

# 三粒子系统的“ $Q$ 效应”\*

解文方

(广州师范学院物理系 广州 510010)

1996-03-18 收稿

## 摘 要

采用不同的模型, 揭示三粒子系统内部振动能和集体转动能的竞争对系统组态的几何结构和空间取向的影响.

**关键词** 三粒子系统,  $Q$ 效应, 对称性.

## 1 引 言

最近的研究发现, 对称性决定三体系统的几何结构和运动形态的主要特征<sup>[1,2]</sup>. 对于给定的总角动量  $L$ , 宇称  $\pi$  等一串量子数的态, 所遵从的原则是在相互正交的前提下使能量尽可能的低. 为此要考虑几个主要因素: 首先是位能, 表现为对几何对称性的追求; 其次是内部振动能, 表现为对固有节面的躲避; 再者为集体转动能, 表现为对空间取向的偏爱(由  $Q$  表征,  $Q$  是  $L$  在坐标轴的投影). 这些因素的竞争决定了量子态的结构和能级的顺序. 内部振动能和集体转动能的竞争, 称之为“ $Q$ 效应”. 对于微观少体系统的结构, 内部激发和空间取向, “ $Q$ 效应”的影响是十分重要的. 例如, 利用“ $Q$ 效应”, 如果将  $^{12}\text{C}$  看作  $3\alpha$  粒子结构, 则  $^{12}\text{C}$  的能谱中, 就应该有一个低于  $4_1^+$  态的  $4_2^-$  态. 这是因为  $4_1^+$  和  $4_2^-$  态的内部运动都是围绕正三角形的小振动, 而  $4_1^+$  态的主要成分  $Q=0$ ,  $4_2^-$  态的主要成分  $|Q|=3$ . 显然在  $|Q|$  较大的成分中, 其转动惯量较大, 则相应的集体转动能较小. 所以  $4_2^-$  态的能量低于  $4_1^+$  态. 所以可以从是否能找到这样一个  $4_2^-$  态, 来作为判断  $^{12}\text{C}$  是否可以作为  $3\alpha$  集团结构的一个依据. 实验上至今仍没找到, 若找到这样一个  $4_2^-$  态 ( $\approx 13.35\text{MeV}$ ), 则  $^{12}\text{C}$  的  $3\alpha$  集团模型将受到强有力的支持, 否则将受到怀疑[3]. 另外“ $Q$ ”效应的影响在原子物理中也可以找到例子, 如对具有三个价电子原子的基态来说,  $S=3/2$  体系中  $1_1^+$  为能量最低态,  $S=1/2$  体系中  $1_1^-$  态为能量最低态, 其中  $1_1^+$  态以  $Q=0$  成分为主,  $1_1^-$  态则以  $|Q|=1$  成分为主. 由于  $|Q|$  大的成分集体转动能较小, 所以  $S=1/2$  的  $1_1^-$  态能量低于  $S=3/2$  的  $1_1^+$  态. 这一结论和具有三个价电子原子的基态是符合的. 实验测得 B, Al, Ga, Tl... 等的基态均为  $^2P^0$  [4].

\* 国家自然科学基金资助.

为进一步揭示“ $Q$ 效应”对三体系统结构的影响,首先选择具有排斥芯和吸引尾,其定性特征有很大的普遍性的 Ali-Bodmer 力作用的全同三玻色子体系,粒子质量分别取  $\alpha$  粒子质量( $M_\alpha$ ),  $\alpha$  粒子质量的一半( $M_\alpha/2$ )和  $\alpha$  粒子质量的四分之一( $M_\alpha/4$ )三种情况来讨论,观察当粒子质量减少时,也就是集体转动能增加时,在内部运动和集体转动的竞争中,体系组态的各组分(由  $Q$  决定)权重变化,此时体系的结构和激发将受到  $|Q|$  值的严重影响.最后观察当相互作用势变化时,此时由于粒子间的对应势能最低的距离减小,其集体转动能增加时“ $Q$ 效应”的影响,采用 Yukawa 势作用下三全同粒子体系,计算出各个组分的权重.与前面的结果进行比较,然后得到有意义的结论.

