

# $SU(2) \times SU(2)$ 格点手征模型的 进一步研究\*

黄良鑫 李 红 陈天仑

(南开大学物理系, 天津 300071)

1994-01-14 收稿

## 摘 要

本文利用变分-累积展开方法将  $SU(2) \times SU(2)$  格点手征模型的自由能展开到第五级, 分别用主值法和聚点法 (accumulation point) 确定变分参数, 结果表明后者能得到与蒙特卡罗模拟更为一致的内能和比热曲线。

**关键词** 变分-累积展开, 聚点, 手征模型, 相结构。

## 1 引 言

Migdal<sup>[1]</sup>, Polyakov 以及 Green<sup>[2]</sup> 等人指出, 二维  $SU(N) \times SU(N)$  手征自旋模型与四维  $SU(N)$  格点规范模型具有许多物理上的类似与对应。比如两者的格点 Schwinger-Dyson 方程是类似的, 都有渐近自由, 它们的实空间重整化递推关系都是相同的, 因而具有相似的  $\beta$  函数行为等。此外它们的相似性也被一系列的蒙特卡罗模拟所证实。由于手征模型较之于规范模型更为简单, 研究简单的手征自旋模型能使我们了解许多关于复杂的规范模型的性质和特点。

由于蒙特卡罗模拟仅是一种数值模拟方法, 前面的工作<sup>[3]</sup>, 借助于变分-累积展开方法研究了二维  $SU(2) \times SU(2)$  自旋手征模型的相结构, 通过展开到第四级, 结果显示了这种模型与四维  $SU(2)$  格点规范模型相结构上的相似性。但是也存在一些数值上的差异。例如比热峰的位置与蒙特卡罗模拟结果还有较大的偏差。为了得到与蒙特卡罗模拟更为吻合的结果, 一般说来, 人们寄希望于更高级的累积展开以及对确定变分参数方法的修正等。本文的工作是: 利用变分-累积展开方法, 将系统的自由能展开到第五级, 分别利用主值法和聚点法确定变分参数, 且将计算的结果与蒙特卡罗数值模拟的结果加以比较。

## 2 主值法分析

格点手征自旋模型是将场量定义在格点上, 且仅考虑最近邻相互作用。对于  $SU(2) \times SU(2)$  格点手征自旋模型, 其作用量可表示成:

\* 此工作受到国家自然科学基金以及国家教委博士点基金的资助。

$$S = \frac{\beta}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \text{tr}(U_i U_j^\dagger + U_j^\dagger U_i - 2) = \beta \sum \text{tr}(U_i U_i^\dagger - 1), \quad (1)$$

其中 $\langle ij \rangle$ 表示对所有最近邻对求和,  $U_i \in SU(2)$  是  $2 \times 2$  的么正么模矩阵. 试探作用量选为:

$$S_0 = \frac{1}{2} J \sum_l \text{tr}(U_l + U_l^\dagger) = J \sum_l \text{tr} U_l, \quad (2)$$

相应的配分函数为:

$$Z_0 = e^{-W_0} = \int [dU] e^{S_0} = [I_1(2J)]^{N_i}, \quad (3)$$

其中  $N_i$  为格点数,  $W_0$  为试探系统的自由能,  $I_n$  为  $n$  阶修正贝塞尔函数. 这样, 真实系统的配分函数可表示为:

$$\begin{aligned} Z &= e^{-W} = \int [dU] e^S = \int [dU] e^{S-S_0} e^{S_0} = Z_0 \langle S - S_0 \rangle_0 \\ &= \exp \left[ -W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S - S_0)^n \rangle_c \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

自由能

$$W = W_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (S - S_0)^n \rangle_c. \quad (5)$$

(4)式和(5)式中,  $\langle \dots \rangle_0$  和  $\langle \dots \rangle_c$  分别表示在试探系统中的统计平均和累积平均. 内能和比热的定义如前文[3], 即:

$$\begin{aligned} E &= \frac{dW}{d\beta}, \\ C &= -\beta^2 \frac{dE}{d\beta}. \end{aligned} \quad (6)$$

由此可知, 自由能的计算对于系统相结构的研究有直接的影响. 原则上讲, 按方程(5)可以得到不依赖于变分参数  $J$  的自由能的精确值, 但实际的计算只能做自由能的有限级近似. 一般说来, 为了得到更为精确的自由能, 人们希望计算更高级的修正项, 本文将自由能展开到第五级.

