第20卷 第12期 高能物理与核物理 Vol.20, No.12
1996年 12月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Dec., 1996

双参数变形量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$ 的 Nodvik 实现和 Holstein－Primakoff 实现

于肇贤[1)] 于舸 张德兴 刘业厚

（大庆石油学院电子工程系 安达 151400）

1995－12－25 收稿

摘 要

给出了双参数变形量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$ 的 Nodvik 实现和 Holstein－Primakoff 实现，并给出了 $SU(1,1)_{q,s}$，和双参数变形振子的变形映射.

关键词 量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$，Nodvik 实现，Holstein－Primakoff 实现，映射.

近年来，量子代数的研究引起了物理学与数学工作者的极大兴趣. 人们发现，量子代数与当前理论物理与数学研究的一些热门课题，如统计可解模型、量子反散射方法、共形场论、link 和 knot 的分类等问题有着密切的联系[1,2].

从物理应用的角度考虑，研究多参数变形量子代数是很有意义的. 虽然在数学上可以证明两个或多个参数变形的量子代数能够经过某些变换回到单参数情形，但是正如 Wess 与 Zumino 所指出的[3]，多个变形参数在本质上是相互独立的. 最近，有关双参数变形量子代数 $SU(2)_{q,s}$ 的 Jordan－Schwinger 实现[4,5]、Nodvik 实现[6]和 Holstein－Primakoff 实现[6] 得到了圆满的解决. 本文将在文献[7]的基础上研究双参数变形量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$ 的 Nodvik 实现和 Holstein－Primakoff 实现.

双参数变形量子代数 $SU(1,1)_{q,s}$ 的生成元可由 Jordan－Schwinger 实现得到[7]:

$$k_+^a=s^{-1}a_1^+a_2^+,\ k_-^a=s^{-1}a_1a_2,\ k_0^a=(N_1^a+N_2^a+1)/2, \tag{1}$$

$$k_+^b=sb_1b_2,\ k_-^b=sb_1^+b_2^+,\ k_0^b=-(N_1^b+N_2^b+1)/2. \tag{2}$$

它们满足对易关系

$$[k_0^{a(b)},\ k_\pm^{a(b)}]=\pm k_\pm^{a(b)}, \tag{3}$$

$$s^{-1}k_+^{a(b)}k_-^{a(b)}-sk_-^{a(b)}k_+^{a(b)}=-s^{-2k_0^{a(b)}}[2k_0^{a(b)}]. \tag{4}$$

其中(1)(2)两式中算符$\{a_i^+,a_i,N_i^a\}$和$\{b_i^+,b_i,N_i^b\}(i=1,2)$是相互独立的，且有

$$a_i^+a_i=[N_i^a]_{q,s},\ a_ia_i^+=[N_i^a+1]_{q,s}, \tag{5}$$

1) 胜利油田职工大学，山东东营 257004.

1082—1086

$$b_i^+b_i=[N_i^b]_{q,s^{-1}}\ ,b_ib_i^+=[N_i^b+1]_{q,s^{-1}}\ . \tag{6}$$

式中记号$[x]_{q,s}=s^{1-x}[x]=s^{1-x}(q^x-q^{-x})/(q-q^{-1})$,$[x]_{q,s^{-1}}=s^{x-1}[x]$，$x$ 可以是算符或普通的数.

$SU(1,1)_{q,s}$是一个 Hopf 代数，它的余乘、余逆和余单位分别为

余乘(coproduct)[8]:
$$\Delta(k_0^{a(b)})=k_0^{a(b)}\otimes 1+1\otimes k_0^{a(b)}\ , \tag{7}$$

$$\Delta(k_\pm^{a(b)})=k_\pm^{a(b)}\otimes(sq)^{-k_0^{a(b)}}+(s^{-1}q)^{k_0^{a(b)}}\otimes k_\pm^{a(b)}\ , \tag{8}$$

$$\Delta(1)=1\otimes 1. \tag{9}$$

余逆(antipode):
$$S(k_0^{a(b)})=-k_0^{a(b)}\ , \tag{10}$$

$$S(k_+^{a(b)})=-(sq^{-1})\,k_+^{a(b)}s^{2k_0^{a(b)}}\ , \tag{11}$$

$$S(k_-^{a(b)})=-(sq^{-1})^{-1}k_-^{a(b)}s^{2k_0^{a(b)}}\ . \tag{12}$$

余单位(counit):
$$\varepsilon(k_0^{a(b)})=\varepsilon(k_\pm^{a(b)})=0, \tag{13}$$

$$\varepsilon(1)=1. \tag{14}$$

$SU(1,1)_{q,s}$有两个无穷分立的(正分立和负分立) 不可约么正表示 $|k,r\rangle^a$ 和 $|k,r\rangle^b$，即[7]

$$|k,r\rangle^a=|r-k-1\rangle_1^a\otimes|r+k\rangle_2^a\quad(r\geqslant -k>0), \tag{15}$$

$$|k,r\rangle^b=|-r-k-1\rangle_1^b\otimes|-r+k\rangle_2^b\quad(r\leqslant k<0). \tag{16}$$

