分割几率.

同样, 对 2-4 分形体, 也可得到第  $J$  代时投影到  $x, y$  方向的一维投影  $\alpha$  模型各窗口几率密度的递推公式. 这里只列出在  $y$  方向投影  $\Lambda_y = \Lambda_{\perp} = 4$  的公式<sup>[8]</sup>

$$\begin{cases} \varepsilon_k^{(J)} = 4w_1^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(1) + 4w_8^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(2), \\ \varepsilon_{4^{J-1}+k}^{(J)} = 4w_2^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(3) + 4w_7^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(4), \\ \varepsilon_{2 \cdot 4^{J-1}+k}^{(J)} = 4w_3^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(5) + 4w_6^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(6), \\ \varepsilon_{3 \cdot 4^{J-1}+k}^{(J)} = 4w_4^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(7) + 4w_5^{(2-4)}\varepsilon_k^{(J-1)}(8), \end{cases} \quad (4)$$

$$k = 1, 2, \dots, 4^{J-1}.$$

其中  $\varepsilon_k^{(J)}, w_1^{(2-4)}, w_2^{(2-4)}, \dots, w_8^{(2-4)}$  的意义与 2-3 分形的相类似.

### 3 关联密度的特征函数与窗口关联密度

当一维投影 $\alpha$ 模型分割到第 $j$ 代时,窗口关联密度定义为

$$\rho_{k_1}^{(j)} = \langle \varepsilon_{k_1}^{(j)} \rangle, \rho_{k_1, k_2}^{(j)} = \langle \varepsilon_{k_1}^{(j)} \varepsilon_{k_2}^{(j)} \rangle, \rho_{k_1, k_2, k_3}^{(j)} = \langle \varepsilon_{k_1}^{(j)} \varepsilon_{k_2}^{(j)} \varepsilon_{k_3}^{(j)} \rangle, \quad (5)$$

其中 $\varepsilon_k^{(j)}$ 代表在第 $j$ 代时第 $k$ 个窗口的几率密度,  $\langle \dots \rangle$ 代表求平均值. 而关联密度的特征函数<sup>[1]</sup>为\*

$$Z^{(j)}[\lambda^{(j)}] = \exp \left[ i \sum_{k=0}^{\Lambda^j - 1} \lambda_k^{(j)} \varepsilon_k^{(j)} \right], \quad (6)$$

其中参数 $\lambda^{(j)} = (\lambda_0^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \dots, \lambda_{\Lambda^j - 1}^{(j)})$ ,  $\Lambda$ 是指一维模型的分割数. 相应于(2)–(4)式,  $\Lambda = 2, 3, 4$ . 根据(2), (3), (4)对模型的表述特点, 可以推出特征函数的递推公式. 例如, 对 $\Lambda = 2$ 的(2)式

$$\begin{aligned} & Z^{(j+1)}[\lambda^{(j+1)}] \\ &= \exp \left[ i \sum_{k=0}^{2^{j+1} - 1} \lambda_k^{(j+1)} \varepsilon_k^{(j+1)} \right] \\ &= \exp \left[ i \sum_{k=0}^{2^j - 1} \lambda_k^{(j+1)} 2w_1^{(2-3)} \varepsilon_k^{(j)}(1) \right] \exp \left[ i \sum_{k=0}^{2^j - 1} \lambda_{k+2^j}^{(j+1)} 2w_2^{(2-3)} \varepsilon_k^{(j)}(2) \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[ i \sum_{k=0}^{2^j - 1} \lambda_k^{(j+1)} 2w_3^{(2-3)} \varepsilon_k^{(j)}(3) \right] \exp \left[ i \sum_{k=0}^{2^j - 1} \lambda_{k+2^j}^{(j+1)} 2w_4^{(2-3)} \varepsilon_k^{(j)}(4) \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[ i \sum_{k=0}^{2^j - 1} \lambda_{k+2^j}^{(j+1)} 2w_5^{(2-3)} \varepsilon_k^{(j)}(5) \right] \exp \left[ i \sum_{k=0}^{2^j - 1} \lambda_{k+2^j}^{(j+1)} 2w_6^{(2-3)} \varepsilon_k^{(j)}(6) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

