$N=4$ 超对称量子力学*

黄惟承　　阮　东
(新疆大学物理系　新疆　830046)

1994-06-27 收稿

摘　　要

利用 Clifford 代数构造了$N=4$超对称量子力学的一般形式，并讨论了它的实现。

关键词　超对称性，超对称量子力学，Clifford 代数.

1 引　　言

1981年，E. Witten[1] 在讨论超对称的破缺机制时，构造了超对称量子力学模型——量子力学系统存在N个超荷 $Q^\alpha(\alpha=1,2,\cdots,N)$，它们与系统的 Hamilton 量$H$之间满足如下代数关系：

$$\begin{aligned}&\{Q^\alpha,Q^\beta\}=2\delta^{\alpha\beta}H,\ (Q^\alpha)^+=Q^\alpha,\\&[H,Q^\alpha]=0,\ \alpha,\beta=1,2,\cdots,N.\end{aligned}\tag{1}$$

由于超对称量子力学具有独特的物理性质和优美的数学结构，因此十多年来，这一领域引起了广泛的注意和兴趣，并出现了大量的工作。然而大多数的工作是关于$N=2$超对称量子力学模型的[2]，对于$N>2$的情形，所见报道就不多了。de Crombrugghe 和 Rittenberg[3] 利用 Clifford 代数给出了$N>2$超对称量子力学的一个漂亮结构。他们是利用如下形式的超荷：

$$Q^\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{r}A_i^\alpha(x,p)C_i\quad \alpha=1,2\cdots N,\tag{2}$$

其中“玻色”自由度 A_i^α 是由坐标和动量构成的厄米算符；“费米”自由度 C_i 是 Clifford 代数 $C(r,0)$ 的生成元，它们满足：

$$\begin{aligned}&\{C_i,C_j\}=2\delta_{ij},C_i^+=C_i,\ i,j=1,2\cdots r;\\&[C_i,x_m]=[C_i,p_m]=0,\ m=1,2,\cdots d.\end{aligned}\tag{3}$$

而在本文中，我们将一开始就在超荷的结构中不仅引入 C_i 的一次项，而且还引入 C_i 的高次项(即由奇数个 C_i 的乘积表示的项)。这无疑将产生更丰富的物理内容。

文章安排如下：第一部分是引言；第二部分将主要讨论$N=4$超对称量子力学的一

* 国家自然科学基金和新疆维吾尔自治区自然科学基金资助.

般形式。我们考虑 $r=4$ 的情况，也就是说在超荷中只需考虑"费米"自由度 C_i 的一次项和三次项就够了；在第三部分中，将给出几个 $N=4$ 超对称量子力学的具体实现。

2　$N=4$ 超对称量子力学的一般形式

我们构造超荷(附录)：

$$Q^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_j A_j^\alpha C_j + \frac{i}{3!}\sum_{jkmn} D_j^\alpha \varepsilon_{jkmn} C_k C_m C_n\right), \tag{4}$$
$$j,k,m,n = 1,2,3,4;\ \alpha = 1,2,3,4,$$

其中 ε_{jklm} 是 4 维 Levi-Civita 符号；C_j 是 Clifford 代数 $C(4,0)$ 的生成元；A_j^α 和 D_j^α 是由坐标和动量构成的厄米算符，并与 C_j 满足：

$$[A_j^\alpha, C_k] = [D_j^\alpha, C_l] = 0. \tag{5}$$

将(4)代入(1)，得到

$$H = \frac{1}{2}(U + C_1C_2C_3C_4V) + \frac{1}{2}\sum_l^q \sum_{jk} f_{jk}^l B_l F_{jk}, \tag{6}$$

其中诸量应满足下列条件：

$$U = \sum_j [(A_j^\alpha)^2 + (D_j^\alpha)^2],\quad 对任意\ \alpha; \tag{7}$$

$$V = i\sum_j [A_j^\alpha, D_j^\alpha],\quad 对任意\ \alpha; \tag{8}$$

$$i[A_j^\alpha, A_k^\alpha] + i[D_j^\alpha, D_k^\alpha] + \frac{1}{2}\sum_{mn}[\{A_m^\alpha, D_n^\alpha\}$$
$$- \{A_n^\alpha, D_m^\alpha\}]\varepsilon_{jkmn} = -\sum_{l=1}^q f_{jk}^l B_l,\quad 对任意\ \alpha; \tag{9}$$

