第 19 卷 第 2 期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 2
1995 年 2 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1995

2 维 $O(3)$ 非线性 σ 模型的解析研究*

赵 佩 英
(中国科学院高能物理研究所　北京　100039)

1993-12-16 收稿

摘　　要

在格点规范理论中应用变分累积展开方法，解析计算了 2 维 $O(3)$ 非线性 σ 模型的内能和比热，并将计算结果和 Monte Carlo 数据进行了比较。

关键词　格点规范理论，$O(3)$ 非线性 σ 模型，变分累积展开，内能，比热。

$O(N)$ 非线性 σ 模型很早就引起了人们的重视，这是因为 Wegner 和 Migdal[1] 猜测 2 维 $O(N)$ 非线性 σ 模型与 4 维 $SU(N)$ 规范理论之间有很大的相似性，两者有相同的重整化群方程结构[2]，当 $N \geqslant 3$ 时，都是渐近自由的[3]，两者有同一类 Instanton[4]。因此对较为简单的 2 维 $O(N)$ 非线性 σ 模型的研究成为人们探求更为复杂的 4 维 $SU(N)$ 规范模型性质的重要手段。

2 维 $O(3)$ 非线性 σ 模型是最简单的自由场理论，目前已有几组人用 Monte Carlo 数值模拟方法[5]给出它的内能和比热。本文用解析的方法——变分累积展开的方法研究这个模型的性质，计算它的内能和比热。

把 $O(3)$ 非线性 σ 模型写到格点上，标准的作用量是具有 $O(3)$ 对称性质的自旋模型

$$S = -\beta \sum_{n} \sum_{\hat{\mu}=1}^{2} \boldsymbol{\sigma}(n) \boldsymbol{\sigma}(n+\hat{\mu}) \tag{1}$$

其中 $\beta = \dfrac{1}{T}$，$\hat{\mu}$ 是单位矢量，σ 是定义在格点 n 上的矢量，有三个分量

$$\sigma(n) = \begin{pmatrix} \sigma_1(n) \\ \sigma_2(n) \\ \sigma_3(n) \end{pmatrix}$$

并满足 $\sum\limits_{a=1}^{3} \sigma_a(n)\sigma_a(n) = 1$. 体系的配分函数

$$Z = \int [d\sigma] e^{-S} \tag{2}$$

自由能 F 定义为

* 国家自然科学基金资助.

$$F=-\frac{1}{N_i}\ln Z \tag{3}$$

这里 N_i 是格点上全部点的数目。

我们要计算每点的平均内能

$$E=\frac{\partial F}{\partial \beta} \tag{4}$$

和比热

$$c=\frac{\partial E}{\partial T} \tag{5}$$

配分函数 Z 的计算是很重要的，因为体系的其它物理量都可以通过它求出来。但要解析计算它是很困难的，为此引入等效作用量 $S_0(J)$

$$S_0=-\sum_i J_i\sigma_i \tag{6}$$

选取 J 作为变分参数，它是一个三维矢量

$$J=\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

原则上 J 与格点位置有关，作为一种近似，取各点的变分值相同。可以证明自由能 F 只与 $|J|$ 相关，与其方向无关。为了计算方便，取 J 在第一方向上，即 $|J|=J_1$，$J_2=J_3=0$，则等效作用量 S_0 变为

$$S_0=-\sum_i J_{1i}\sigma_{1i} \tag{7}$$

引入 S_0 后，配分函数可改写成

$$Z=Z_0\langle e^{S_0-S}\rangle_0=Z_0\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}K_n\right) \tag{8}$$

