第20卷 第1期 高能物理与核物理 Vol.20, No.1
1996年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1996

正则形式的 QED 约束关联动力学*
(I) 关联格林函数的运动方程

郭 华 王顺金
(北京大学物理系 北京 100871) (兰州大学现代物理系 兰州 730000)

1995-01-06 收稿

摘 要

仿照 $SU(N)$ 规范理论的约束关联动力学，建立起量子电动力学 (QED) 的约束关联动力学的完整体系，得到关联格林函数的运动方程系列.

关键词 生成泛函，正则关联动力学，格林函数.

1 引 言

微扰理论是量子场论的一个基本方法. 但由于场论描述的是一个多体系统，而有的系统多粒子之间的相互作用比较强，微扰论失去效力. 为了弥补微扰论的不足，人们又发展了非微扰的多粒子格林函数等方法[1,2]. 其基本做法是选择一组对于某种物理过程来说是重要的费曼图并对其求和，从而给出某一物理过程的非微扰解. 但从规范理论角度看，它有时会违背格林函数之间的规范约束，不能判断其正确性及解的存在性.

考虑到 QED 的 $U(1)$ 规范性质，A. Salam 等发展了规范理论的非微扰途径[2]. 他们通过对格林函数所满足的 Schwinger－Dyson 方程系列及 Ward 恒等式进行截断，以便使低阶格林函数运动方程可解. 由于它不同于一般的微扰方法，被称为规范技术[3]. 规范技术虽然反映了在渐近极限处的规范协变性，但由于它忽略了横向顶点，所以不能解释与规范理论有关的现象[4].

作为非微扰理论的多体关联动力学，随着计算技术的提高，在核理论及场论方面得到日益重要的应用[5－8]，并在研究 QGP 时发展成为 $SU(N)$ 规范理论的约束关联动力学[9－12]. 人们发现多体关联函数还可以用于研究多粒子系统的基态、激发态，以及相关的分数量子Hall 效应[13]. 本文仿照文献 [9 — 12] 的思想，建立 QED 的约束关联动力学体系.

* 国家自然科学基金、国家教委博士点基金和核工业基金资助.

2 QED 的正则量子化

QED 的拉氏密度为[14]

$$L=-\overline{\psi}\gamma_\mu \mathrm{D}_\mu\psi-m\overline{\psi}\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{1}$$

协变微商和规范场分别为

$$\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu, \tag{2}$$

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \tag{3}$$

式中 A_μ 为规范势.

由 (3) 可以定义规范电场和磁场

$$E_i=\mathrm{i}F_{i0}=-\dot{A}_i-\mathrm{i}\partial_i A_0, \tag{4}$$

$$B_i=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\partial_j A_k-\partial_k A_j). \tag{5}$$

对 (1) 式进行正则量子化时，我们选取时性规范

$$A_0(x)=0. \tag{6}$$

那么与 $A_i(x)$ 共轭的动量为

$$\pi_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i}=\dot{A}_i=-E_i. \tag{7}$$

在时性规范下，哈密顿量及哈密顿密度分别为

$$\mathbf{H}=\int \mathrm{d}^3 x\mathscr{H}(x), \tag{8}$$

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}(E_iE_i+B_iB_i)-eI_iA_i+\overline{\psi}(\gamma_i\partial_i+m)\psi, \tag{9}$$

式中

$$I_i=\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma_i\psi. \tag{10}$$

由 (1), (6) 可得时性规范条件下的高斯算子

$$g(x)=\partial_i\pi_i(x)+e\psi^+(x)\psi(x)=0. \tag{11}$$

为了说明 $g(x)$ 的意义，在与时性规范不矛盾情况下，定义依赖空间坐标而与时间无关的么正变换算符

$$U(\alpha)=\exp\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3xg(x)\alpha(x)\}; \tag{12}$$

对光子场作变换得

$$U(\alpha)A_i(x)U^+(\alpha)=A_i(x)+\partial_i\alpha(x); \tag{13}$$

对费米场作变换得

$$U(\alpha)\psi(x)U^{+}(\alpha)=\mathrm{e}^{ie\alpha(x)}\psi(x); \tag{14}$$

对电场作变换得

$$U(\alpha)\pi_i(x)U^{+}(\alpha)=\pi_i(x); \tag{15}$$

且高斯算符满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(x)=\frac{1}{\mathrm{i}}[\mathbf{H},g(x)]=0, \tag{16}$$

显然，$g(x)$ 是与时间无关 $U(1)$ 规范变换（也称剩余规范变换）的生成元，且为守恒算子. 同时由 $g(x)$ 所表述的 Ward 恒等式[9, 11] 也为守恒量. 根据关联动力学守恒律的思想，可以把它们对 QED 的约束转化为初值问题，从而得到紧凑的 QED 约束关联动力学.

