第19卷 第3期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 3
1995年3月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1995

利用 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数的两参数变形振子实现讨论 $SU(2)_{q,s}$ 相干态

于肇贤[1)] 刘业厚 李庆林 梁碧芳
(大庆石油学院 黑龙江省安达市 151400)

1993-09-08 收稿

摘　　要

利用 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数的两参数变形振子实现构造出与 Perelomov 相干态形式不同的 $SU(2)_{q,s}$ 相干态. 证明了 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数的表示基是正交的, 并讨论了它的相干态的归一性和完备性. 指出 $SU(2)_{q,s}$ 相干态的相干性受参数 q,s 的影响,它比单参数变形 $SU(2)_q$ 相干态更具一般性.

关键词 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数,变形振子,完备性关系.

1 引　言

最近,郝三如[1]利用 $SU(2)_q$ 量子代数的 q 变形振子实现构造出 $SU(2)_q$ 的相干态. 井思聪[2]研究了两参数变形的量子代数,构造了 Perelomov 相干态. 本文利用 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数的两参数变形振子实现构造出与 Perelomov 相干态形式不同的 $SU(2)_{q,s}$ 相干态,研究了该相干态的性质, 并给出了 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数在该相干态下的测不准关系.

2 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数与 $SU(2)_{q,s}$ 相干态的构造

定义两参数变形的振子为

$$a'^{\dagger}a' = [N']_{q,s},\quad a'a'^{\dagger} = [N'+1]_{q,s},\quad [N',a'^{\dagger}] = a'^{\dagger},\quad [N',a'] = -a'. \tag{1}$$

式中记号 $[x]_{q,s} = s^{1-x}[x]_q = s^{1-x}(q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, x 可以是算符或普通的数.

两参数变形的振子 $a'^{\dagger}$ 与 a' 满足如下的对易关系

$$a'a'^{\dagger} - s^{-1}qa'^{\dagger}a' = (sq)^{-N'},\quad a'a'^{\dagger} - (sq)^{-1}a'^{\dagger}a' = (s^{-1}q)^{N'}. \tag{2}$$

利用两个独立的变形振子 $a_1'^{\dagger}, a_1'$ 与 $a_2'^{\dagger}, a_2'$,有

$$a_1'^{\dagger}a_1' = [N_1']_{q,s},\quad a_1'a_1'^{\dagger} = [N_1'+1]_{q,s}, \tag{3}$$

$$a_2'^{\dagger}a_2' = [N_2']_{q,s^{-1}},\quad a_2'a_2'^{\dagger} = [N_2'+1]_{q,s^{-1}}. \tag{4}$$

可将 $SU(2)_{q,s}$ 的生成元写为

1) 通讯联系人: 山东胜利油田职工大学,东营 257004.

$$J'_+ = a_1'^{\dagger} a_2', \quad J'_- = a_2'^{\dagger} a_1', \quad J'_0 = \frac{1}{2}(N'_1 - N'_2). \tag{5}$$

它们满足对易关系

$$[J'_0, J'_\pm] = \pm J'_\pm, \quad s^{-1} J'_+ J'_- - s J'_- J'_+ = s^{-2J'_0}[2J'_0]_q. \tag{6}$$

显然,当变形参数 $q = s = 1$ 时,(6)式退化为普通 $SU(2)$ Lie 代数的对易关系

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_0. \tag{7}$$

其中 $J_0, J_\pm$ 是 $SU(2)$ Lie 代数的生成元.

(1) 式所定义的两参数变形振子的 Hilbert 空间基矢为

$$|n\rangle' = \frac{(a'^{\dagger})^n}{\sqrt{[n]_{q,s}!}}|0\rangle. \tag{8}$$

在这组基矢上,算符 $a'^{\dagger}, a'$ 与 N' 的作用分别为

$$a'^{\dagger}|n\rangle' = \sqrt{[n+1]_{q,s}}|n+1\rangle', \tag{9}$$

$$a'|n\rangle' = \sqrt{[n]_{q,s}}|n-1\rangle', \tag{10}$$

$$N'|n\rangle' = n|n\rangle'. \tag{11}$$

利用这组基矢,对于每一个量子数 $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots$,量子代数 $SU(2)_{q,s}$ 的么正不可约表示的基矢为

$$|j, m\rangle' = \frac{(a_1'^{\dagger})^{j+m}(a_2'^{\dagger})^{j-m}}{\sqrt{[j+m]_{q,s}![j-m]_{q,s^{-1}}!}}|0_1, 0_2\rangle. \tag{12}$$