这里的 $\lambda_k^{(j+1)}$ ,  $\lambda_{k+2^j}^{(j+1)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 2^j - 1$ )恰是分割到第 $j+1$ 代时参数 $\lambda^{(j+1)}$ 的左右两个分支, 记作 $\lambda_L^{(j+1)}$ 和 $\lambda_R^{(j+1)}$ , 最后可得:

$$\begin{aligned} Z^{(j+1)}[\lambda^{(j+1)}] &= Z^{(j)}[2w_1^{(2-3)}\lambda_L^{(j)}] Z^{(j)}[2w_2^{(2-3)}\lambda_L^{(j)}] Z^{(j)}[2w_3^{(2-3)}\lambda_L^{(j)}] \\ &\quad \times Z^{(j)}[2w_4^{(2-3)}\lambda_R^{(j)}] Z^{(j)}[2w_5^{(2-3)}\lambda_R^{(j)}] Z^{(j)}[2w_6^{(2-3)}\lambda_R^{(j)}]. \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\lambda^{(j+1)} = (\lambda_L^{(j)}, \lambda_R^{(j)})$ , 反映的是分割到 $j+1$ 代时参数分为左、右两个分支, 正好是分割到 $j$ 代时的分支的这一事实.

同理, 对(3)式

$$\begin{aligned} Z^{(j+1)}[\lambda^{(j+1)}] &= Z^{(j)}[3w_1^{(2-3)}\lambda_L^{(j)}] Z^{(j)}[3w_6^{(2-3)}\lambda_L^{(j)}] Z^{(j)}[3w_2^{(2-3)}\lambda_C^{(j)}] \\ &\quad \times Z^{(j)}[3w_5^{(2-3)}\lambda_C^{(j)}] Z^{(j)}[3w_3^{(2-3)}\lambda_R^{(j)}] Z^{(j)}[2w_4^{(2-3)}\lambda_R^{(j)}], \end{aligned} \quad (9)$$

各参数意义同上, 只是由于现在是有三个分支, 故出现了 $\lambda_L^{(j)}$ ,  $\lambda_C^{(j)}$ ,  $\lambda_R^{(j)}$ .

对(4)式

\* 公式(6)对关联密度特征函数的定义与文献[1]的定义略有不同, 即求平均值的符号 $\langle \dots \rangle$ 被去掉. 这个求平均值已反映在下面的公式(11)中, 其效果是一样的.

$$\begin{aligned}
Z^{(j+1)}[\lambda^{(j+1)}] &= Z^{(j)}[4w_1^{(2-4)}\lambda_L^{(j)}]Z^{(j)}[4w_8^{(2-4)}\lambda_L^{(j)}]Z^{(j)}[4w_2^{(2-4)}\lambda_{CL}^{(j)}] \\
&\times Z^{(j)}[4w_7^{(2-4)}\lambda_{CL}^{(j)}]Z^{(j)}[4w_3^{(2-4)}\lambda_{CR}^{(j)}]Z^{(j)}[4w_6^{(2-4)}\lambda_{CR}^{(j)}], \quad (10) \\
&\times Z^{(j)}[4w_4^{(2-4)}\lambda_R^{(j)}]Z^{(j)}[4w_5^{(2-4)}\lambda_R^{(j)}],
\end{aligned}$$

这种情况有 4 个分支, 故有  $\lambda^{(j+1)} = (\lambda_L^{(j)}, \lambda_{CL}^{(j)}, \lambda_{CR}^{(j)}, \lambda_R^{(j)})$ .

关联密度与特征函数的关系为

$$\rho_{k_1 k_2 \dots k_q}^{(j)} = \left\langle \frac{1}{i^q} \frac{\partial^q Z^{(j)}[\vec{\lambda}^{(j)}]}{\partial \lambda_{k_1}^{(j)} \dots \partial \lambda_{k_q}^{(j)}} \Big|_{\vec{\lambda}^{(j)}=0} \right\rangle. \quad (11)$$