## 2 理论模型

考虑一个三全同玻色子系统,相互作用势取广义的 Ali-Bodmer 力(能量以 MeV, 距离以 fm 为单位,以下相同)

$$V(r) = V_0 \{ -\exp[-(r/2.105)^2] + 2 \exp[-(r/1.428)^2] \}, \quad (1)$$

其中  $V_0$  为可调参数. 粒子质量分别取  $M_\alpha$  (3728MeV),  $\frac{M_\alpha}{2}$  (1864MeV),  $\frac{M_\alpha}{4}$  (932MeV).

体系波函数的分波形式为

$$\Psi_{LM} = \sum_{l_1 l_2} f_{l_1 l_2}(r, R) [Y_{l_1}(\hat{r}') Y_{l_2}(\hat{R}')]_{LM}, \quad (2)$$

其中  $r$  和  $R$  为 Jacobi 坐标, 引入体轴  $i'-j'-k'$ , 且  $k'$  与三粒子平面  $\sigma$  垂直(如图 1 所示).

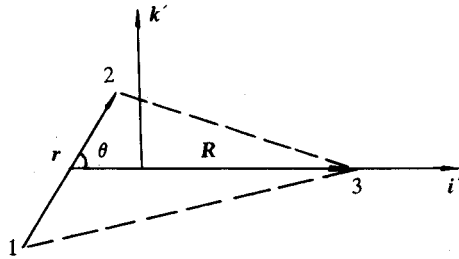


图1 Jacobi 坐标和体轴

则波函数可重新写为

$$\Psi_{LM} = \sum_{Q=-L}^L D_{QM}^L(-\Omega) \psi_Q, \quad (3)$$

$$\psi_Q = \sum_{l_1 l_2} f_{l_1 l_2}(r, R) [Y_{l_1}(\hat{r}') Y_{l_2}(\hat{R}')]_{LQ}, \quad (4)$$

其中  $\Omega$  表示从固定坐标系到体轴的一个欧拉旋转,  $\hat{r}'$  和  $\hat{R}'$  表示相对于体轴的方位角,  $Q$  是  $L$  在  $k'$  轴上的分量, 称  $\psi_Q$  是  $\Psi_{LM}$  的一个组分.

对于量子少体系统, 其结构和稳定性主要取决于以下两个因素<sup>[1,2]</sup>:

- (1) 势能在多维坐标空间的拓扑结构.
- (2) 由于量子力学对称性的制约, 在多维坐标空间出现的内禀节面的结构.

对于全同粒子系统, 势能的极值与几何对称性密切相关. 另一方面, 内禀节面则与量子力学对称性(即在转动, 反演, 粒子置换等作用下的对称性)相关.

从量子力学对称性分析得知, 三玻色子体系的  $L^n$  态可以分为两类: 一类含有无节组分(即完全不受量子力学对称性的制约), 这类态的首态(能量最低的态)均以无节组

分为主, 其内部运动特征是围绕等边形的小振动, 这些态构成两条以正三角形为特征的转动带, 即  $Q^{\pi}=0^+(0_1^+, 2_1^+, 4_1^+, \dots)$  和  $3^-(3_1^-, 4_1^-, \dots)$  转动带.

由于这类态的首态以无节组分为主, 所以波函数的取向(以  $k'$  相对  $L$  的分布来衡量)也就决定了. 例如  $0^+$  带, 其主要成分(无节组分)是  $Q=0$ , 等边形结构的取向为立着的( $0_1^+$  除外, 因为它的取向可以是空间任何方向). 而对于  $3^-$  带, 主要成分的  $|Q|=3$ , 空间取向为完全躺着( $3_1^-$ )和斜躺着(其它各态).