在时性规范下，正则量子化条件为

$$[A_i(\boldsymbol{x},t),\ \pi_j(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{17}$$

$$\{\psi(\boldsymbol{x},t),\ \psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{18}$$

与 $SU(N)$ 规范理论类似，量子化后，经典高斯定律的量子对应是必须解决的重要问题. 对于量子场，$g(x)$ 是作用于 FOCK 空间的算子，(11) 式变得没有意义，需要寻找它的正确的量子表示. 应当指出，时性规范条件只消除了部分非物理的规范自由度. 另一部分非物理规范自由度的消除则依赖于对高斯定律产生的约束条件的正确处理. 如果用 $|>$ 表示物理态，则高斯定律可表示为

$$<|g(x)|>=0, \tag{19}$$

这样高斯定律的量子含义为高斯算子的物理态的平均值为零.

3 关联格林函数的运动方程

我们关心可观测物理量算子在系统的任意组态下的平均值. 设 H 的本征态为 $|n>$

$$H|n>=E_n|n>. \tag{20}$$

在场变量 $A(x)$ 和 $\psi(x)$ 表象中，$|n>$ 的表示式为

$$\boldsymbol{\Psi}_n[A(x),\psi(x)]=<A(x),\psi(x)|n>. \tag{21}$$

系统的任意组态、包括纯粹系综与混合系综，可以用统计算符 ρ 表示

$$\rho=\sum_n\rho_n|n><n|, \tag{22}$$

若 $\rho_n=\delta_{on}$，$\rho=|0><0|$，表示真空组态. 若取 $\rho_n=\mathrm{e}^{\zeta+\alpha N_n-\beta E_n}$（$\alpha$ 表示化学势，N_n 表示 $|n>$ 态的粒子数）则 ρ 代表巨正则系综.

在时性规范和正则量子化形式下，QED 规范理论对组态 ρ 的不关联格林函数和关联格林函数的生成泛函 Z 和 W 分别定义为

$$Z[K, J, \overline{\eta}, \eta] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}W[K, J, \overline{\eta}, \eta]} = \lim_{t\to-\infty,\, t'\to+\infty} \int \mathrm{D}A_{\mathrm{f}}\mathrm{D}A_{i}\mathrm{D}\psi_{\mathrm{f}}\mathrm{D}\psi_{i}$$

$$\sum_n \rho_n \Psi_n^*[A_{\mathrm{f}}, \psi_{\mathrm{f}}]\Psi_n[A_i, \psi_i]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n(t'-t)} \int_{(A_i\psi_i)}^{(A_{\mathrm{f}}\psi_{\mathrm{f}})} [\mathrm{D}A][\mathrm{D}\pi][\mathrm{D}\psi][\mathrm{D}\overline{\psi}]$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} [\pi_i \dot{A}_i + i\overline{\psi}\gamma_0\dot{\psi} - H + \pi_i K_i + A_i J_i + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta]\,\mathrm{d}^4x}. \tag{23}$$

令 $S=(K_i, J_i, \overline{\eta}, \eta)$ 是分别对应于场量 π_i，A_i，ψ 和 $\overline{\psi}$ 的外源的缩写. K_i 与 J_i 是 “c” 数函数，$\overline{\eta}(x)$ 与 $\eta(x)$ 是 Grassman 数函数. 当外源 $S=0$ 时，(23) 式定义为归一化因子.