其中基态 $|0_1, 0_2> = |0_1> \otimes |0_2>$,m 是整数或半整数, $-j \leqslant m \leqslant j$. 在这组基上,生成元 J'_0, $J'_\pm$ 的作用为

$$J'_+|j, m\rangle' = \sqrt{[j-m]_{q,s^{-1}}[j+m+1]_{q,s}}|j, m+1\rangle', \tag{13}$$

$$J'_-|j, m\rangle' = \sqrt{[j+m]_{q,s}[j-m+1]_{q,s^{-1}}}|j, m-1\rangle', \tag{14}$$

$$J'_0|j, m\rangle' = m|j, m\rangle'. \tag{15}$$

显然, $|j, m\rangle'$ 构成 $SU(2)_{q,s}$ 代数(6)式的一组表示.

引入记号 $e^x_{q,s,s^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{[n]_{q,s}![n]_{q,s^{-1}}!}}$, 定义一个形式与 Perelomov 相干态不同的新的量子态

$$|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}} = \frac{e^{ZJ'_+}_{q,s,s^{-1}}}{(B_j(|Z|^2))^{\frac{1}{2}}}|j, -j\rangle'. \tag{16}$$

根据(13)、(14)两式可得

$$J'_+|j, -j\rangle' = \sqrt{[2j]_{q,s^{-1}}[1]_{q,s}}|j, -j+1\rangle', \tag{17}$$

$$(J'_+)^n|j, -j\rangle' = \binom{2j}{n}^{\frac{1}{2}}_{q,s^{-1}} \sqrt{[n]_{q,s}![n]_{q,s^{-1}}!}\,|j, -j+n\rangle'. \tag{18}$$

式中记号

$$\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}} = \frac{[2j]_{q,s^{-1}}!}{[2j-n]_{q,s^{-1}}![n]_{q,s^{-1}}!}. \tag{19}$$

注意到 $J'_+|j,j\rangle'=0$,则量子态(16)可写成

$$|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}=(B_j(|Z|^2))^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{2j}\binom{2j}{n}^{\frac{1}{2}}_{q,s^{-1}}Z^n|j,-j+n\rangle'. \tag{20}$$

(16)和(20)两式中的 $B_j(|Z|^2)$ 是为了后面的方便而引入的归一化系数。它可以通过 ${}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}=1$ 而确定。为了确定归一化系数 $B_j(|Z|^2)$,先证明集合 $\{|j,m\rangle'\}$ 的正交归一化性质。利用(12)式可得

$$\begin{aligned}'\langle j,m|j,m'\rangle'=&\{[j-m]_{q,s^{-1}}![j+m]_{q,s}![j+m']_{q,s}![j-m']_{q,s^{-1}}!\}^{-\frac{1}{2}}\\&\cdot\langle 0_1,0_2|(a'_2)^{j-m}(a'_1)^{j+m}(a'^{\dagger}_1)^{j+m'}(a'^{\dagger}_2)^{j-m'}|0_1,0_2\rangle\\=&\{[j-m]_{q,s^{-1}}![j+m]_{q,s}![j+m']_{q,s}![j-m']_{q,s^{-1}}!\}^{-\frac{1}{2}}\\&\cdot\langle 0_2|(a'_2)^{j-m}(a'^{\dagger}_2)^{j-m'}|0_2\rangle\cdot\langle 0_1|(a'_1)^{j+m}(a'^{\dagger}_1)^{j+m'}|0_1\rangle.\end{aligned} \tag{21}$$

由(3)、(4)两式以及 $a'_1|0_1\rangle=0$ 和 $a'_2|0_2\rangle=0$ 可知,(21)式只有在 $m=m'$ 时才不为零,即(21)式是正交的。利用数学归纳法不难证明有以下两等式成立:

$$\langle 0_1|(a'_1)^n(a'^{\dagger}_1)^n|0_1\rangle=[n]_{q,s}!, \tag{22}$$

$$\langle 0_2|(a'_2)^n(a'^{\dagger}_2)^n|0_2\rangle=[n]_{q,s^{-1}}!. \tag{23}$$

由(22)、(23)可得

$$\langle 0_1|(a'_1)^{j+m}(a'^{\dagger}_1)^{j+m'}|0_1\rangle=[j+m]_{q,s}!\,\delta_{m,m'}, \tag{24}$$

$$\langle 0_2|(a'_2)^{j-m}(a'^{\dagger}_2)^{j-m'}|0_2\rangle=[j-m]_{q,s^{-1}}!\,\delta_{m,m'}. \tag{25}$$

