第 19 卷第 12 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol.19, No.12
1995 年 12 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Dec.,1995

$U_q(sl(2))$的二维循环表示，C－G 系数和一个自由费米子八顶角模型*

张 军 杨光参 阎 宏

(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

1994－10－25 收稿

摘　　要

明确地构造了量子代数 $U_q(sl(2))$ 当 $q=i$ 和 z 中心扩张时的两维循环表示，此表示是既约的；给出了张量表示的 C－G 规则和 C－G 系数以及不同次序张量表示的扭结子 (Intertwiner)．此扭结子是一个满足自由费米子条件的八顶角 R 矩阵，因此给出了一个可积顶角模型．

关键词　量子代数，循环表示，扭结子，顶角模型．

q 为单位根时量子包络代数[1] $U_q(sl(2))$的表示[2] 是与手征 Potts 模型相联系的[3－6]．当 q 是 N 阶单位根且 N 为奇数时，$U_q(sl(2))$的循环表示(或其仿射对应)文献[5,7,8] 作了讨论．

在本文中，我们将着重讨论 $U_q(sl(2))$的循环表示，即当 $q=i$，或 $q^4=1$ 时的表示．我们也将证明此表示是完全可约并显示地给出 C－G 系数．具有不同次序带谱参量的表示，如果其谱参数落在一条代数曲线上，则是同构的．作为两个同构张量表示之间的相似变换，扭结子满足自由费米子条件[9,10]，因此给出了一个可积自由费米子模型的 Boltzman 权．

在文献[11] 中，已经证明六顶角 Ising 模型是 $U_q(\hat{sl}(2))$取 $q^4=1$ 时的扭结子，而文献[12] 证明了六顶角 Ising 模型是 $U_q(sl(2))$的扭结子．本文推广了对二维循环表示的分析，将现有结果扩充到八顶角的情形．

1　$q=i$ 时的 $U_q(sl(2))$代数

可结合代数 $U_q(sl(2))$由 $1,e,f,K,z$ 生成，定义关系如下

$$ef-q^2fe=1-K^2,\ eK=q^2Ke,\ fK=q^{-2}Kf,\ [z,\cdot]=0,\quad \forall\ \cdot\ \in U_q(sl(2)).$$

Casimir 元素为

* 部分地受到国家自然科学基金及国家攀登项目资助．

$$C=K^{-1}\left[fe+\frac{1}{q^2-1}(q^{-2}K^2+1)\right].$$

余乘运算定义如下

$$\Delta e=e\otimes 1+zK\otimes e,\ \Delta f=f\otimes 1+z^{-1}K\otimes f,$$
$$\Delta K=K\otimes K,\ \Delta z=z\otimes z.$$

当 q 为 p 阶单位根时，$U_q(sl(2))$的中心不仅包含 Casimir 算子和中心元素 z(起源于 Drinfel'd 量子对偶理论[1])，而且，p 为奇数时还包含元素 e^p，f^p 和 K^p，p 为偶数时还包含元素 $e^{p/2}$，$f^{p/2}$ 和 $K^{p/2}$.

本文将集中讨论 $p=4$，即 $q=i$ 的特殊情形．显然，我们有下列代数关系(注意常数因子 $2i$ 已被吸收到 e 或f 中)，

$$\{e,f\}=1-K^2,\ \{e,\ K\}=\{f,\ K\}=[z,\ \cdot\ ]=0.$$

Casimir 元素为

$$C=K^{-1}\left(fe+\frac{1}{2}(K^2-1)\right).$$

下面我们把此代数记作 U.

可以把所有表示通过中心元素的本征值加以分类．我们把 e^2，f^2，K^2 和 z 的本征值分别记为 $\hat{\varepsilon}$，$\hat{\phi}$，κ^2 和 z．为方便起见，引入两个参数 ε 和 ϕ

$$\varepsilon=\frac{\hat{\varepsilon}}{1-z^2\kappa^2},\quad \phi=\frac{\hat{\phi}}{1-z^{-2}\kappa^2}.$$

因此 Casimir 元素的本征值 $c=-\dfrac{1}{2\kappa}\Delta$，其中 Δ 为常数(注意不是余乘映射)，

$$\Delta=\sqrt{(\kappa^2-1)^2(1-4\varepsilon\phi)+(z-z^{-1})^2}.$$

记上述表示为 π_ξ，其中 ξ 是一组参数$\{\tilde{\varepsilon},\ \tilde{\phi},\ \kappa,\ z\}$.