设

$$\begin{aligned}
a &= \langle [w_1^{(2-3)}]^2 \rangle, \quad b = \langle w_1^{(2-3)} w_2^{(2-3)} \rangle, \quad c = \langle [w_1^{(2-3)}]^3 \rangle, \\
d &= \langle [w_1^{(2-3)}]^2 w_2^{(2-3)} \rangle, \quad e = \langle w_1^{(2-3)} w_2^{(2-3)} w_3^{(2-3)} \rangle, \\
A &= \langle [w_1^{(2-4)}]^2 \rangle, \quad B = \langle w_1^{(2-4)} w_2^{(2-4)} \rangle, \quad C = \langle [w_1^{(2-4)}]^3 \rangle, \\
D &= \langle [w_1^{(2-4)}]^2 w_2^{(2-4)} \rangle, \quad E = \langle w_1^{(2-4)} w_2^{(2-4)} w_3^{(2-4)} \rangle.
\end{aligned}$$

由上述各递推公式可得到窗口关联密度递推公式如下:

对于  $\Lambda = 2$ ,

$$\begin{aligned}
\rho_k^{(j+1)} &= 1, \\
\rho_{k_1 k_2}^{(j+1)} &= \begin{cases} 12a\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + 24b, & k_1, k_2 \in \{L\}, \\ 12a\rho_{k_1-2^j, k_2-2^j}^{(j)} + 24b, & k_1, k_2 \in \{R\}, \\ 36b, & k_1 \in \{L\}, k_2 \in \{R\}, \dots, \end{cases} \\
\rho_{k_1 k_2 k_3}^{(j+1)} &= \begin{cases} 24c\rho_{k_1 k_2 k_3}^{(j)} + 48d(\rho_{k_1 k_2}^{(j)} \\ + \rho_{k_1 k_3}^{(j)} + \rho_{k_2 k_3}^{(j)}) + 48e, & k_1, k_2, k_3 \in \{L\}, \dots, \\ 72d\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + 144e, & k_1, k_2 \in \{L\}, k_3 \in \{R\}, \dots, \end{cases} \quad (12)
\end{aligned}$$

在上式中,  $\{L\}$ ,  $\{R\}$  代表在左右分支中的窗口, “...” 是指  $k_i$  属左右分支的各种情况. 如果  $k_i$  指标属于右分支, 则在等式的右边的指标  $k_i$  要变为  $k_i - 2^j$ .

对于  $\Lambda = 3$ ,

$$\begin{aligned}
\rho_k^{(j+1)} &= 1, \\
\rho_{k_1 k_2}^{(j+1)} &= \begin{cases} 18a\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + 18b, & k_1, k_2 \in \{L\}, \dots, \\ 36b, & k_1, k_2 \text{ 分别属于不同分支} \\ & \{L\}, \{C\}, \{R\}, \end{cases} \quad (13) \\
\rho_{k_1 k_2 k_3}^{(j+1)} &= \begin{cases} 54c\rho_{k_1 k_2 k_3}^{(j)} + 54d(\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + \rho_{k_1 k_3}^{(j)} + \rho_{k_2 k_3}^{(j)}), & k_1, k_2, k_3 \in \{L\}, \dots, \\ 108d\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + 108e, & k_1, k_2 \in \{L\}, k_3 \in \{C\}, \dots, \\ 216e, & k_1, k_2 \in \{L\}, k_3 \in \{R\}, \dots, \end{cases}
\end{aligned}$$

$\{L\}$ ,  $\{C\}$ ,  $\{R\}$  分别代表在左、中、右分支中的窗口, “...” 是指  $k_i$  属左、中、右分支的各种情

况.如果  $k_i$  指标属于中或右分支,则在等式的右边的指标  $k_i$  要分别变为  $k_i - 3^j$  和  $k_i - 2 \cdot 3^j$ .