为了简化计算, 引入公式<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \langle S^n S_0^n \rangle_c &= J^n \frac{\partial^n}{\partial J^n} \langle S^n \rangle_c, \\ \langle S_0^n \rangle_c &= J^n \frac{\partial^n}{\partial J^n} \ln Z_0. \end{aligned} \quad (7)$$

在计算自由能时重点考虑  $\langle S^n \rangle_c$  项. 为了直观和方便, 仍采用文献[5]的图形规则.

事实上, 由于对自由能的展开形式作了有限的截断, 自由能的值依赖于变分参数  $J$  的选取, 变分参数直接影响到自由能展开形式(5)的收敛速度, 按照传统的主值法<sup>[3]</sup>, 由方程(4)得到:

$$W \leq W_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 = W_{\text{eff}} \quad (8)$$

由此可得到变分条件:

$$\frac{\delta W_{\text{eff}}}{\delta J} = 0 \quad \frac{\delta^2 W_{\text{eff}}}{\delta J^2} \geq 0 \quad (9)$$

或

$$2\beta d \frac{I_2(2J)}{I_1(2J)} - J = 0 \quad (10)$$

由此得到内能和比热展开到第五级的曲线,如图 1、2。

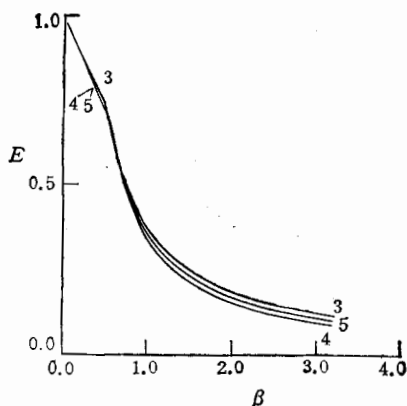


图 1 主值法得到的  $E-\beta$  曲线  
其中 3,4,5 分别为相应级的修正结果。

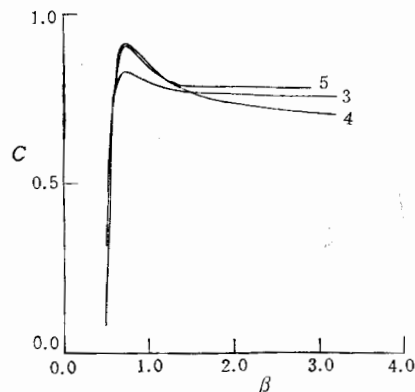


图 2 主值法得到的  $C-\beta$  曲线  
其中 3,4,5 分别为相应级的修正结果。

尽管将自由能作了更高级的修正,由于采用自由能主值变分方法,结果显示累积展开到第五级,其收敛速度较慢,并且从这种趋势来看,也不能寄希望于第六级乃至更高级的修正能带来令人十分满意的结果,因而进一步探索使累积展开收敛速度更快的变分参数的选取方法。

### 3 聚点分析

近些年来,一种纯经验性的确定变分参数的方法被 Kerler<sup>[6]</sup>等人提出并加以发展。基于累积展开,寻找各级展开的交汇点,或称之为聚点 (accumulation point),人们可以设想更高级的展开也将交于该点或该点附近,因而该点所确定的变分参数可认为是能使累积展开有最快的收敛速度。下面通过几幅典型的自由能的扫描图来说明在所研究的模型中如何寻找聚点并通过聚点来确定变分参数。