代入(21)式得

$$'\langle j,m|j,m'\rangle'=\delta_{m,m'}. \tag{26}$$

这样就可以由归一化条件

$${}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}=1. \tag{27}$$

得到归一化系数

$$B_j(|Z|^2)=\sum_{n=0}^{2j}\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}(|Z|^2)^n. \tag{28}$$

3 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 量子态的性质

本节讨论 $SU(2)_{q,s}$ 相干态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 的相交性和完备性。

由(20)式,可得

$$\begin{aligned}{}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z'|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}=&(B_j(|Z'|^2)B_j(|Z|^2))^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{2j}\sum_{m=0}^{2j}\binom{2j}{n}^{\frac{1}{2}}_{q,s^{-1}}\\&\cdot\binom{2j}{m}^{\frac{1}{2}}_{q,s^{-1}}\bar{Z}'^nZ^m\cdot{}'\langle j,-j+n|j,-j+m\rangle'\\=&(B_j(|Z'|^2)B_j(|Z|^2))^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{2j}\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}(Z\bar{Z}')^n.\end{aligned} \tag{29}$$

(29)式表明,量子态$|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$满足相干态不相交的性质。为了构造 $SU(2)_{q,s}$ 相干态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$的完备性公式,我们定义 $P_{q,s,s^{-1}}(n,Z)$ 为在量子态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 中观察到 $|j,-j+n\rangle'$ 的概率。即有

$$P_{q,s,s^{-1}}(n,Z)=|'\langle j,-j+n|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}|^2=\frac{\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}(|Z|^2)^n}{B_j(|Z|^2)}. \tag{30}$$

令 $P_{q,s,s^{-1}}(n)\equiv\int P_{q,s,s^{-1}}(n,Z)\mathrm{d}Z^2$,并让 ρ 表示 $|j,-j+n\rangle'$的密度矩阵。即

$$\rho=\sum_{n=0}^{2j}P_{q,s,s^{-1}}(n)|j,-j+n\rangle''\langle j,-j+n|. \tag{31}$$

这样,(20)式表示的量子态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 的完备性公式应为

$$\frac{1}{\pi}\rho^{-1}\int|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}{}_{q,s,s^{-1}}{}^j\langle Z|\mathrm{d}Z^2=1. \tag{32}$$

为了证明(32)式,令 $Z=re^{i\theta}$,注意到(28)式中的 $B_j(r^2)$ 仅是 r^2 的函数,由此得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\rho^{-1}\int\mathrm{d}Z^2|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}\ {}_{q,s,s^{-1}}{}^{j}\langle Z|\\&=\frac{1}{\pi}\rho^{-1}\sum_{n=0}^{2j}\sum_{m=0}^{2j}\binom{2j}{n}^{\frac12}_{q,s^{-1}}\binom{2j}{m}^{\frac12}_{q,s^{-1}}\int\frac{Z^n\bar Z^m}{B_j(|Z|^2)}|j,-j+n\rangle''\langle j,-j+m|\mathrm{d}Z^2\\&=\rho^{-1}\sum_{n=0}^{2j}\int\frac{\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}x^n}{B_j(x)}\mathrm{d}x\cdot|j,-j+n\rangle''\langle j,-j+n|\\&=\rho^{-1}\sum_{n=0}^{2j}P_{q,s,s^{-1}}(n)|j,-j+n\rangle''\langle j,-j+n|=1.\end{aligned}$$

4 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数在量子态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 下的测不准关系