一般地说,  $|Q|$  值越大, 体系的转动惯量越大, 则集体转动能就越小, 体系的结构就越稳定. 这样对于体系各态, 一方面为了避免内部激发, 尽量避开内禀节面, 围绕几何对称性最好的构形进行分布, 以达到总位能尽可能低的目的. 另一方面, 尽量取  $|Q|$  值较大的组分, 以达到尽量减少集体转动能. 所以三粒子体系的结构和空间取向, 就取决于内部振动能和集体转动能的竞争结果, 这就是所谓的“Q效应”.

第二类态则不含无节组分, 其首态至少含一个节面, 内部运动为折叶运动和摇摆运动, 其内部振动能显著高于第一类态. 为方便起见, 以下仅讨论第一类态, 但所得结果对所有各态都适用.

### 3 计算结果和讨论

大家知道, 当体系中的粒子质量或粒子间的距离发生变化时, 其转动惯量发生变化, 则集体转动能也发生变化. 所以首先分别取粒子质量为  $M_{\alpha}$ ,  $M_{\alpha}/2$ ,  $M_{\alpha}/4$ , 观察当内部运动能大于集体转动能, 内部运动能和集体转动能大致相等, 以及内部运动能小于集体转动能时, 体系的组态各组分所占的比重的变化. 利用文献[5]所提出的方法和文献[6]中的计算程序, 求解 Schrödinger 方程, 归一化条件

$$1 = \int |\Psi_{LM}|^2 d\mathbf{r} d\mathbf{R} = \frac{8\pi^2}{2L+1} \sum_{Q=-L}^L \int r^2 R^2 \sin\theta dr dR d\theta [(\psi_Q^R)^2 + (\psi_Q^I)^2] \\ = \sum_{Q=0}^L (W_Q^R + W_Q^I), \quad (5)$$

其中  $W_Q^R (W_Q^I)$  表示  $\psi_Q^R (\psi_Q^I)$  和  $\psi_{-Q}^R (\psi_{-Q}^I)$  的权重之和. 计算结果分别列在表 1, 表 2 和表 3.

表 1 质量为  $M_{\alpha}$  体系各组态的权重

$L^{\pi}$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$
$0_1^+$	1				
$2_1^+$	0.973	0	0.027		
$3_1^-$	0	0.006	0	0.994	
$4_1^+$	0.717	0	0.204	0	0.080
$4_1^-$	0	0.042	0	0.958	0

表 2 质量为  $M_{\alpha}/2$  体系各组态的权重

$L^{\pi}$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$
$0_1^+$	1				
$2_1^+$	0.932	0	0.068		
$3_1^-$	0	0.010	0	0.990	
$4_1^+$	0.427	0	0.305	0	0.270
$4_1^-$	0	0.068	0	0.932	0

表3 质量为  $M_x/4$  体系各组态的权重

$L^x$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$
$0_1^+$	1				
$2_1^+$	0.838	0	0.162		
$3_1^-$	0	0.014	0	0.986	
$4_1^+$	0.277	0	0.334	0	0.388
$4_1^-$	0	0.103	0	0.897	0

所以此时内部激发能大于集体转动能,那么在内部动能和集体转动能的竞争中,内部动能占优势.所以此时  $4_1^+$  态也以无节组分为主,从表1中可以看出,  $W_0=0.717$ .当粒子质量减少一半 ( $M_x/2$ ) 时,集体转动能差增加大约一倍,由于取  $|Q|$  值较大的成分可以减少集体转动能,所以  $Q=0$  的无节组分的相对重要  $|Q|$  值较大的组分,从表3可以看出,  $W_0=0.277$ .显然随着集体转动能进一步的增加,  $4_1^+$  态的结构不再是正三角形.所以当集体转动能比较大时,  $Q^x=0^+$  的转动带将会中断.对于  $Q^x=3^-$  的转动带,由于无节组分的  $|Q|$  值较大,无论何种情况,无节组分都占绝对优势,此转动带都不会破坏.