式中 $k=-1/2,\ -1,\ \cdots$. 在这组基矢上，生成元 $k_0^{a(b)}$，$k_\pm^{a(b)}$ 的作用分别为

$$k_+^a|k,r\rangle^a=s^{-1}\sqrt{[r-k]_{q,s}[r+k+1]_{q,s}}\ |k,r+1\rangle^a\ , \tag{17}$$

$$k_-^a|k,r\rangle^a=s^{-1}\sqrt{[r+k]_{q,s}[r-k-1]_{q,s}}\ |k,r-1\rangle^a\ , \tag{18}$$

$$k_0^a|k,r\rangle^a=r|k,r\rangle^a\ . \tag{19}$$

和

$$k_+^b|k,r\rangle^b=s\sqrt{[-r-k-1]_{q,s^{-1}}[-r+k]_{q,s^{-1}}}\ |k,r+1\rangle^b, \tag{20}$$

$$k_-^b|k,r\rangle^b=s\sqrt{[-r-k]_{q,s^{-1}}[-r+k+1]_{q,s^{-1}}}\ |k,r-1\rangle^b, \tag{21}$$

$$k_0^b|k,r\rangle^b=r|k,r\rangle^b\ . \tag{22}$$

$SU(1,1)_{q,s}$的卡西米尔算符分别为[7]

$$C^a=s^{2k_0^a}(-s^2k_-^ak_+^a+[k_0^a]_{q,s}[k_0^a+1]_{q,s}), \tag{23}$$

$$C^b=s^{2k_0^b}(-k_-^bk_+^b+s^2[-k_0^b]_{q,s^{-1}}[-k_0^b-1]_{q,s^{-1}})\ . \tag{24}$$

根据 $SU(1,1)_{q,s}$的上述性质，可以发现它的 Nodvik 实现为

$$k_+^a = s^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^a}\sqrt{[k+u^a]_{q,s}[u^a-k+1]_{q,s}}\ , \tag{25}$$

$$k_-^a = s^{-1}\sqrt{[k+u^a]_{q,s}[u^a-k+1]_{q,s}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p^a}, \tag{26}$$

$$k_0^a = u^a\ . \tag{27}$$

和

$$k_+^b = s\sqrt{[k+u^b]_{q,s^{-1}}[u^b-k+1]_{q,s^{-1}}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p^b}\ , \tag{28}$$

$$k_-^b = s\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^b}\sqrt{[k+u^b]_{q,s^{-1}}[u^b-k+1]_{q,s^{-1}}}\ , \tag{29}$$

$$k_0^b = -u^b\ . \tag{30}$$

(25)—(30)诸式中，正则变量 $u^{a(b)}$ 和 $p^{a(b)}$ 满足$[u^{a(b)},p^{a(b)}]=i$. 容易验证(25)—(27)和(28)—(30)诸式分别满足对易关系(4).

对于双参数变形振子，有如下实现：

正分立情形：

$$a=\sqrt{[u^a-k+1]_{q,s}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p^a}\ ,a^+=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^a}\sqrt{[u^a-k+1]_{q,s}}\ , \tag{31}$$

$$a^+a=[N^a]_{q,s}=[u^a-k]_{q,s}\ . \tag{32}$$

负分立情形：

$$b=\sqrt{[u^b-k+1]_{q,s^{-1}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p^b}\ ,b^+=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^b}\sqrt{[u^b-k+1]_{q,s^{-1}}}\ , \tag{33}$$

$$b^+b=[N^b]_{q,s^{-1}}=[u^b-k]_{q,s^{-1}}\ . \tag{34}$$

容易证明

$$aa^+-s^{-1}qa^+a=(sq)^{-N^a}\ ,\ bb^+-sqb^+b=(sq^{-1})^{N^b}\ . \tag{35}$$

这样，可以得到 $SU(1,1)_{q,s}$ 和双参数变形振子的变形映射(算符上方标"～"者为未变形情况)：

正分立情形：

$$k_+^a=s^{-1}\widetilde{k}_+^a f(k_0^a),\ k_-^a=s^{-1}f(k_0^a)\widetilde{k}_-^a\ ,k_0^a=\widetilde{k}_0^a\ . \tag{36}$$

和

$$a=\widetilde{a}\sqrt{\frac{[u^a-k]_{q,s}}{u^a-k}}=\widetilde{a}\sqrt{\frac{[N^a]_{q,s}}{N^a}}\ ,\ a^+=\sqrt{\frac{[u^a-k]_{q,s}}{u^a-k}}\ \widetilde{a}^+=\sqrt{\frac{[N^a]_{q,s}}{N^a}}\ \widetilde{a}^+\ . \tag{37}$$

式中

$$\widetilde{k}_+^a=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^a}\sqrt{(k+k_0^a)(k_0^a-k+1)}\ , \tag{38}$$

$$\widetilde{k}_-^a=\sqrt{(k+k_0^a)(k_0^a-k+1)}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p^a}\ ,\widetilde{k}_0^a=u^a\ . \tag{39}$$

$$f(k_0^a)=\sqrt{\frac{[k+k_0^a]_{q,s}[k_0^a-k+1]_{q,s}}{(k_0^a+k)(k_0^a-k-1)}}\ . \tag{40}$$