对于  $\Lambda = 4$ ,

$$\rho_k^{(j+1)} = 1,$$

$$\rho_{k_1 k_2}^{(j+1)} = \begin{cases} 32A\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + 32B, & k_1, k_2 \in \{L\}, \dots, \\ 64B, & k_1, k_2 \text{ 分别属于不同分支} \\ & \{L\}, \{CL\}, \{CR\}, \{R\}, \end{cases}$$

$$\rho_{k_1 k_2 k_3}^{(j+1)} = \begin{cases} 128C\rho_{k_1 k_2 k_3}^{(j)} + 128D(\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + \rho_{k_1 k_3}^{(j)} + \rho_{k_2 k_3}^{(j)}), & k_1, k_2, k_3 \in \{L\}, \dots, \\ 256D\rho_{k_1 k_2}^{(j)} + 256E, & k_1, k_2 \in \{L\}, k_3 \in \{CL\}, \dots, \\ 512E, & k_1, k_2, k_3 \text{ 分别属于不同分支} \\ & \{L\}, \{CL\}, \{CR\}, \{R\}, \end{cases} \quad (14)$$

$\{L\}, \{CL\}, \{CR\}, \{R\}$  分别代表在左、中左、中右、右分支中的窗口,“...”意义同上.在  $k_i$  指标属于中左、中右或右分支时,等式右边的指标  $k_i$  要分别变为  $k_i - 4^j$ ,  $k_i - 2 \cdot 4^j$  和  $k_i - 3 \cdot 4^j$ .

#### 4 一维投影 $\alpha$ 模型的子波关联矩

对于分割到第  $J$  代时一维投影  $\alpha$  模型各窗口的几率密度分布,我们可以把它看作一个在区间  $[0, 1]$  上的分布函数,用子波基将此函数可展成如下的形式<sup>[1,9]</sup>:

$$P^{(J)}(x) = d_0^{(0)}\varphi(x) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{\Lambda^j-1} d_{jk} \cdot \psi_{jk}(x), \quad (15)$$

其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad d_0^{(0)} = 1. \quad (16)$$

对于(2),(3),(4)式表达的三种不同的投影模型,需要选用不同的子波基函数,我们将基本子波基函数选为如下形式,如图1,图2和图3.

$$\psi_{00}(x) = \psi_{00}(x), \quad (\Lambda = 2),$$

$$\psi_{00}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (17)$$

$$\psi_{00}(x) = (\psi_{00}^{(1)}(x), \psi_{00}^{(2)}(x)), \quad (\Lambda = 3).$$

$$\psi_{00}^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ -1, & 1/3 < x \leq 2/3, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad \psi_{00}^{(2)}(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x \leq 2/3, \\ -1, & 2/3 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (18)$$

$$\psi_{00}(x) = (\psi_{00}^{(1)}(x), \psi_{00}^{(2)}(x), \psi_{00}^{(3)}(x)), \quad (\Lambda = 4).$$

$$\psi_{00}^{(1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/4, \\ -1, & 1/4 < x \leq 1/2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad \psi_{00}^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & 1/2 \leq x \leq 3/4, \\ -1, & 3/4 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\psi_{00}^{(3)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1, & 1/2 < x \leq 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(15)式中的  $\psi_{jk}(x)$  可以通过对基本子波基函数的压缩和平移得到<sup>[1]</sup>. 在上述子波基选取的情况下, 可相应得到  $d_{jk}$  的形式

$$\begin{aligned} d_{jk} &= d_{jk}, & \Lambda &= 2, \\ d_{jk} &= (d_{jk}^{(1)}, d_{jk}^{(2)}), & \Lambda &= 3, \\ d_{jk} &= (d_{jk}^{(1)}, d_{jk}^{(2)}, d_{jk}^{(3)}), & \Lambda &= 3. \end{aligned} \quad (20)$$

$d_{jk}$  与窗口几率密度的关系也可以具体算出<sup>[1,9]</sup>.