关联格林函数定义为

$$\begin{aligned} &G_{\mathrm{c}}^{(l+m+2n)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ 1'\cdots n') \\ &= \mathrm{Tr}\{\hat{\mathrm{T}}(\pi(\hat{1})\cdots\pi(\hat{l})A(\dot{1})\cdots A(\dot{m})\psi(1)\cdots\psi(n)\overline{\psi}(n')\cdots\overline{\psi}(1'))\rho\}_{\mathrm{c}} \\ &= (-\mathrm{i})^{l+m+n-n'-1}\hat{\mathrm{D}}(\hat{1}\cdots\hat{l};\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ 1'\cdots n')W|_{S=0}, \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\hat{\mathrm{T}}$ 为编时算子，下指标 “c” 表示连接项，$\hat{\mathrm{D}}$ 是对外源的泛函导数

$$\begin{aligned} &\hat{\mathrm{D}}(\hat{1}\cdots\hat{l};\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ 1'\cdots n') \\ &= \frac{\delta^{(l+m+2n)}}{\delta K(\hat{1})\cdots\delta K(\hat{l})\delta J(\dot{1})\cdots\delta J(\dot{m})\delta\overline{\eta}(1)\cdots\delta\overline{\eta}(n)\delta\eta(n')\cdots\delta\eta(1')}. \end{aligned} \tag{25}$$

关联格林函数的运动方程可以通过对 W 的变分得到. 首先建立 W 满足的基本泛函微分方程.

从 W 对 $\overline{\psi}$ 变分得

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)} &= \alpha_i\nabla_x^i\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)} - \mathrm{i}e\alpha_i\frac{\delta W}{\delta J_i}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)} \\ &\quad - e\alpha_i\frac{\delta^2 W}{\delta J_i(x)\delta\overline{\eta}(x)} + m\gamma_0\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)} - \gamma_0\eta(x), \end{aligned} \tag{26}$$

式中 $\alpha_i=\gamma_0\gamma_i$. (26) 式是存在外源时 $\mathrm{Tr}(\psi(x)\rho)$ 满足的运动方程.

同样，W 对 ψ 变分得 (26) 式的共轭方程

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{\delta W}{\delta(-\eta(x))} &= -\nabla_x^i\frac{\delta W}{\delta(-\eta(x))}\alpha_i - \mathrm{i}e\frac{\delta W}{\delta J_i}\frac{\delta W}{\delta(-\eta(x))}\alpha_i \\ &\quad - e\frac{\delta^2 W}{\delta J_i(x)\delta(-\eta(x))}\alpha_i - m\gamma_0\frac{\delta W}{\delta(-\eta(x))} \\ &\quad + \overline{\eta}(x)\gamma_0. \end{aligned} \tag{27}$$

这是存在外源时，$\mathrm{Tr}(\overline{\psi}(x)\rho)$ 满足的运动方程.

存在外源时，$\mathrm{Tr}(A_i(x)\rho)$ 满足的运动方程可从 W 对 π_i 的变分中得到

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta W}{\delta J_i(x)}=\mathrm{i}\frac{\delta W}{\delta K_i(x)}-\mathrm{i}K_i(x). \tag{28}$$

而存在外源时，$\mathrm{Tr}(\pi_i(x)\rho)$ 的运动方程可以从 W 对 A_i 的变分中得到

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta W}{\delta K_i(x)}=&\mathrm{i}[\nabla_x^2\delta_{ik}-\nabla_x^i\nabla_x^k]\frac{\delta W}{\delta J_k(x)}\\&-e(\gamma_i)_x\left[\frac{\delta W}{\delta(-\eta(x^{\dagger}))}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)}+\frac{\delta^2 W}{\mathrm{i}\delta(-\eta(x^{\dagger}))\delta\overline{\eta}(x)}\right]\\&+iJ_i(x),\end{aligned} \tag{29}$$

这里 $x^{+}=x+\varepsilon$，ε 是无穷小正量，$(\gamma_i)_x$ 表示作用于宗量为 x 的 $\psi(x)$ 场.

当外源 $S=0$ 时，(28)、(29) 正是用海森堡方程推得的 $\langle A_i(x)\rangle$ 和 $\langle\pi_i(\mathrm{x})\rangle$ 满足的运动方程. 由于费米子数守恒，$S=0$ 时，(26)、(27) 式并无直接的物理意义. 然而，下面将看到泛函微分方程 (26)、(27)、(28) 和 (29) 是推导高阶关联格林函数的运动方程的出发点.

用对外源的多重泛函微分算子 $\hat{\mathrm{D}}$ 作用于上述 W 的基本泛函微分方程上，然后令外源等于零，就可以得到所有高阶关联格林函数的运动方程.