$$\sum_j(\{A_j^\alpha, A_j^\beta\} + \{D_j^\alpha, D_j^\beta\}) = 0,\quad \alpha \neq \beta; \tag{10}$$

$$[A_j^\alpha, A_k^\beta] - [A_k^\alpha, A_j^\beta] + [D_j^\alpha, D_k^\beta] - [D_j^\alpha, D_k^\beta]$$
$$= -i\sum_{mn}(\{A_n^\alpha, D_m^\beta\} + \{A_n^\beta, D_m^\alpha\})\varepsilon_{jkmn},\quad \alpha \neq \beta; \tag{11}$$

$$\sum_j([A_j^\alpha, D_j^\beta] + [A_j^\beta, D_j^\alpha]) = 0,\quad \alpha \neq \beta. \tag{12}$$

(6)式中 4×4 反对称矩阵 $f^l(f_{jk}^l = -f_{kj}^l)$ 的形式和个数 q 及由坐标和动量构成的厄米算符 B_l 均待定，且

$$F_{jk} = \frac{i}{4}[C_j, C_k]. \tag{13}$$

考虑满足如下线性关系的 A_j^α 和 D_j^α：

$$A_i^a = O_{ij}^a A_j^4,\quad A_j^4 \equiv A_j;$$
$$D_i^a = O_{ij}^a D_j^4,\quad D_j^4 \equiv D_j,\quad a = 1,2,3. \tag{14}$$

为使(7)、(8)、(10)、(12)各式成立，O^α 应是反对称实正交矩阵，即

$$(O^\alpha)^T=(O^\alpha)^{-1}=-O^\alpha, \tag{15}$$

并满足

$$\{O^\alpha,O^\beta\}=-2\delta^{\alpha\beta}. \tag{16}$$

于是(7)、(8)两式可分别写成：

$$\begin{aligned} U&=\sum_j[A_j^2+D_j^2],\\ V&=i\sum_j[A_j,D_j]. \end{aligned} \tag{17}$$

为使(9)、(11)两式成立，O^α 和 f^l 还应满足：

$$O^\alpha_{jk}\varepsilon_{jkmn}=-2O^\alpha_{mn}, \tag{18}$$

$$[O^\alpha,f^l]=0,\quad l=1,2,\cdots q. \tag{19}$$

满足(15)、(16)、(18)式的 O^α 可取如下表示：

$$O^1=\begin{pmatrix} i\sigma_2 & \\ & i\sigma_2\end{pmatrix},\quad O^2=\begin{pmatrix} & \sigma_3\\ -\sigma_3 & \end{pmatrix},\quad O^3=\begin{pmatrix} & \sigma_1\\ -\sigma_1 & \end{pmatrix}. \tag{20}$$

满足(19)式的反对称矩阵 f^l 有三个 ($q=3$)，其具体表示为：

$$f^1=\begin{pmatrix} & i\sigma_2\\ i\sigma_2 & \end{pmatrix},\quad f^2=\begin{pmatrix} & I\\ -I & \end{pmatrix},\quad f^3=\begin{pmatrix} -i\sigma_2 & \\ & i\sigma_2\end{pmatrix}. \tag{21}$$

把(14)、(20)两式代入(4)式，即得超荷的表达式：

$$\begin{aligned} Q^1&=\frac{1}{\sqrt{2}}[A_2C_1-A_1C_2+A_4C_3-A_3C_4\\ &\quad+i(D_2C_2C_3C_4+D_1C_3C_4C_1+D_4C_1C_2C_4+D_3C_1C_2C_3)],\\ Q^2&=\frac{1}{\sqrt{2}}[A_3C_1-A_4C_2-A_1C_3+A_2C_4\\ &\quad+i(D_3C_2C_3C_4+D_4C_3C_4C_1-D_1C_1C_2C_4-D_2C_1C_2C_3)],\\ Q^3&=\frac{1}{\sqrt{2}}[A_4C_1+A_3C_2-A_2C_3-A_1C_4\\ &\quad+i(D_4C_2C_3C_4-D_3C_3C_4C_1-D_2C_1C_2C_4+D_1C_1C_2C_3)],\\ Q^4&=\frac{1}{\sqrt{2}}[A_1C_1+A_2C_2+A_3C_3+A_4C_4\\ &\quad+i(D_1C_2C_3C_4-D_2C_3C_4C_1+D_3C_1C_2C_4-D_4C_1C_2C_3)]. \end{aligned} \tag{22}$$