(i) 当  $\beta = 0.25$ , 各级自由能随变分参数的变化曲线被描绘在图 3(a)。可以发现,除第一级外,其余各级自由能曲线都几乎交于一点,因而可以得一个很简单的关系式:

$$W_n = W_0 \quad (n = 2, 3, 4, 5) \quad (11)$$

由这个关系式可以确定一组变分参数。

(ii) 图 3(b) 是  $\beta = 0.7$  时的一幅典型的扫描图。这幅图给出如下几点启示: (1)  $W_0$  仍然过  $W_n$  (此时  $n = 2, 4, 5$ ) 的交汇点,这说明式(11)在一定范围内是成立的,不过此时(11)式中  $n \neq 3$ ; (2) 除  $W_3$  外其余过相交点的自由能曲线均是偶数级的累积展开,这显示了物理量的偶数级累积展开在寻找聚点时的有效性<sup>[6]</sup>;从图中可以看到,第一级自由能曲线的最低点所对应的变分参数与聚点所对应的变分参数很接近,这说明主变分法所确

定的变分参数处于使累积展开有最佳收敛性的邻域内（如果聚点能得到累积展开的最佳收敛的话），这也许是通常在格点规范模型中使用主变分法来确定变分参数能得到较为令人满意的结果的缘故。