用 (25) 式作用于 (26) 式并令 $S=0$，考虑到 (24) 式，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_x}G_c^{(N)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\dot{1}\cdots\dot{m};x,2\cdots n;1'\cdots n')\\&=\mathrm{i}\gamma_0\delta_{l,0}\delta_{m,0}\delta_{n,1}\delta(x-n')+(\alpha_i\nabla_x^i)_xG_c^{(N)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\dot{1}\cdots\dot{m};x,2\cdots n;1'\cdots n')\\&\quad-\mathrm{i}e(\alpha_S)_xA_{[\substack{2\cdots n\\l'\cdots n'}]}S_{[\substack{\hat{1}\cdots\hat{l}\\\dot{1}\cdots\dot{m}}]}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}G_c^{(N_1)}(\hat{1}\cdots\hat{i};\dot{1}\cdots\dot{j};x,2\cdots k;1'\cdots k')\\&\quad\cdot G_c^{(N-N_1+1)}((\hat{i+1})\cdots\hat{l};A_S(x),(\dot{j+1})\cdots\dot{m};k+1\cdots n;(k+1)'\cdots n')\\&\quad-\mathrm{i}e(\alpha_i)_xG_c^{(\mathrm{N}+1)}(\hat{1}\cdots\hat{l};A_i(x),\dot{1}\cdots\dot{m};x,2\cdots n;1'\cdots n')\\&\quad+m\gamma_0G_c^{(N)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\dot{1}\cdots\dot{m};x,2\cdots n;1'\cdots n'),\end{aligned} \tag{30}$$

式中，$N_1=i+j+2k$，$N=l+m+2n$，$(\alpha_i)_x$ 表示作用于 $\psi(x)$. "A" 和 "S" 表示对下面的变量指标实行反对称化和对称化运算，但重复的项目应去掉[5].

类似地，对 (27) 式作多重泛函微分运算得

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_x}G_c^{(N)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\dot{1}\cdots\dot{m};1\cdots n;x,2'\cdots n')\\&=-\mathrm{i}\gamma_0\delta_{l,0}\delta_{m,0}\delta_{n,1}\delta(x-n)-\nabla_x^iG_c^{(N)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\dot{1}\cdots\dot{m};1\cdots n;x,2'\cdots n')(\alpha_i)_x\\&\quad-\mathrm{i}eA_{[\substack{l\cdots n\\2'\cdots n'}]}S_{[\substack{\hat{1}\cdots\hat{l}\\\dot{1}\cdots\dot{m}}]}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}G_c^{(N_1)}(\hat{1}\cdots\hat{i};\dot{1}\cdots\dot{j};1\cdots k;x,2'\cdots k')\end{aligned}$$

$$\cdot\ G_c^{(N-N_1+1)}((\hat{i+1})\cdots\hat{l};\ A_S(x),(\dot{j+1})\cdots\dot{m};\ k+1\cdots n;\ (k+1)'\cdots n')(\alpha_S)_x$$
$$-\mathrm{i}eG_c^{(N+1)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\ A_i(x),\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ x,\ 2'\cdots n')(\alpha_i)_x$$
$$-m\gamma_0G_c^{(N)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\ \dot{1}\cdots\dot{m};1\cdots n;\ x,2'\cdots n'). \tag{31}$$

对 (28) 作多重泛函微分运算得

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_x}G_c^{(N)}(\hat{1}\cdots\hat{l};\ A_i(x),\dot{2}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ 1'\cdots n')$$
$$=-\delta_{l,1}\delta_{m,0}\delta_{n,0}\delta(x_i-\hat{l})+\mathrm{i}G_c^{(N)}(\pi_i(x),\ \hat{1}\cdots\hat{l};\dot{2}\cdots\dot{m};1\cdots n;\ 1'\cdots n'). \tag{32}$$