2　循环表示

表示空间 V 由

$$|0\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ |1\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

张成．空间中生成元的作用为

$$\pi_\xi(f)|0\rangle=\rho|1\rangle,\ \pi_\xi(f)|1\rangle=\rho^{-1}\hat{\phi}|0\rangle,$$
$$\pi_\xi(e)|0\rangle=\eta|0\rangle,\ \pi_\xi(e)|1\rangle=\eta^{-1}\hat{\varepsilon}|0\rangle,$$
$$\pi_\xi(K)|k\rangle=(-)^k\kappa|k\rangle,\ \pi_\xi(z)|k\rangle=z|k\rangle,\ (k=0,\ 1)$$

其中

$$\eta=-\frac{z}{2\sqrt{\phi}}\ \frac{(\kappa^2-1)+\Delta}{\kappa+z},\ \rho=\sqrt{\phi}\left(1-\frac{\kappa}{z}\right),$$

因此中心元素取如下本征值

$$\pi_{\xi}(e)^2=\hat{\varepsilon}\cdot 1=\varepsilon(1-z^2\kappa^2)\cdot 1,\ \pi_{\xi}(f)^2=\hat{\phi}\cdot 1=\phi(1-z^{-2}\kappa^2)\cdot 1,$$
$$\pi_{\xi}(K)^2=\kappa^2\cdot 1,\qquad \pi_{\xi}(z)=z\cdot 1.$$

故有一个代数同态

$$\pi_{\xi}:U\to \mathrm{End}(V),\ \xi\in C^4.$$

3 张量表示和C−G规则

3.1 张量表示的可约性

我们将证明 2 维表示的张量积是完全可约的. 取如下正交基

$$|0,0\rangle=|0\rangle\otimes|0\rangle,\ |1,0\rangle=|1\rangle\otimes|0\rangle,\ |0,1\rangle=|0\rangle\otimes|1\rangle,\ |1,1\rangle=|1\rangle\otimes|1\rangle.$$

取 2 维表示 π_{ξ_1} 和 π_{ξ_2}，其中心元素在集合 $\xi_i=\{\tilde{\varepsilon}_i,\ \tilde{\phi}_i,\ \kappa_i,\ z_i\}(i=1,\ 2)$取值，用它们构成一个张量积 $\pi_{\xi_{12}}=\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2}$. 中心元素$\{\Delta_{12}(e)^2,\ \Delta_{12}(f)^2,\ \Delta_{12}(K)^2,\ \Delta_{12}(z)\}$在集合 $\xi_{12}=\{\hat{\varepsilon}_{12},\ \hat{\phi}_{12},\ \kappa_{12},\ z_{12}\}$中取值，即

$$\hat{\varepsilon}_{12}=\hat{\varepsilon}_1+z_1^2\kappa_1^2\hat{\varepsilon}_2,\ \hat{\phi}_{12}=\hat{\phi}_1+z_1^{-2}\kappa_1^2\hat{\phi}_2,\ \kappa_{12}=\kappa_1\kappa_2,\ z_{12}=z_1z_2,$$

或等价地表为

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_2+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(1-\kappa_1^2z_1^2)}{1-\kappa_{12}^2z_{12}^2},\ \phi_{12}=\phi_2+\frac{(\phi_1-\phi_2)(1-\kappa_1^2z_1^{-2})}{1-\kappa_{12}^2z_{12}^{-2}}.$$

可以看出如果 $\phi_1=\phi_2=\phi$ 则 $\phi_{12}=\phi$，类似地，如果 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ 则 $\varepsilon_{12}=\varepsilon$.

令

$$|0_{12}\rangle=\alpha|0_{\xi_1},\ 0_{\xi_2}\rangle+\delta|1_{\xi_1},\ 1_{\xi_2}\rangle,\ |1_{12}\rangle=\beta|1_{\xi_1},\ 0_{\xi_2}\rangle+\gamma|0_{\xi_1},\ 1_{\xi_2}\rangle,$$

或等价地，

$$|0_{\xi_1},\ 0_{\xi_2}\rangle=\tilde{\alpha}^{(+)}|0_{12}^{(+)}\rangle+\tilde{\alpha}^{(-)}|0_{12}^{(-)}\rangle,\ |1_{\xi_1},\ 0_{\xi_2}\rangle=\tilde{\beta}^{(+)}|1_{12}^{(+)}\rangle+\tilde{\beta}^{(-)}|1_{12}^{(-)}\rangle,$$

$$|0_{\xi_1},\ 1_{\xi_2}\rangle=\tilde{\gamma}^{(+)}|1_{12}^{(+)}\rangle+\tilde{\gamma}^{(-)}|1_{12}^{(-)}\rangle,\ |1_{\xi_1},\ 1_{\xi_2}\rangle=\tilde{\delta}^{(+)}|0_{12}^{(+)}\rangle+\tilde{\delta}^{(-)}|0_{12}^{(-)}\rangle,$$