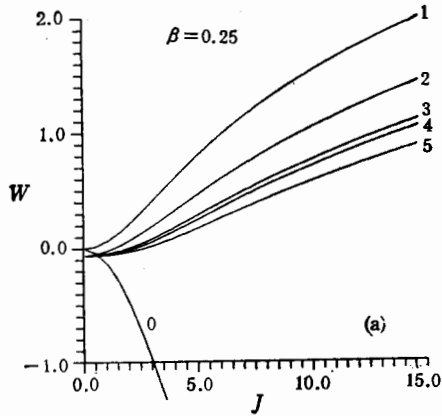


图 3(a)  $\beta = 0.25$  时  $W$ - $J$  扫描图  
其中 0,1,2,3,4,5 分别对应相应  
级的自由能曲线。

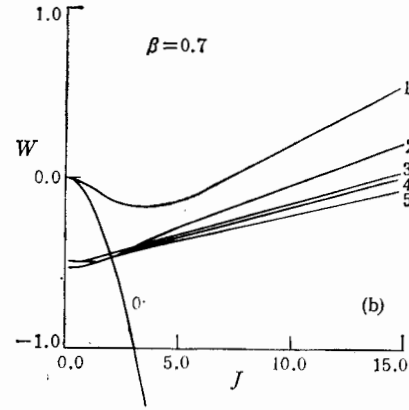


图 3(b)  $\beta = 0.7$  时  $W$ - $J$  扫描图

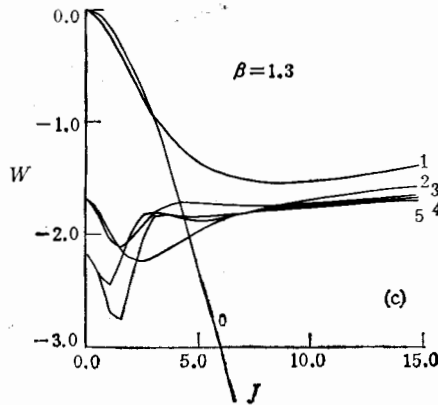


图 3(c)  $\beta = 1.3$  时  $W$ - $J$  扫描图

(iii) 图 3(c) 是另一幅典型的扫描图, 此时  $\beta = 1.3$ 。这幅扫描图有如下情形值得注意: (1)  $\beta$  较大时, 各级自由能曲线在较小的变分参数范围内出现振荡情形, 且自由能级数越高, 振荡越剧烈。但随着变分参数增加, 各级自由能曲线都逐渐变得平缓。尽管在振荡区内各级自由能曲线间有交点, 但由于自由能曲线的剧烈振荡, 这些相交点是很随意的, 且杂乱而无规律可寻, 更重要的是, 无法找到多条曲线同时相交于一点, 因而在振荡区内不能确定聚点; (2) 在曲线的平缓区内, 仍存在  $W_2, W_4, W_5$  的交点, 特别是这一点既包含低级的自由能曲线, 也包含有高级的自由能曲线, 因而这一点可被认为是聚点。但由于  $W_0$  已偏离这点, 因而(11)式在  $\beta$  较大时不再成立, 并且如果在整个耦合区内始终坚持(11)式的合理性, 从图 4 可以发现, 由这种关系决定的变分参数最终导致在弱耦合区内内

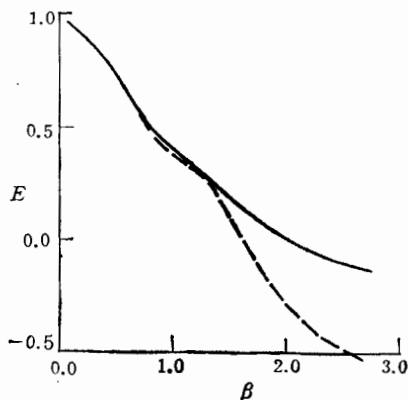


图 4 聚点法得到的  $E-\beta$  曲线  
其中实线和虚线分别表示由  $W_4 = W_0$  和  
 $W_5 = 0$  决定变分参数的结果。

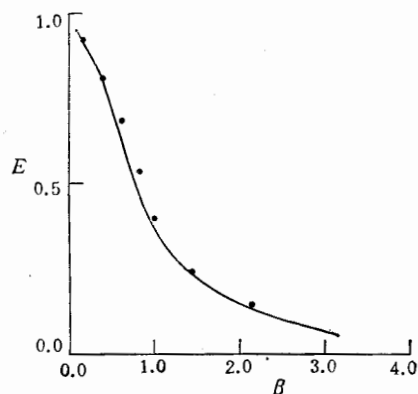


图 5 聚点法得到的  $E-\beta$  曲线  
其中变分参数由  $W_4 = W_0$  和  $W_4 = W_2$   
决定,点“·”表示蒙特卡罗值。

能的发散,这也进一步说明(11)式在弱耦合区内不再适用;(3)基于图 3(c)的聚点和自由能偶数级累积展开在寻找聚点时的有效性,本文选取关系式:

$$W_4 = W_2 \quad (12)$$

来决定变分参数,同时也试探性地使用关系式:

$$W_5 = W_4 \quad (13)$$

来决定变分参数。

从上面的分析可知,从强耦合区到过渡区和从过渡区到弱耦合区要分别采用(11)式(其中  $W_4$  可取  $W_4$  或  $W_5$ ,在我们的计算中选取  $W_4$ )和(12)式(或(13)式,我们的结果主要是采取(12)式)来确定变分参数,结果如图(5)和(6)。

## 4 结果与讨论

从图(5)可以看出,尽管我们分别采用了(11)式和(12)式来决定不同耦合区的变分参数,然而自由能曲线却相当光滑地联接,其结果与蒙特卡罗模拟值<sup>[7]</sup>相符,这说明用聚点法来确定变分参数是合理的,同时也说明在不同耦合区决定变分参数的关系的选取是合理的。从比热曲线来看,由图(2)可知,由主值法确定变分参数,尽管比热被修正到第五级,结果只有一个比热峰,其比热峰的位置分别为  $\beta_c = 0.734, 0.737, 0.739$  (相对于第三、四、五级修正),也就是说,随着修正级数的增加,其修正值相当小。而蒙特卡罗模拟结果显示这种模型存在两个比热峰<sup>[7]</sup>,其比热峰的位置分别为:  $\beta_{c_1} = 1.0$  和  $\beta_{c_2} = 3.18$ 。这说明主值法结果与蒙特卡罗结果至少存在两点差异:一是比热峰的个数;二是如果将主值法得到的比热峰相应于蒙特卡罗方法中的第一个比热峰(因为这两个比热峰位置更为接近),其比热峰位置仍有较大差异。而从聚点法的结果可