负分立情形：

$$k_+^b = s\widetilde{k_+^b} f(k_0^b),\ k_-^b = sf(k_0^b)\widetilde{k_-^b}\ ,k_0^b = \widetilde{k_0^b}\ . \tag{41}$$

和

$$b = \widetilde{b}\sqrt{\frac{[u^b-k]_{q,s^{-1}}}{u^b-k}} = \widetilde{b}\sqrt{\frac{[N^b]_{q,s^{-1}}}{N^b}}\ ,b^+ = \sqrt{\frac{[u^b-k]_{q,s^{-1}}}{u^b-k}}\ \widetilde{b}^+ = \sqrt{\frac{[N^b]_{q,s^{-1}}}{N^b}}\ \widetilde{b}^+. \tag{42}$$

式中

$$\widetilde{k_+^b} = e^{-ip^b}\sqrt{(-k_0^b-k-1)(-k_0^b+k)}\ , \tag{43}$$

$$\widetilde{k_-^b} = \sqrt{(-k_0^b-k-1)(-k_0^b+k)}\ e^{ip^b}\ ,\widetilde{k_0^b} = -u^b\ . \tag{44}$$

$$f(k_0^b) = \sqrt{\frac{[-k_0^b-k-1]_{q,s^{-1}}[-k_0^b+k]_{q,s^{-1}}}{(-k_0^b-k-1)(-k_0^b+k)}}\ . \tag{45}$$

(40) 和(45)式是文献[7]得到过的.

为了获得 $SU(1,1)_{q,s}$ 的 Holstein－Primakoff 实现，可将其生成元用双参数变形振子$\{a^+,\ a,\ N^a\}$和$\{b^+,\ b,\ N^b\}$表示.

正分立情形：

$$k_+^a = s^{-1}a^+\sqrt{[2k+N^a]_{q,s}}\ ,\ k_-^a = s^{-1}\sqrt{[2k+N^a]_{q,s}}\ a, \tag{46}$$

$$k_0^a = k+N^a\ . \tag{47}$$

负分立情形：

$$k_+^b = s\sqrt{[2k+N^b]_{q,s^{-1}}}\,\mathrm{b},\ k_-^b = sb^+\sqrt{[2k+N^b]_{q,s^{-1}}}\ , \tag{48}$$

$$k_0^b = -(k+N^b)\ . \tag{49}$$

式中

$$a^+a = [N^a]_{q,s}\ ,\ aa^+ = [N^a+1]_{q,s}\ , \tag{50}$$

$$b^+b = [N^b]_{q,s^{-1}},\ bb^+ = [N^b+1]_{q,s^{-1}}\ . \tag{51}$$

(50)、(51)两式满足对易关系(35)式.

上面得到的(46)—(49)式就是 $SU(1,1)_{q,s}$ 的 Holstein－Primakoff 实现. 特别地，当 $s\to 1$ 时，上述实现退化为 $SU(1,1)_q$ 的 Holstein－Primakoff 实现[9].

作者感谢中国科学技术大学近代物理系井思聪教授对本文提供的帮助.

参 考 文 献

[1] N. Seiberg, *Commun. Math. Phys.*, **123**(1989)177.
[2] 井思聪，中国科学技术大学学报，**23**(1993)55.
[3] A. Schrirrmacher, J. Wess, B. Zumino, *Z. Phys.*, **C49**(1991)317.
[4] L. C. Biedenharn, *J. Phys.*, **A22**(1989)L873.
[5] A. J. Macfarlane, *J. Phys.*, **A22**(1989) 4581.
[6] 周焕强、贺劲松、管习文，高能物理与核物理，**19**(1995)420.
[7] Jing Sicong, Frank Cuypers, *Commun. Theor. Phys.*, **19**(1993)495.
[8] Yu Zhaoxian, Yu Ge, Zhang Dexing, Clebsch–Gordan Coefficients for The Two–Parameter Deformed Quantum Algebra $SU(1,1)_{q,s}$ (Ⅰ)(Ⅱ), to appear in *Commun. Theor. Phys.*
[9] J. Katriel, A. I. Solomon, *J. Phys.*, **A24**(1991) 2093.
[10] 马中骐著，杨－巴克斯特方程和量子包络代数，科学出版社，1993, P96.

Nodvik and Holstein–Primakoff Realizations for Two–Parameter Deformed Quantum Algebra $SU(1,1)_{q,s}$

Yu Zhaoxian Yu Ge Zhang Dexing Liu Yehou

(*Department of Electronic Engineering, Daqing Institute of Petroleum, Anda* 151400)

Received 25 December 1995

Abstract

The Nodvik and Holstein–Primakoff realizations for the two–parameter deformed quantum algebra $SU(1,1)_{q,s}$ are given. The deformed mappings between $SU(1,1)_{q,s}$ and a two–parameter deformed oscillator are also presented.

Key words quantum algebra $SU(1,1)_{q,s}$, Nodvik realization, Holstein–Primakoff realization, mapping.