利用量子态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$,可以计算 $SU(2)_{q,s}$ 代数元 $J'_\pm$ 和 J'_0 在 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 下的平均值、均方差以及代数元之间的测不准关系。由(13)、(14)、(15)式得

$$J'_+|j,-j+n\rangle'=\sqrt{[2j-n]_{q,s^{-1}}[n+1]_{q,s}}|j,-j+n+1\rangle', \tag{33}$$

$$J'^2_+|j,-j+n\rangle'=\sqrt{[2j-n]_{q,s^{-1}}[2j-n-1]_{q,s^{-1}}[n+1]_{q,s}[n+2]_{q,s}}|j,-j+n+2\rangle', \tag{34}$$

$$J'_-|j,-j+n\rangle'=\sqrt{[n]_{q,s}[2j-n+1]_{q,s^{-1}}}|j,-j+n-1\rangle', \tag{35}$$

$$J'^2_-|j,-j+n\rangle'=\sqrt{[n]_{q,s}[n-1]_{q,s}[2j-n+1]_{q,s^{-1}}[2j-n+2]_{q,s^{-1}}}|j,-j+n-2\rangle', \tag{36}$$

$$J'_-J'_+|j,-j+n\rangle'=[n+1]_{q,s}[2j-n]_{q,s^{-1}}|j,-j+n\rangle', \tag{37}$$

$$J'_+J'_-|j,-j+n\rangle'=[n]_{q,s}[2j-n+1]_{q,s^{-1}}|j,-j+n\rangle'. \tag{38}$$

则有

$$\begin{aligned}\langle J'^2_+\rangle&={}_{q,s,s^{-1}}{}^j\langle Z|J'^2_+|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}\\&=[2j]_{q,s^{-1}}[2j-1]_{q,s^{-1}}s^{-2m-1}\bar Z^2\frac{B_{j-1}(|Z|^2)}{B_j(|Z|^2)}.\end{aligned} \tag{39}$$

$$\langle J_-'^2\rangle \equiv {}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|J_-'^2|Z\rangle_{q,s,s^{-1}}^{j}$$
$$= [2j]_{q,s^{-1}}[2j-1]_{q,s^{-1}}s^{3-2m}Z^2B_{j-1}(|Z|^2)/B_j(|Z|^2). \tag{40}$$
$$\langle J_+'\rangle \equiv {}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|J_+'|Z\rangle_{q,s,s^{-1}}^{j}$$
$$= [2j]_{q,s^{-1}}s^{-m}\bar{Z}B_{j-\frac{1}{2}}(|Z|^2)/B_j(|Z|^2). \tag{41}$$
$$\langle J_-'\rangle \equiv {}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|J_-'|Z\rangle_{q,s,s^{-1}}^{j}$$
$$= [2j]_{q,s^{-1}}s^{1-m}ZB_{j-\frac{1}{2}}(|Z|^2)/B_j(|Z|^2). \tag{42}$$
$$\langle J_0'\rangle \equiv {}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|J_0'|Z\rangle_{q,s,s^{-1}}^{j}$$
$$= -j+\frac{1}{2}|Z|\frac{\partial}{\partial|Z|}\ln B_j(|Z|^2). \tag{43}$$
$$\langle J_-'J_+'\rangle \equiv {}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|J_-'J_+'|Z\rangle_{q,s,s^{-1}}^{j}$$
$$= \sum_{n=0}^{2j}(B_j(|Z|^2))^{-1}\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}|Z|^{2n}[n+1]_{q,s}[2j-n]_{q,s^{-1}}. \tag{44}$$
$$\langle J_+'J_-'\rangle \equiv {}_{q,s,s^{-1}}^{\;j}\langle Z|J_+'J_-'|Z\rangle_{q,s,s^{-1}}^{j}$$
$$= \sum_{n=0}^{2j}(B_j(|Z|^2))^{-1}\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}|Z|^{2n}[n]_{q,s}[2j-n+1]_{q,s^{-1}}. \tag{45}$$

两参数 q,s 变形后 $SU(2)_{q,s}$ 的代数元 $J_\pm'=J_1'\pm iJ_2'$. 利用 $SU(2)_{q,s}$ 代数的生成元与 $SU(2)_q$ 代数的生成元之间的关系[2]:

$$J_+'=s^{\frac{1}{2}}s^{-J_0}J_+,\quad J_-'=s^{-\frac{1}{2}}s^{-J_0}J_-,\quad J_0'=J_0. \tag{46}$$

可以得到

$$[J_1',J_2']=i\frac{1}{2}s^{-2J_0}[2J_0]_q. \tag{47}$$

(47)式对应的测不准关系为

$$\langle\Delta J_1'^2\rangle\langle\Delta J_2'^2\rangle\geqslant\frac{1}{16}\langle s^{-2J_0}[2J_0]_q\rangle^2. \tag{48}$$