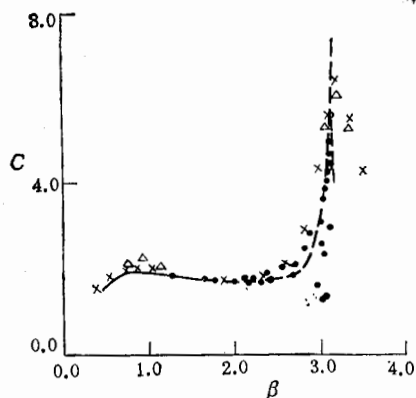


图 6 聚点法得到的  $C-\beta$  曲线  
其中实线和点“·”表示由  $W_4 = W_2$  决定变分参数的结果。虚线“-”表示那些点“·”的最佳拟合。三角符号“△”表示由  $W_5 = W_4$  决定变分参数时两比热峰位置,交叉号“x”表示蒙特卡罗值。

以看出,从过渡区到弱耦合区,无论是用(12)式还是(13)式确定变分参数,都能得到两个比热峰,用(12)式得到的两个比热峰的位置分别为  $\beta_{c_1} = 0.823$  和  $\beta_{c_2} = 3.12$ , 尽管在第二比热峰附近曲线有些波动(初步的分析认为,这种波动的原因是由于计算误差造成的),但第二个比热峰仍能很明显地表现出来。

由(13)式决定的变分参数导出的比热峰位置,其第一个比热峰位于  $\beta_{c_1} = 0.975$ , 第二个比热峰大约位于  $\beta_{c_2} = 3.15$ , 结果与蒙特卡罗模拟相当接近,但由于在第二比热峰附近,曲线的波动过大,仅可视为参考值。

从结果看,用聚点方法决定变分参数能得到收敛速度更快的累积展开,用这种方法只需计算累积展开到第四级就能得到优于主值法而累积展开到第五级甚至于更高级的结果。同时摆脱了在确定聚点时对蒙特卡罗值的依赖,而假定多条曲线的交点即为聚点,这使得变分-累积展开方法作为一种独立的解析方法更为合理。尽管聚点方法是纯经验性的,尚缺乏一定的理论基础,但从已有的工作来看,这种方法仍不失为一种寻找累积展开最优收敛点的办法。

### 参 考 文 献

- [1] A. Migdal, *ZhETF(USSR)* **69**(1975) 810.
- [2] A. Polyakov, *Phys. Lett.*, **B59**(1975)79.  
F. Green and S.Samuel, *Nucl. Phys.*, **B190**[FS3] (1981) 113.
- [3] L.X. Huang T.L. Chen, *Commun. Theor. Phys.*, **21**(1994)341.
- [4] X.T. Zheng, Z.G. Tan J. Wang, *Nucl. Phys.*, **B287**(1987) 171.
- [5] C. Hao, H.M.Wang Y.X. Song, *Commun. Theor. Phys.*, **12**(1989) 273.
- [6] W. Kerler, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1988) 1906.  
W. Kerler, *Phys. Rev.*, **D40**(1989)2085.
- [7] M. Caselle, *Z. Phys.*, **C28**(1985) 233.

## Further Study on $SU(2) \times SU(2)$ Lattice Chiral Model

Huang Liangxin    Li Hong    Chen Tianlun

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin 300071)

Received 14 January 1994

### Abstract

With the Variational-Cumulant Expansion method, the free energy of  $SU(2) \times SU(2)$  lattice chiral model is calculated to the 5th order correction. The variational parameter is determined by main variational method and accumulation point method, respectively. It is showed that more correspondent internal energy curves and specific heat curves with the MC results can be obtained by the latter one.

**Key words** variational-cumulant expansion, accumulation point, chiral model, phase structure.