利用(14)、(20)、(21)式，可以由(9)式求得 B_l,A_j,D_j 之间应满足的代数关系：

$$\begin{aligned} B_1&=-i[A_1,A_4]-i[D_1,D_4]-\{A_2,D_3\}+\{A_3,D_2\}\\ &=+i[A_2,A_3]+i[D_2,D_3]+\{A_1,D_4\}-\{A_4,D_1\},\\ B_2&=-i[A_2,A_4]-i[D_2,D_4]+\{A_1,D_3\}-\{A_3,D_1\}\\ &=-i[A_1,A_3]-i[D_1,D_3]+\{A_2,D_4\}-\{A_4,D_2\},\\ B_3&=-i[A_3,A_4]-i[D_3,D_4]-\{A_1,D_2\}+\{A_2,D_1\}\\ &=+i[A_1,A_2]+i[D_1,D_2]+\{A_3,D_4\}-\{A_4,D_3\}. \end{aligned} \tag{23}$$

于是超对称 Hamilton 量(6)式可表示为：

$$2H=\sum_{i}[A_{i}^{2}+D_{i}^{2}]+2[B_{1}(F_{14}+F_{32})+B_{2}(F_{24}+F_{13})+B_{3}(F_{34}+F_{21})]+iC_{1}C_{2}C_{3}C_{4}\sum_{i}[A_{i},D_{i}]. \tag{24}$$

如果引入另一组“费米”算符：

$$\psi_{1}^{\pm}=\frac{1}{2}(C_{1}\pm iC_{2}),\quad \psi_{2}^{\pm}=\frac{1}{2}(C_{3}\pm iC_{4}) \tag{25}$$

和一组新的超荷：

$$Q_{1}^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{4}\mp iQ_{1}),\quad Q_{2}^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{2}\mp iQ_{3}), \tag{26}$$

那么就可以将上面这个$N=4$超对称量子力学系统表示为：

$$\begin{gathered}\{Q_{\alpha}^{+},Q_{\beta}^{-}\}=2\delta_{\alpha\beta}H,\ (Q_{\alpha}^{\pm})^{2}=0,\\ [H,O_{\alpha}^{\pm}]=0,\ \alpha,\beta=1,2.\end{gathered} \tag{27}$$

利用(25)、(26)两式可将超荷(22)式表为：

$$\begin{aligned}Q_{1}^{+}&=(A_{1}-iA_{2})\psi_{1}^{+}+(A_{3}-iA_{4})\psi_{2}^{+}-i(D_{1}-iD_{2})[\psi_{2}^{+},\psi_{2}^{-}]\psi_{1}^{+}\\&\quad+i(D_{3}-iD_{4})[\psi_{1}^{+},\psi_{1}^{-}]\psi_{2}^{+},\\ Q_{1}^{-}&=(A_{1}+iA_{2})\psi_{1}^{-}+(A_{3}+iA_{4})\psi_{2}^{-}+i(D_{1}+iD_{2})[\psi_{2}^{+},\psi_{2}^{-}]\psi_{1}^{-}\\&\quad-i(D_{3}+iD_{4})[\psi_{1}^{+},\psi_{1}^{-}]\psi_{2}^{-},\\ Q_{2}^{+}&=(A_{3}-iA_{4})\psi_{1}^{-}-(A_{1}-iA_{2})\psi_{2}^{-}-i(D_{3}-iD_{4})[\psi_{2}^{+},\psi_{2}^{-}]\psi_{1}^{-}\\&\quad+i(D_{1}-iD_{2})[\psi_{1}^{+},\psi_{1}^{-}]\psi_{2}^{-},\\ Q_{2}^{-}&=(A_{3}+iA_{4})\psi_{1}^{+}-(A_{1}+iA_{2})\psi_{2}^{+}+i(D_{3}+iD_{4})[\psi_{2}^{+},\psi_{2}^{-}]\psi_{1}^{+}\\&\quad-i(D_{1}+iD_{2})[\psi_{1}^{+},\psi_{1}^{-}]\psi_{2}^{+}.\end{aligned} \tag{28}$$