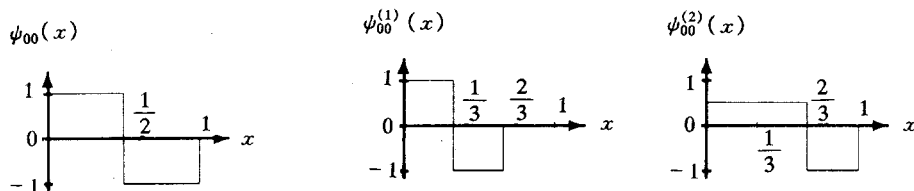


图1  $\Lambda = 2$  时的子波基函数

图2  $\Lambda = 3$  时的子波基函数

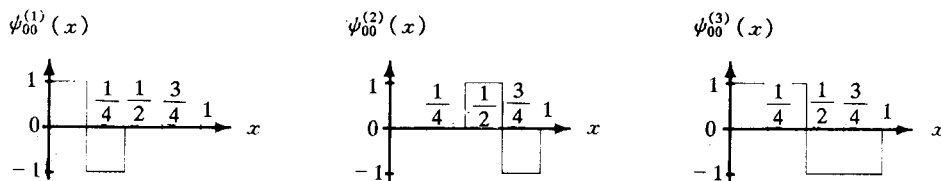


图3  $\Lambda = 4$  时的子波基函数

子波关联矩定义为

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 &= \langle d_0 \rangle, \\ \tilde{\rho}_{(jk)}^{(n)} &= \langle d_{jk}^{(n)} \rangle, \\ \tilde{\rho}_{(j_1 k_1)(j_2 k_2)}^{(n, m)} &= \langle d_{j_1 k_1}^{(n)} d_{j_2 k_2}^{(m)} \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

上式中的  $n, m$  的取值范围要视  $\Lambda$  的值而定. 当  $\Lambda = 2$  时, 不选取这个上脚标项; 而当  $\Lambda = 3$  和  $4$  时, 分别取  $n, m = 1, 2$  和  $n, m = 1, 2, 3$ . 高阶子波关联矩可仿此定义.

子波关联矩可通过子波关联矩的特征函数得到, 而这个特征函数可以通过对关联密度的特征函数(6)式做参数变换来得到<sup>[1]</sup>. 首先可以找出与(17)–(19)式相对应的子波变换矩阵  $W$ , 然后利用此矩阵以及变换式<sup>[2]</sup>

$$\eta^{(j)} = (W^T)^{-1} \lambda^{(j)} \quad (22)$$

来得到参数变换关系.  $\eta$  的矢量形式对(8)–(10)式的三种情况各有差异, 下面列出相应

于(10)式( $\Lambda = 4$ )的情况;

$$\begin{aligned}
 \eta^{(j+1)} &= (\eta_0^{(j+1)}, \eta_{00}^{(1)(j+1)}, \eta_{00}^{(2)(j+1)}, \eta_{00}^{(3)(j+1)}, \eta_{10}^{(1)(j+1)}, \dots, \eta_{13}^{(1)(j+1)}, \\
 &\quad \eta_{10}^{(2)(j+1)}, \dots, \eta_{13}^{(2)(j+1)}, \eta_{10}^{(3)(j+1)}, \dots, \eta_{13}^{(3)(j+1)}, \dots, \eta_{j, 4^{j-1}}^{(3)(j+1)}), \quad (23) \\
 \eta_L^{(j)} &= \left( \left( \frac{1}{4} \eta_0^{(j+1)} + \frac{1}{2} \eta_{00}^{(1)(j+1)} + \frac{1}{4} \eta_{00}^{(3)(j+1)} \right), \eta_{10}^{(1)(j+1)}, \eta_{10}^{(2)(j+1)}, \eta_{10}^{(3)(j+1)}, \dots, \eta_{j, 4^{j-1}}^{(3)(j+1)} \right) \\
 &= :(\eta_{0; L}^{(j)}, \eta_{00; L}^{(1)(j)}, \eta_{00; L}^{(2)(j)}, \eta_{00; L}^{(3)(j)}, \eta_{10; L}^{(1)(j)}, \dots, \eta_{j-1, 4^{j-1}-1; L}^{(3)(j)}), \\
 \eta_{CL}^{(j)} &= \left( \left( \frac{1}{4} \eta_0^{(j+1)} - \frac{1}{2} \eta_{00}^{(1)(j+1)} + \frac{1}{4} \eta_{00}^{(3)(j+1)} \right), \eta_{11}^{(1)(j+1)}, \eta_{11}^{(2)(j+1)}, \eta_{11}^{(3)(j+1)}, \dots, \eta_{j, 2 \cdot 4^{j-1}-1}^{(3)(j+1)} \right) \\
 &= :(\eta_{0; CL}^{(j)}, \eta_{00; CL}^{(1)(j)}, \eta_{00; CL}^{(2)(j)}, \eta_{00; CL}^{(3)(j)}, \eta_{10; CL}^{(1)(j)}, \dots, \eta_{j-1, 4^{j-1}-1; CL}^{(3)(j)}), \\
 \eta_{CR}^{(j)} &= \left( \left( \frac{1}{4} \eta_0^{(j+1)} + \frac{1}{2} \eta_{00}^{(2)(j+1)} - \frac{1}{4} \eta_{00}^{(3)(j+1)} \right), \eta_{12}^{(1)(j+1)}, \eta_{12}^{(2)(j+1)}, \eta_{12}^{(3)(j+1)}, \dots, \eta_{j, 3 \cdot 4^{j-1}-1}^{(3)(j+1)} \right) \\
 &= :(\eta_{0; CR}^{(j)}, \eta_{00; CR}^{(1)(j)}, \eta_{00; CR}^{(2)(j)}, \eta_{00; CR}^{(3)(j)}, \eta_{10; CR}^{(1)(j)}, \dots, \eta_{j-1, 4^{j-1}-1; CR}^{(3)(j)}), \\
 \eta_R^{(j)} &= \left( \left( \frac{1}{4} \eta_0^{(j+1)} - \frac{1}{2} \eta_{00}^{(2)(j+1)} + \frac{1}{4} \eta_{00}^{(3)(j+1)} \right), \eta_{13}^{(1)(j+1)}, \eta_{13}^{(2)(j+1)}, \eta_{13}^{(3)(j+1)}, \dots, \eta_{j, 4^{j-1}}^{(3)(j+1)} \right) \\
 &= :(\eta_{0; R}^{(j)}, \eta_{00; R}^{(1)(j)}, \eta_{00; R}^{(2)(j)}, \eta_{00; R}^{(3)(j)}, \eta_{10; R}^{(1)(j)}, \dots, \eta_{j-1, 4^{j-1}-1; R}^{(3)(j)}). \quad (24)
 \end{aligned}$$