计算结果应与变分参数 J 无关，但由于实际计算时只能求得累积展开的有限项(本文取到 K_3 项)，为此通过取自由能极小值条件定出 J，再将确定的 J 代入所要计算的各物理量。(8)式中

$$Z_0\equiv\int[d\sigma]e^{-S_0}=(FI)^{N_i} \tag{9}$$

$$FI=\int d\sigma_i e^{J_i\sigma_i}$$

因为场的模是1，所以对于场的积分实际上是在单位球面上的积分。

$$FI=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi\sin\phi e^{J\cos\phi}$$
$$=4\pi\frac{\operatorname{sh}J}{J} \tag{10}$$

$$\langle\cdots\rangle_0\equiv\frac{1}{Z_0}\int[d\sigma]e^{-S_0}(\cdots)$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \langle S_0 - S \rangle_0 \\
&= \beta N_i d \langle \updownarrow \rangle_0 - N_i \langle \bullet \rangle_0 \\
K_2 &= \langle (S_0 - S)^2 \rangle_0 - \langle S_0 - S \rangle_0^2 \\
&= \beta^2 N_i d [\langle \updownarrow\updownarrow \rangle_0 - \langle \updownarrow \rangle_0^2] \\
&\quad + \beta^2 2N_i d(2d-1)[\langle \updownarrow\!\!\bullet\!\!\rightarrow\!\!\bullet \rangle_0 - \langle \updownarrow \rangle_0^2] \\
&\quad - \beta 4N_i d [\langle \updownarrow\!\bullet \rangle_0 - \langle \updownarrow \rangle_0 \langle \bullet \rangle_0] \\
&\quad + N_i [\langle \bullet\bullet \rangle_0 - \langle \bullet \rangle_0^2] \\
K_3 &= \cdots
\end{aligned} \tag{11}
$$

K_n[5] 中的每一项都是可解的，而且只有连接图形才有贡献．例如其中一些图形的贡献是

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \updownarrow_{i}^{j} \right\rangle_0 = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_0 = \langle \sigma_1 \rangle_0^2 \\
&\langle \underset{i}{\bullet} \rangle_0 = \langle J_i \sigma_i \rangle_0 = J \langle \sigma_1 \rangle_0 \\
&\left\langle \updownarrow\updownarrow_{i}^{j} \right\rangle_0 = \langle (\sigma_i \sigma_j)(\sigma_i \sigma_j) \rangle_0 = \langle \sigma_1^2 \rangle_0^2 + \langle \sigma_2^2 \rangle_0^2 + \langle \sigma_3^2 \rangle_0^2 \\
&\left\langle \updownarrow_{i}^{k}\!\!=\!\!=\!\!\bullet_j \right\rangle_0 = \langle (\sigma_i \sigma_j)(\sigma_i \sigma_j)(\sigma_i \sigma_k) \rangle_0 \\
&\qquad = \langle \sigma_1^3 \rangle_0 \langle \sigma_1^2 \rangle_0 \langle \sigma_1 \rangle_0 + \langle \sigma_1 \rangle_0^2 (\langle \sigma_2^2 \rangle_0^2 + \langle \sigma_3^2 \rangle_0^2)
\end{aligned} \tag{12}
$$

上式中的每个量都是可以解析计算的，如

$$
\langle \sigma_1 \rangle_0 = -\frac{1}{J} + \mathrm{cth} J
$$

$$
\langle \sigma_1^2 \rangle_0 = 1 + \frac{2}{J^2} - \frac{2}{J} \mathrm{cth} J
$$