在此表示空间中生成元的作用为

$$\begin{aligned}
&(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2})(f)|0_{12}^{(\pm)}\rangle=\rho_{12}|1_{12}^{(\pm)}\rangle,\\
&(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2})(f)|1_{12}^{(\pm)}\rangle=(\rho_{12})^{-1}\hat{\phi}_{12}|0_{12}^{(\pm)}\rangle,\\
&(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2})(e)|0_{12}^{(\pm)}\rangle=\eta_{12}^{(\pm)}|1_{12}^{(\pm)}\rangle,\\
&(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2})(e)|1_{12}^{(\pm)}\rangle=(\eta_{12}^{(\pm)})^{-1}|0_{12}^{(\pm)}\rangle,\\
&(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2})(K)|k_{12}^{(\pm)}\rangle=(-)^k\kappa_{12}|k_{12}^{(\pm)}\rangle,\\
&(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2})(z)|k_{12}^{(\pm)}\rangle=z|k_{12}^{(\pm)}\rangle,\ (k=0,\ 1),
\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$\eta_{12}^{(\pm)}=\frac{1}{2\sqrt{\phi_{12}}}\ \frac{1-\kappa_{12}^2\pm\Delta_{12}}{1+z_{12}^{-1}\kappa_{12}},\ \rho_{12}=\sqrt{\phi_{12}}\ (1-\kappa_{12}z_{12}^{-1})$$

且

$$\Delta_{12}=\sqrt{(\kappa_{12}^2-1)^2-4\hat{\phi}_{12}\hat{\varepsilon}_{12}}.$$

Casimir 算子取值 $C_{12}=\pm\dfrac{1}{2\kappa_{12}}\Delta_{12}$. 2 维表示 $\pi_{\xi_{12}}$ 按 Casimir 算子本征值的正负号分成两类 $\pi^{\pm}_{\xi_{12}}$.

3.2　C-G 系数

为了构造扭结子，我们给出 C-G 系数及逆 C-G 系数的显示表达式. 由(1)，有下列系数

$$\alpha^{(-)}=z_1^{-1}\kappa_1\delta^{(-)}(z_1^2\rho_{12}\eta_1^{-1}\hat{\varepsilon}_1-\rho_2^{-1}\hat{\phi}_2)(\eta_1\rho_{12}-\eta_{12}^{(-)}\rho_1)^{-1},$$
$$\delta^{(+)}=z_1\kappa_1^{-1}\alpha^{(+)}(\rho_{12}\eta_1-\rho_1\eta_{12}^{(+)})(z_1^2\rho_{12}\eta_1^{-1}\hat{\varepsilon}_1-\eta_{12}^{(+)}\rho_1^{-1}\hat{\phi}_1)^{-1},$$
$$\beta^{(\pm)}=\rho_{12}^{-1}(\rho_1\alpha^{(\pm)}-z_1^{-1}\kappa_1\rho_2^{-1}\hat{\phi}_2\delta^{(\pm)}),$$
$$\gamma^{(\pm)}=\rho_{12}^{-1}(z_1^{-1}\kappa_1\rho_2\alpha^{(\pm)}+\rho_1^{-1}\hat{\phi}_1\delta^{(\pm)}),$$

和

$$\widetilde{\alpha}^{(\pm)}=\pm\frac{\delta^{(\mp)}}{\alpha^{(+)}\delta^{(-)}-\alpha^{(-)}\delta^{(+)}},\quad \widetilde{\delta}^{(\pm)}=\mp\frac{\alpha^{(\mp)}}{\alpha^{(+)}\delta^{(-)}-\alpha^{(-)}\delta^{(+)}},$$
$$\widetilde{\beta}^{(\pm)}=\pm\frac{\gamma^{(\mp)}}{\beta^{(+)}\gamma^{(-)}-\beta^{(-)}\gamma^{(+)}},\quad \widetilde{\gamma}^{(\pm)}=\mp\frac{\beta^{(\mp)}}{\beta^{(+)}\gamma^{(-)}-\beta^{(-)}\gamma^{(+)}}.$$

这里上标(±)对应表示 $\pi_{\xi_{12}^{(\pm)}}$.