其中脚标 L, CL, CR, R 分别表示  $(j+1)$  标度时的左、中左、中右、右分支.

利用子波幅  $d$  与窗口几率密度  $\varepsilon$  的关系<sup>[2]</sup>

$$d = W\varepsilon, \quad (25)$$

依据(8)–(10)式, 得出子波关联矩特征函数的递推公式. 这些公式与(8)–(10)式有完全类似的形式, 只不过是将原参数  $\lambda$  换成  $\eta$  而已. 但  $\eta$  的各分支与  $\lambda$  相比较已有了不同的内容. 例如, 对(10)式, 可相应得到

$$\begin{aligned}
 Z^{(j+1)}[\eta^{(j+1)}] &= Z^{(j)}[4w_1^{(2-4)}\eta_L^{(j)}] Z^{(j)}[4w_8^{(2-4)}\eta_L^{(j)}] Z^{(j)}[4w_2^{(2-4)}\eta_{CL}^{(j)}] \\
 &\quad \times Z^{(j)}[4w_7^{(2-4)}\eta_{CL}^{(j)}] Z^{(j)}[4w_3^{(2-4)}\eta_{CR}^{(j)}] Z^{(j)}[4w_6^{(2-4)}\eta_{CR}^{(j)}] \\
 &\quad \times Z^{(j)}[4w_4^{(2-4)}\eta_R^{(j)}] Z^{(j)}[4w_5^{(2-4)}\eta_R^{(j)}], \quad (26)
 \end{aligned}$$

利用子波关联矩与其生成函数的偏导数关系可直接算出子波关联. 这里首先证明两个普遍的结论:

- (1) 一阶子波关联矩  $\tilde{\rho}_{(j, k_i)}^{(m)} = 0$ ;
- (2) 二阶子波关联矩只有对角元素不为零.

证明结论(1):

按定义

$$\tilde{\rho}_{(j_1, k_1)}^{(m)(j+1)} = \left\langle \frac{1}{i} \frac{\partial Z^{(j+1)}[\tilde{\eta}^{(j+1)}]}{\partial \eta_{j_1, k_1}^{(m)(j+1)}} \Big|_{\tilde{\eta}^{(j+1)}=0} \right\rangle, \quad (27)$$

将子波关联矩的特征函数代入上式, 进行递推计算, 无论对(2)–(4)式的哪种模型, 都有

$$\tilde{\rho}_{(j_1, k_1)}^{(m)(j+1)} = \tilde{\rho}_{(j_1, k_1)}^{(m)(j)} = \dots = \tilde{\rho}_{(00)}^{(m)(0)}, \quad (28)$$

而  $\tilde{\rho}_{(00)}^{(m)(0)}$  可以直接计算出为零的结果, 故一阶子波关联矩总是为零的.