由(39)—(45)等式，有

$$\langle J_1'^2\rangle=[2j]_{q,s^{-1}}[2j-1]_{q,s^{-1}}(s^{-2m-1}\bar{Z}^2+s^{3-2m}Z^2)B_{j-1}(|Z|^2)/B_j(|Z|^2)$$
$$+\sum_{n=0}^{2j}(B_j(|Z|^2))^{-1}\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}|Z|^{2n}([n+1]_{q,s}[2j-n]_{q,s^{-1}}$$
$$+[n]_{q,s}[2j-n+1]_{q,s^{-1}}). \tag{49}$$
$$\langle J_2'^2\rangle=-\frac{1}{4}\{[2j]_{q,s^{-1}}[2j-1]_{q,s^{-1}}(s^{-2m-1}\bar{Z}^2+s^{3-2m}Z^2)B_{j-1}(|Z|^2)/B_j(|Z|^2)\}$$
$$+\frac{1}{4}\Big\{\sum_{n=0}^{2j}(B_j(|Z|^2))^{-1}\binom{2j}{n}_{q,s^{-1}}|Z|^{2n}([n+1]_{q,s}[2j-n]_{q,s^{-1}}$$
$$+[n]_{q,s}[2j-n+1]_{q,s^{-1}})\Big\}. \tag{50}$$
$$\langle J_1'\rangle=[2j]_{q,s^{-1}}(s^{-m}\bar{Z}+s^{1-m}Z)B_{j-\frac{1}{2}}(|Z|^2)/B_j(|Z|^2). \tag{51}$$
$$\langle J_2'\rangle=-\frac{i}{2}[2j]_{q,s^{-1}}(s^{-m}\bar{Z}-s^{1-m}Z)B_{j-\frac{1}{2}}(|Z|^2)/B_j(|Z|^2). \tag{52}$$

注意到

$$\langle\Delta J_1'^2\rangle = \langle J_1'^2\rangle - \langle J_1'\rangle^2,\ \langle\Delta J_2'^2\rangle = \langle J_2'^2\rangle - \langle J_2'\rangle^2. \tag{53}$$

将(49)—(53)代入(48)式，原则上总能找到确定的参数 q,s，使得(48)式两边取等号或近似相等. 这样，$|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 即为 $SU(2)_{q,s}$ 的相干态. 还可以发现，相干态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 受两参数 q,s 的调制. 可以预见，在相干态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 下，J_1,J_2 分量可以存在压缩效应，其压缩效应随 q,s 变化. 关于 $SU(2)_{q,s}$ 相干态的量子统计性质，我们将另文讨论.

5 结 束 语

利用两参数变形振子实现的 $SU(2)_{q,s}$ 量子代数可以构造出新的相干量子态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$，该态具有不正交性和归一性. $SU(2)_{q,s}$ 量子态 $|Z\rangle^j_{q,s,s^{-1}}$ 的相干性受参数 q,s 的调制. 从本文的讨论不难发现，当 $s\to 1$ 时，$SU(2)_{q,s}$ 量子代数退化为 $SU(2)_q$ 量子代数，本文是文献[1]讨论的 $SU(2)_q$ 量子代数在两参数下的推广.

参 考 文 献

[1] 郝三如，物理学报，**42**(1993)691.
[2] 井思聪，中国科学技术大学学报，**23**(1993)55.

Study of $SU(2)_{q,s}$ Coherent State by Using (q,s) Deformed Harmonic Oscillators of $SU(2)_{q,s}$ Quantum Algebra

Yu Zhaoxian Liu Yehou Li Qinglin Liang Bifang
(*Daqing Petroleum Institute, Anda, Heilongjiang* 151400)

Received 8 September 1993

Abstract

The $SU(2)_{q,s}$ coherent state different from Perelomov coherent state is constructed by using the (q,s) deformed harmonic oscillators of the $SU(2)_{q,s}$ quantum algebra. It is shown that the basis function of the $SU(2)_{q,s}$ quantum algebra is orthogonal. The completeness and normalization property of the $SU(2)_{q,s}$ coherent state is studied. It is pointed out that the coherent property of the $SU(2)_{q,s}$ coherent state is affected by q,s parameters, and this is more general than the case of the single parameter $SU(2)_q$ coherent state.

Key words $SU(2)_{q,s}$ quantum algebra, deformed harmonic oscillators, completeness relation.