进一步的讨论,观察当粒子间距离发生变化引起集体转动能增加时,  $Q$  效应对体系结构的影响.取 Yukawa 势<sup>[7]</sup>.

$$V(r) = -V_\alpha \exp(-\mu_\alpha r) / r + V_\gamma \exp(-\mu_\gamma r) / r$$

其中  $V_\alpha$  和  $V_\gamma$  为可调参数.利用文献[7]中的参数及以上所采用的方法和计算程序,求得各态的权重列在表4.

由于 Yukawa 势对应势能最低点粒子间的距离 ( $\approx 0.80\text{fm}$ ), 小于 Ali-Bodmer 势能最低点粒子间的距离 ( $2.34\text{fm}$ ). 所以如果体系的组态构成等边三角形,则 Yukawa 势体系的集体转动能大于 Ali-Bodmer 势体系的集体转动能.和前面的讨论一样,体系组态将尽可能选取  $|Q|$  值较大的组分,以减少体系的集体转动能.由于此时集体转动能已大于  $M_x/4$  时体系的集体转动能,所以  $2_1^+$  态的  $W_0$  也有明显的减少,即  $W_0=0.673$ ,  $4_1^+$  态的  $W_0=0.239$ , 其结构的主要成分已不再是等边三角形.

综上所述,在三体系统的结构和空间取向中,其集体转动能和内部激发能竞争,即“ $Q$ 效应”的影响是十分重要的.当内部激发能大于集体转动能时,体系波函数将尽量避免内禀节面,围绕几何对称性高的构形分布.反之,当内部激发能小于集体转动能时,体系将尽可能选取  $|Q|$  值较大的几何构形,体系的空间取向将尽量与  $L$  垂直.曾有人设想把  $|Q|$  作为近似的好量子数用于能谱的分类,显然只有当内部激发能比集体转动能大得多时,这种设想才可行.

从表1,表2和表3中,可以看出,当组态的无节组分的  $|Q|$  值较大时,则无论粒子质量如何变化,其无节组分的权重都相当大,例如  $3_1^-$  和  $4_1^-$  态.对  $2_1^+$  态,在以上的三种情况中,其集体转动能都小于内部振动能,所以无节组分的权重占绝对优势.对于  $4_1^+$  态,当粒子质量为  $M_x$  时,由于内部激发能大约为  $30\text{MeV}$ <sup>[1]</sup>,而  $Q=0$  成分和  $|Q|=4$  成分的集体转动能差小于  $20\text{MeV}$  (仅考虑  $L \leq 4$  情况).

表4 Yukawa 势作用下体系各组态的权重

$L^x$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$
$0_1^+$	1				
$2_1^+$	0.673	0	0.327		
$3_1^-$	0	0.028	0	0.972	
$4_1^+$	0.239	0	0.349	0	0.412
$4_1^-$	0	0.143	0	0.857	0

## 参 考 文 献

- [1] Xie Wenfang, Bao Chengguang, *SCIENCE IN CHINA* (Series A), **38**(1995)1083.
- [2] Xie Wenfang, Bao Cheengguang, *Commun. Theor. Phys.*, **23**(1995)429.
- [3] 解文方, 鲍诚光, *高能物理与核物理*, **19**(1995)837.
- [4] C. G. Bao, W. F. Xie, C. D. Lin, *J. Phys.*, **B27**(1994)L196.
- [5] C. G. Bao, G. C. Qiu, H. D. Gan *et al.*, *Few-Body Systems*, **2**(1987) 87.
- [6] Y. P. Gan, M. A. Gong, C. E. Wu *et al.* *Computer Phys. Comm.*, **34**(1985)387.
- [7] J. Carbinell, C. Ginoux, S. P. Merkuriev, *Few-Body Systems*, **15**(1993)15.

**Q-Effect of Structures of 3-Particle Systems**

Xie Wenfang

*(Department of Physics, Guangzhou Teachers' College, Guangzhou, 510010)*

Received 18 March 1996

## Abstract

The different modes are to study the effect of the competition between the energy internal vibration and the collective rotational energy. It is found that this competition will affect the geometric structure and the space orientation of the states of 3-Particle systems.

**Key words** 3-particle system,  $Q$ -effect, symmetry.