对其它任何级联过程, 只要子波基取为阶梯函数的形式, 由于这种阶梯函数总要满足<sup>[9]</sup>

$$\int_0^1 \psi_{jk}^{(m)}(x) dx = 0 \quad (29)$$

条件, 故任一个信号函数在子波展开时, 它的子波幅  $d_{j,k}^{(m)}$  可由原信号的窗口分布的线性组合表示出来, 就如同公式(25)表达的那样. 但在这些线性组合中, 正的项数和负的项数带权相等(这是由于要与子波基相配合的缘故). 再根据级联过程中窗口的平权性, 可立即得到  $\tilde{\rho}_{(j_1, k_1)}^{(m)} = \langle d_{j_1, k_1}^{(m)} \rangle = 0$ .

证明结论(2):

按照二阶子波关联矩的定义

$$\tilde{\rho}_{(j_1, k_1)(j_2, k_2)}^{(m,n)(j+1)} = \left\langle \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 Z^{(j+1)}[\tilde{\eta}^{(j+1)}]}{\partial \eta_{j_1, k_1}^{(m)(j+1)} \partial \eta_{j_2, k_2}^{(n)(j+1)}} \Big|_{\tilde{\eta}^{(j+1)}=0} \right\rangle, \quad (30)$$

将子波关联矩的特征函数代入上式进行递推计算, 取  $j_1, k_1 \neq j_2, k_2$ , 或  $m \neq n$ , 这时对应的是二阶子波关联矩的非对角元. 在逐次递推的过程中, 总要出现因子  $\tilde{\rho}_{(j_1, k_1)}^{(m)}$  和  $\tilde{\rho}_{(j_2, k_2)}^{(n)}$ , 由于它们应等于零(结论1), 故此时非对角元全部为零. 但当  $m = n$  且  $j_1, k_1 = j_2, k_2$  时, 递推过程不出现零因子, 故对角元素一般不为零.

对一般的级联过程, 在取阶梯函数为子波基的情况下, 有<sup>[9]</sup>

$$\int_0^1 \psi_{j_1, k_1}^{(m)}(x) \psi_{j_2, k_2}^{(n)}(x) dx \propto \delta_{j_1, j_2} \delta_{k_1, k_2} \delta_{m, n}, \quad (31)$$

即满足正交条件. 与证明结论1的理由类似, 可得出  $d_{j_1, k_1}^{(m)} d_{j_2, k_2}^{(n)}$  中的正负项数带权相等. 再根据级联过程的平权性, 可得到非对角元  $\tilde{\rho}_{(j_1, k_1)(j_2, k_2)}^{(m,n)} = \langle d_{j_1, k_1}^{(m)} d_{j_2, k_2}^{(n)} \rangle = 0$  的结果.

文献[1]、[2]所得到的计算结果, 也体现了这两个普遍的结论.

对(2)–(4)式所表述的投影模型, 我们对其子波关联矩进行了具体的计算, 其结果也遵从以上这两个结论. 具体的计算结果如下:

相应于(2)式

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 &= 1, & \tilde{\rho}_{(j_1, k_1)} &= 0, & \tilde{\rho}_{0,0} &= 1, \\ \tilde{\rho}_{(j_1, k_1)(j_2, k_2)} &= \begin{cases} \frac{\alpha^2}{50} \left( \frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{30} \right)^{j_1}, & j_1, k_1 = j_2, k_2, \\ 0, & j_1, k_1 \neq j_2, k_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$