超对称 Hamilton 量表为：

$$\begin{aligned}2H=&\sum_{i}[A_{i}^{2}+D_{i}^{2}]+i[-2B_{1}(\psi_{1}^{+}\psi_{2}^{-}-\psi_{1}^{-}\psi_{2}^{+})\\&+2B_{2}(\psi_{1}^{+}\psi_{2}^{-}+\psi_{1}^{-}\psi_{2}^{+})-iB_{3}([\psi_{1}^{+},\psi_{1}^{-}]-[\psi_{2}^{+},\psi_{2}^{-}])]\\&-i[\psi_{1}^{+},\psi_{1}^{-}][\psi_{2}^{+},\psi_{2}^{-}]\sum_{i}[A_{i},D_{i}].\end{aligned} \tag{29}$$

3　$N=4$ 超对称量子力学系统的具体实现

3.1　一维情形

取：

$$A_{4}=p\equiv-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\quad D_{\bar{m}}=0\ (\bar{m}=1,2,3). \tag{30}$$

$A_{\bar{n}}(\bar{n}=1,2,3)$ 和 D_{4} 均为 x 的函数，并且满足

$$D_4=\frac{A_1'}{2A_1}=\frac{A_2'}{2A_2}=\frac{A_3'}{2A_3},\quad (\text{“}'\text{”表示对 } x \text{ 求导}). \tag{31}$$

为满足(31)式,可以选择

$$A_{\bar{n}}=k_{\bar{n}}W, \tag{32}$$

其中 $k_{\bar{n}}(\bar{n}=1,2,3)$ 为常数;W为坐标 x 的函数。于是

$$D_4=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln W=\frac{W'}{2W}. \tag{33}$$

则超荷为:

$$\begin{aligned}
Q_1^+&=(-ip+k_3W)\psi_2^+ + k^-W\psi_1^+ + \frac{W'}{2W}[\psi_1^+,\psi_1^-]\psi_2^+,\\
Q_1^-&=(+ip+k_3W)\psi_2^- + k^+W\psi_1^- + \frac{W'}{2W}[\psi_1^+,\psi_1^-]\psi_2^-,\\
Q_2^+&=(-ip+k_3W)\psi_1^- - k^-W\psi_2^- - \frac{W'}{2W}[\psi_2^+,\psi_2^-]\psi_1^-,\\
Q_2^-&=(+ip+k_3W)\psi_1^+ - k^+W\psi_2^+ - \frac{W'}{2W}[\psi_2^+,\psi_2^-]\psi_1^+.
\end{aligned} \tag{34}$$

超对称 Hamilton 量为

$$\begin{aligned}
2H=p^2+k^2W^2+\left(\frac{W'}{2W}\right)^2+i\Big\{&2ik_1W'(\psi_1^+\psi_2^- - \psi_1^-\psi_2^+)\\
&+2k_2W'(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_1^-\psi_2^+)-ik_3W'([\psi_1^+,\psi_1^-]-[\psi_2^+,\psi_2^-])\\
&-[\psi_1^+,\psi_1^-][\psi_2^+,\psi_2^-]\frac{W'}{2W}\Big\},
\end{aligned} \tag{35}$$

其中

$$k^\pm=k_1\pm ik_2,\quad k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2. \tag{36}$$

构造满足 Clifford 代数 $C(4,0)$ 的“费米”自由度的矩阵表示为:

$$C_4=\begin{pmatrix} & I\\ I & \end{pmatrix},\quad C_m=\begin{pmatrix} & i\sigma_m\\ -i\sigma_m & \end{pmatrix},\quad \bar{m}=1,2,3. \tag{37}$$

则超对称 Hamilton 量,式(35)可写成

$$\begin{aligned}
2H=&\,p^2+k^2W^2+\left(\frac{W'}{2W}\right)^2\\
&+\begin{pmatrix}
-\left(\frac{W'}{2W}\right)' & & & \\
 & -\left(\frac{W'}{2W}\right)' & & \\
 & & \left(\frac{W'}{2W}\right)'+2k_3W' & 2k^-W'\\
 & & 2k^+W' & \left(\frac{W'}{2W}\right)'-2k_3W'
\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{38}$$

1) 当 $k_{\bar{n}}=0$ $(\bar{n}=1,2,3)$ 时,(38)式变为

$$2H = p^2 + \left(\frac{W'}{2W}\right)^2 + \left(\frac{W'}{2W}\right)'\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