对 (29) 作多重泛函微分运算得

$$\mathrm{i}\frac{d}{\mathrm{d}t_x}G_c^{(N)}(\pi_i(x),\hat{2}\cdots\hat{l};\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ 1'\cdots n')$$
$$=\delta_{l,0}\delta_{m,1}\delta_{n,0}\delta(x_i-\dot{m})+\mathrm{i}\nabla_x^2G_c^{(N)}(\hat{2}\cdots\hat{l};\ A_i(x),\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ 1'\cdots n')$$
$$-\mathrm{i}\nabla_x^i\nabla_x^SG_c^{(N)}(\hat{2}\cdots\hat{l};\ A_S(x),\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n;\ \dot{1}'\cdots n')$$
$$-e(\gamma_i)_x\mathrm{ASM}\ (ijk)G_c^{(N_1-1)}(\hat{2}\cdots\hat{i};\ \dot{1}\cdots\dot{j};\ 1\cdots k-1,\ x;\ 1'\cdots k')$$
$$\cdot\ G_c^{(N-N_1+2)}((\hat{i+1})\cdots\hat{l};\ (\dot{j+1})\cdots\dot{m};\ k\cdots n;\ x^+,(k+1)'\cdots n')$$
$$+e(\gamma_i)_xG_c^{(N+1)}(\hat{2}\cdots\hat{l};\ \dot{1}\cdots\dot{m};\ 1\cdots n,\ x;\ 1'\cdots n',\ x^+). \tag{33}$$

方程 (30)—(33) 构成了正则形式的 QED 规范理论的多体关联格林函数的运动方程组. 与拉氏形式的多体关联格林函数运动方程相比较[15], 正则形式的多体关联格林函数的运动方程是关于时间的一阶偏微分方程, 截断后容易进行实际的数值分析. 但由于引进了正则变量, 运动方程的数目增加了, 象通常的哈米顿正则力学一样.

4　结论与讨论

使用泛函微分技术, 我们给出了正则形式的 QED 的多体关联格林函数的动力学方程组. 它们是关于时间为一阶关于空间为二阶的偏微分方程组, 是非线性度为二次的非线性耦合方程组. 与 $SU(N)$ 规范理论类似[9－12], 该方程组与规范不变性导致的高斯定律和 Ward 恒等式是相容的, 并且能把上述规范约束条件转变成守恒律的初值问题. 如果对方程组截断到四点格林函数 (二体关联截断近似), 则所有守恒律与高斯定律能够严格满足, Ward 恒等式到四点格林函数也显然满足. 而且, 考虑了高斯定律和 Ward 恒等式的二体约束关联动力学方程组是有可能数值求解的.

参　考　文　献

[1]　P. C. Martin, J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **115** (1959) 1342.
[2]　A. Salam, R. Debourgo, *Phys. Rev.*, **135** (1964) 1398.
[3]　R. Delourgo, P. West, *J. Phys.*, **A10** (1977) 1049.

[4] C. N. Parker, *J. Phys.*, **A17** (1984) 2873.
[5] S. J. Wang, W. Cassing, *Ann. Phys.*, **159** (1985) 328.
[6] S. J. Wang, W. Cassing, *Nucl. Phys.*, **A495** (1989) 371.
[7] W. Cassing, S. J. Wang, *Z. Phys.*, **A337** (1990)1.
[8] W. Cassing, K. Niita, S. J. Wang, *Z. Phys.*, **A331** (1988)1.
[9] S. J. Wang, W. Cassing, M. Thoma, *Phys. Lett.*, **B324** (1994)5.
[10] 王顺金、郭华, 高能物理与核物理, **19** (1995) 267.
[11] 王顺金、郭华, 高能物理与核物理, **19** (1995)341.
[12] 郭华、王顺金, 高能物理与核物理, **19** (1995)455.
[13] E. Fradkin, *Nucl. Phys.*, **B389** (1993)587.
[14] M. Gyulassy, H-T. Elze, *Ann. Phys.*, **173** (1987)462.
[15] W. Zuo, H. Guo, S. J. Wang, *Commun. Theor. Phys.*, **22** (1994)245.

Constrained Correlation Dynamics of QED in Canonical Form (I) Equations of Motion for Correlation Green's Functions

Guo Hua
(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)
Wang Shunjin
(*Department of Modern Physics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000)

Received 6 January 1995

Abstract

With the aid of generating-functional technique and in the framework of correlation dynamics, we establish the constrained correlation dynamics of QED in the temporal gauge and canonical quantization form, and obtain a closed set of equations of motion for correlation Green's functions.

Key words generating-functional, canonical correlation dynamics, Green's function.