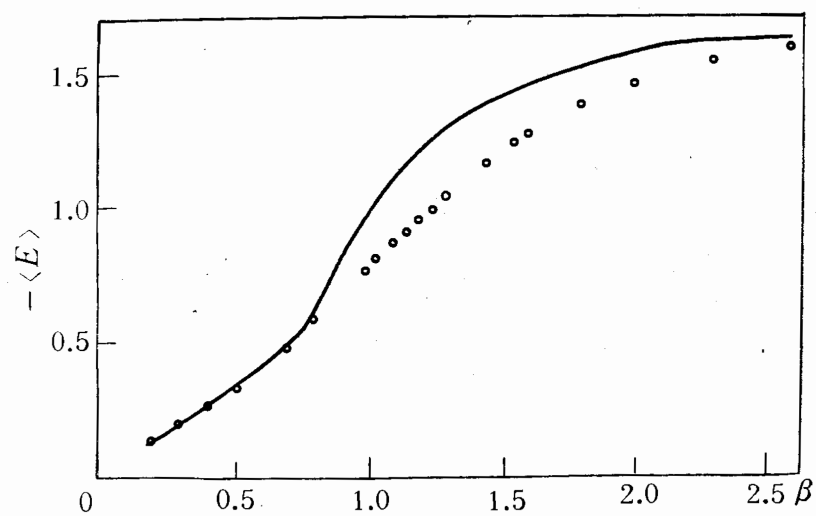

图 1　平均内能

圆点表示 MC 数据，来自文献[4]，实线是本文的结果．

$$\langle\sigma_2^2\rangle_0=\frac{1}{J}\,\mathrm{cth}J-\frac{1}{J^2}$$

$$\langle\sigma_3^2\rangle_0=\frac{1}{J}\,\mathrm{cth}J-\frac{1}{J^2}$$

$$\langle\sigma_1^3\rangle_0=-\frac{6}{J^3}+\frac{6}{J^2}\,\mathrm{cth}J-\frac{3}{J}+\mathrm{cth}J \tag{13}$$

通过以上运算，可以得到 2 维 $O(3)$ 非线性 σ 模型的内能和比热，如图 1 和 2 所示。图 2 中的比热峰对应着曲线 $E(\beta)$ 从强耦合到弱耦合区域之间的变化，并非相变[4]。比热峰的出现可能是作用量特殊选取（为 Wilson 作用量）的结果。可以看到，本文的结果与 Monte Carlo 数据只是在 β 的中间区域有偏差。随着累积展开级数的增高，效果可能会好些。另外本文是用一阶自由能的极小值条件

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial J}=0,\quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial J^2}>0\right)$$

确定变分参数 J，我们正在计算用高阶自由能的极小值条件确定 J 的结果。同时猜测随着时空维数和 N 的增加，所得到的结果可能会更接近 Monte Carlo 数据。我们很快会给出 $O(4)$，$O(5)$ 非线性 σ 模型的计算结果。

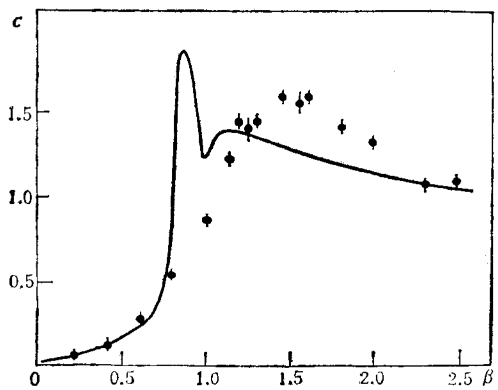

图 2 比热

点表示 MC 数据，来自文献[4]，实线是本文的结果.

感谢吴济民同志有益的讨论和帮助。

参考文献

[1] F. Wegner, *J. Math. Phys.*, **12**(1971) 2259; A. A. Migdal, ЖЭТФ **69**(1975) 810; JETP **42**(1975) 413; ЖЭТФ **69**(1975) 1457; *JETP* **42**(1975) 743.

[2] L. P. Kadanoff, *Ann. Phys.*, **100**(1976) 359; *Rev. Mod. Phys.*, **49**(1977) 267.

[3] E. Brezin, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, **B14**(1976) 3110.

[4] G. Martinelli, G. Parisi, R. Petronzio, *Phys. Lett.*, **100B**(1981) 485; M. Namiki, I. Ohba, K. Okano et al., *Prog. Theor. Phys.*, **73**(1985) 186; U. Wolff, *Nucl. Phys.*, **B334** (1990) 581; J. Apostolakis, C. F. Baillie, G. C. Fox, *Phys. Rev.*, **D43**(1991) 2687.

[5] C. M. Wu, Z. K. Zhu, P. Y. Zhao et al., *Phys. Lett.*, **216B**(1989) 381.

The Analytical Approach for the Two-dimensional $O(3)$ Non-linear σ Model

Zhao Peiying
(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)
Received 16 December 1993

Abstract

In the lattice gauge theory, by using the variational cumulant expansion, we calculate the internal energy and specific heat for the two-dimensional $O(3)$ non-linear σ model. A comparison with Monte Carlo data is also presented.

Key words lattice gauge theory, $O(3)$ non-linear σ model, variational cumulant expansion, internal energy, specific heat.