它与由下述超荷构成的$N=2$超对称量子力学系统的超对称 Hamilton 量有相同的形式，

$$Q^{\pm} = \left[p \pm i\left(\frac{W'}{2W}\right)'\right]\sigma^{\pm}\otimes I. \tag{40}$$

2) 当 $k^{\pm}=0$ 时，不失一般性，并取 $k_3=1$，则(34)、(38)式就化为 Pashnev[4] 的形式。

3) 当 $k_{\bar{n}} \neq 0$ $(\bar{n}=1,2,3)$ 的一般情况下，可以利用幺正矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2\,|k^+|}}\begin{pmatrix} ik^+ & i|k^+| \\ |k^+| & -k^- \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{41}$$

对(38)式进行相似变换，得到对角化了的超对称 Hamilton 量

$$2\widetilde{H} = T(2H)T^{-1} = p^2 + k^2W^2 + \left(\frac{W'}{2W}\right)^2$$

$$+\begin{pmatrix} -\left(\frac{W'}{2W}\right)' & & & \\ & -\left(\frac{W'}{2W}\right)' & & \\ & & \left(\frac{W'}{2W}\right)' + 2(k_3+|k^+|)W' & \\ & & & \left(\frac{W'}{2W}\right)' - 2(k_3+|k^+|)W' \end{pmatrix}. \tag{42}$$

相应地，$\widetilde{H}$ 的 4 分量旋量波函数 $\psi(x)$ 与H的 4 分量旋量波函数 $\varphi(x)$ 之间满足

$$\psi(x) = T\varphi(x). \tag{43}$$

3.2 三维情形的一种实现

取

$$\boldsymbol{A} = -i\alpha\nabla + \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{D} = -i\beta\nabla + \boldsymbol{K}, \tag{44}$$

其中∇为三维 Laplace 算子；$L_{\bar{m}}, K_{\bar{m}}$ $(\bar{m}=1,2,3)$，A_4, D_4 均为坐标 $\boldsymbol{x}$ 的函数；并取 $\alpha^2+\beta^2=1$ 以保证动能项符合习惯的形式。

约束条件(23)式要求

$$\nabla\times\boldsymbol{L} = -\nabla A_4, \quad \boldsymbol{K} = \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{L},$$
$$D_j = \frac{\beta}{\alpha}A_j, \quad j=1,2,3,4. \tag{45}$$

因此超荷为:

$$
\begin{aligned}
Q^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[A_2C_1 - A_1C_2 + A_4C_3 - A_3C_4]\left[1 + i\frac{\beta}{\alpha}C_1C_2C_3C_4\right], \\
Q^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[A_3C_1 - A_4C_2 - A_1C_3 + A_2C_4]\left[1 + i\frac{\beta}{\alpha}C_1C_2C_3C_4\right], \\
Q^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[A_4C_1 + A_3C_2 - A_2C_3 - A_1C_4]\left[1 + i\frac{\beta}{\alpha}C_1C_2C_3C_4\right], \\
Q^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3 + A_4C_4]\left[1 + i\frac{\beta}{\alpha}C_1C_2C_3C_4\right].
\end{aligned} \tag{46}
$$

超对称 Hamilton 量为

$$
2H = \left(\boldsymbol{P} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{L}\right)^2 + \frac{1}{\alpha^2}A_4^2 + \frac{2}{\alpha}(\nabla \times \boldsymbol{L}) \cdot \boldsymbol{S}, \tag{47}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
S_1 &= F_{14} + F_{32} = \frac{i}{2}(C_1C_4 + C_3C_2) = \frac{1-\sigma_3}{2} \otimes \sigma_1, \\
S_2 &= F_{24} + F_{13} = \frac{i}{2}(C_2C_4 + C_1C_3) = \frac{1-\sigma_3}{2} \otimes \sigma_2, \\
S_3 &= F_{34} + F_{21} = \frac{i}{2}(C_3C_4 + C_2C_1) = \frac{1-\sigma_3}{2} \otimes \sigma_3.
\end{aligned} \tag{48}
$$

可以看出这种实现与 $D_i = 0$ 的情况并无本质上的区别.