相应于(3)式

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 = 1, \tilde{\rho}_{(j_1, k_1)}^{(m)} = 0, (m = 1, 2), \quad \tilde{\rho}_{0,0} = 1, \\ \tilde{\rho}_{(j_1, k_1)(j_2, k_2)}^{(m, n)} = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{50} \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{20} \right)^{j_1}, & m = n = 1, j_1, k_1 = j_2, k_2, \\ \frac{2\alpha^2}{75} \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{20} \right)^{j_1}, & m = n = 2, j_1, k_1 = j_2, k_2, \\ 0, & m \neq n \text{ 或 } j_1, k_1 \neq j_2, k_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

相应于(4)式

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 = 1, \tilde{\rho}_{(j_1, k_1)}^{(m)} = 0, (m = 1, 2, 3), \quad \tilde{\rho}_{0,0} = 1, \\ \tilde{\rho}_{(j_1, k_1)(j_2, k_2)}^{(m, n)} = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{49} \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{21} \right)^{j_1}, & m = n = 1, 2, j_1, k_1 = j_2, k_2, \\ \frac{\alpha^2}{98} \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{21} \right)^{j_1}, & m = n = 3, j_1, k_1 = j_2, k_2, \\ 0, & m \neq n \text{ 或 } j_1, k_1 \neq j_2, k_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

这里已利用了经由(1)式算出的基元分割几率矩

$$\langle [w_1^{(2-3)}]^2 \rangle, \langle w_1^{(2-3)} w_2^{(2-3)} \rangle, \langle [w_1^{(2-4)}]^2 \rangle, \langle w_1^{(2-4)} w_2^{(2-4)} \rangle.$$

## 5 结 论

本文对自仿射分形一维投影模型,从特征函数的递推公式着手,作了关联密度和子波关联矩的研究.结论是:

(1) 二维相空间不同的自仿射分形具有不同的一维投影 $\alpha$ 模型,对应的关联密度的特征函数也各异;

(2) 由特征函数的递推公式得到的关联密度以较复杂的递推公式的形式给出;

(3) 分割数 $\Lambda = 2, 3, 4$ 的子波基可分别取为(17)–(19)式的形式.无论对哪种投影模型,一阶子波关联矩为零,二阶子波关联矩消除子波展开系数之间的关联耦合.而且二阶子波关联矩呈现了关于 $j_1$  ( $j_1 = 0, 1, 2, \dots, J-1$ )的幂指数行为.

(4) 对一般的级联过程,只要子波基选为阶梯函数的形式,其一阶子波关联矩为零,二阶子波关联矩非对角元为零,即解除关联耦合.

这种子波关联较关联密度有着更简单的形式和更清晰的结构,这对关联问题的研究有着积极的意义.

## 参 考 文 献

- [1] M. Greiner, P. Lipa, P. Carruthers, Wavelet Correlations in the P-Model, Preprint HEPHY-PUB 587 / 93(1993).
- [2] M. Greiner, J. Gieseemann, P. Lipa *et al.*, Wavelet Correlations in Hierarchical Branching Processes. Preprint HEPHY-PUB 618 / 95(1995).
- [3] Wu Yuanfang, Liu Lianshou, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 3197.

- [4] A. Bialas, R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B275** (1986)703.  
[5] A. Bialas, R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B308** (1988)857.  
[6] W. Ochs, *Phys. Lett.*, **B247** (1990)101.  
[7] 林海、张阳、刘连寿, 高能物理与核物理, **18** (1994)858.  
[8] 林海、刘连寿, 高能物理与核物理, **20** (1996)625.  
[9] 林海、刘连寿, 科学通报, **40** (1995)502.

## Wavelet Correlation in the One-Dimensional Projection $\alpha$ -Model

Lin Hai

(Physics Department, Yanbei Teacher's College, Datong 037000)

Liu Lianshou

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079)

Received 19 April 1996

### Abstract

One-dimensional projection of two-dimensional self-affine phase space for two typical self-affine fractals is studied, and one-dimensional projection  $\alpha$  model is obtained. About this model, starting from characteristic function, we study its correlation densities and the wavelet correlation moment. The wavelet basis functions of split number  $\Lambda = 2,3,4$  are found out. It turns out that the various wavelet-coefficients decouple when the second order wavelet correlation moments are considered. This is a general conclusion and model independent.

**Key words** high energy collision, self-affine fractal, one-dimensional projection  $\alpha$  model, correlation density, wavelet, wavelet correlation.