3.3 三维情形的另一种实现

取

$$
A_4 = (-i\nabla + \boldsymbol{L}) \cdot \boldsymbol{\tau}, \ D_4 = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\tau}, \ \boldsymbol{D} = 0, \tag{49}
$$

$A_{\bar n}, L_{\bar n}, K_{\bar n}$ ($\bar n = 1,2,3$) 均为坐标的函数。 其中 $\tau_{\bar m}(\bar m = 1, 2, 3)$ 为另一组 Pauli 矩阵,但满足

$$
[\tau_{\bar m}, C_j] = 0. \tag{50}
$$

也就是说, $\tau_{\bar m}, C_j$ 分别实现为:

$$
\tau_{\bar m} \sim I_{4\times4} \otimes \tau_{\bar m}, \quad C_j \sim C_j \otimes I_{2\times2}. \tag{51}
$$

约束条件(23)式要求

$$
2A_{\bar m}K_{\bar n} = \partial_{\bar n}A_{\bar m}, \quad \bar m, \bar n = 1,2,3, \tag{52}
$$

其中 $\partial_{\bar n}$ 为 ∇ 的第 $\bar n$ 个分量. 满足方程(52)的解为

$$
A_{\bar m} = k_{\bar m}W, \ \bar m = 1,2,3, \tag{53}
$$

其中 $k_{\bar m}$ 为常数;W为坐标的函数. 从而

$$
\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}\nabla \ln W = \frac{\nabla W}{2W}, \quad \nabla \times \boldsymbol{K} = 0. \tag{54}
$$

同样选"费米"自由度的矩阵表示(37)式,得到超对称 Hamilton 量为

$$
\begin{aligned}
2H = & (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{L})^2 + k^2W^2 + \left(\frac{\nabla W}{2W}\right)^2 + \nabla\cdot\left(\frac{\nabla W}{2W}\right)\begin{pmatrix}-I & \\ & I\end{pmatrix} \\
& + \left[\nabla\times\boldsymbol{L} - \left(\frac{\nabla W}{2W}\right)\times(-i\nabla+\boldsymbol{L})\right]\cdot\boldsymbol{\tau}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

不难看出，在三维情形的这种实现中，超对称 Hamilton 量包含轨道——自旋耦合项。

附　　录

这里的 Clifford 代数 $C(r,0)$ 已经引入了阶化结构和换位运算，成为李超代数。阶化结构为：

$$C(r,0) = C_+ \oplus C_-$$

其中 $C_+(C_-)$ 为偶(奇)空间，即由偶(奇)数个 C_i 的乘积所张成的空间。换位运算定义为：

$$\langle x,y\rangle = \begin{cases}[x,y] = xy - yx & \text{当 } x \text{ 或 } y\in C_+ \\ \{x,y\} = xy + yx & \text{当 } x \text{ 与 } y \in C_-.\end{cases}$$

超荷 Q^a 应为 $C(r,0)$ 中的奇元素。在 $r=4$ 的情形下，C_- 由 C_i 和 $C_jC_kC_l$ $(i=1, 1\leqslant j<k<l\leqslant 4)$ 张成，所以(4)式是 Q^a 的合理的和一般的表达式。

关于 Clifford 代数和李超代数可参阅：

万哲先：《李代数》科学出版社 1964 年第一版，第十二章；

孙洪洲，韩其智：《李超代数综述》，《物理学进展》1983 年第 3 卷第 1 期 81 页。

参　考　文　献

[1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B185**(1981)513.
[2] P. Solomonson, J. W. Van Holten, *Nucl. Phys.*, **B196**(1982)262; F. Cooper, B. Freedman, *Ann. Phys.* (N. Y.), **146**(1988)262; C. V. Sukumar, *J. Phys.*, **A18**(1985)2917; 2937. R. Roy, R. Roychoudhury, *Phys. Lett.*, **A122**(1987)275; H. Ui, *Prog. Theor. Phys.*, **72**(1984)813, 192.
[3] M. De Crombrugghe, V. Rittenberg, *Ann. Phys.* (N. Y.), **51**(1983)99.
[4] A. I. Pashnev, *Teor. Mat. Fiz.* (Sov), **69**(1986)311; V. P. Berezovj, A. I. Pashnev, *Z. Phys.*, **C51**(1991)525.

$N=4$ Supersymmetric Quantum Mechanics

Huang Weicheng　　Ruan Dong
(Department of Physics, Xinjiang University, Urumqi, 830046)

Received 27 June 1994

Abstract

In this paper, the general structure of the $N=4$ supersymmetric quantum mechanical system is given using the Clifford algebra. Some examples of its application are discussed.

Key words　supersymmetry, supersymmetric quantum mechanics, Clifford algebra.