非零 C-G 系数为

$$\langle 0_{\xi_{12}^{(\pm)}}|0_{\xi_1},0_{\xi_2}\rangle=\widetilde{\alpha}^{(\pm)},\ \langle 0_{\xi_{12}^{(\pm)}}|1_{\xi_1},1_{\xi_2}\rangle=\widetilde{\delta}^{(\pm)},$$
$$\langle 1_{\xi_{12}^{(\pm)}}|0_{\xi_1},1_{\xi_2}\rangle=\widetilde{\gamma}^{(\pm)},\ \langle 1_{\xi_{12}^{(\pm)}}|1_{\xi_1},0_{\xi_2}\rangle=\widetilde{\beta}^{(\pm)},$$

及

$$\langle 0_{\xi_1},0_{\xi_2}|0_{\xi_{12}^{(\pm)}}\rangle=\alpha^{(\pm)},\ \langle 1_{\xi_1},1_{\xi_2}|0_{\xi_{12}^{(\pm)}}\rangle=\delta^{(\pm)},$$
$$\langle 0_{\xi_1},1_{\xi_2}|1_{\xi_{12}^{(\pm)}}\rangle=\gamma^{(\pm)},\ \langle 1_{\xi_1},0_{\xi_2}|1_{\xi_{12}^{(\pm)}}\rangle=\beta^{(\pm)}.$$

4　扭结子的构造

考虑下列代数同态

$$(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2}):U\to\pi_{\xi_1}(U)\otimes\pi_{\xi_2}(U),$$
$$(\pi_{\xi_2}\otimes\pi_{\xi_1}):U\to\pi_{\xi_2}(U)\otimes\pi_{\xi_1}(U).$$

如果谱参量集合 ξ_1 和 ξ_2 落在一条代数曲线上，这两个表示是同构的. 因此，若存在扭结子 R，即两个表示空间之间的一个相似变换，则应有

$$R(\xi_1,\xi_2)(\pi_{\xi_1}\otimes\pi_{\xi_2})(g)=(\pi_{\xi_2}\otimes\pi_{\xi_1})(g)R(\xi_1,\xi_2).\tag{2}$$

首先考虑满足方程(2)的扭结子存在的必要条件. 事实上，在给定表示中只要取此方程的迹即给出了必要条件. 考虑 $g=e^2$ 和 f^2，我们有非平凡约束，

$$(1-\kappa_1^2z_1^2)(1-\kappa_2^2z_2^2+1)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0,\ (\kappa_1^2-z_1^2)(\kappa_2^2-z_2^2)(\phi_1-\phi_2)=0.$$

方程解是一条满足 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ 和 $\phi_1=\phi_2$ 的代数曲线，下面的讨论均在此条件下进行.

根据方程(2)，扭结子的矩阵元可表为

$$R_{kl}^{mn}(\xi_1,\xi_2)=\sum_{r_\xi=0_\xi,1_\xi}\langle m_{\xi_2},n_{\xi_1}|r_\xi\rangle\langle r_\xi|k_{\xi_1},l_{\xi_2}\rangle$$

其中非零项为

$$R_{00}^{00}=\overline{\alpha}^{(+)}\tilde{\alpha}^{(+)}+\overline{\alpha}^{(-)}\tilde{\alpha}^{(-)},\quad R_{01}^{01}=\overline{\gamma}^{(+)}\tilde{\gamma}^{(+)}+\overline{\gamma}^{(-)}\tilde{\gamma}^{(-)},$$
$$R_{01}^{10}=\overline{\beta}^{(+)}\tilde{\gamma}^{(+)}+\overline{\beta}^{(-)}\tilde{\gamma}^{(-)},\quad R_{10}^{01}=\overline{\gamma}^{(+)}\tilde{\beta}^{(+)}+\overline{\gamma}^{(-)}\tilde{\beta}^{(-)},$$
$$R_{10}^{10}=\overline{\beta}^{(+)}\tilde{\beta}^{(+)}+\overline{\beta}^{(-)}\tilde{\beta}^{(-)},\quad R_{11}^{11}=\overline{\delta}^{(+)}\tilde{\delta}^{(+)}+\overline{\delta}^{(-)}\tilde{\delta}^{(-)},$$
$$R_{00}^{11}=\overline{\delta}^{(+)}\tilde{\alpha}^{(+)}+\overline{\delta}^{(-)}\tilde{\alpha}^{(-)},\quad R_{11}^{00}=\overline{\alpha}^{(+)}\tilde{\delta}^{(+)}+\overline{\alpha}^{(-)}\tilde{\delta}^{(-)}.$$

这里用到映射

$$\sigma:\xi_{12}\to\overline{\xi}_{12}=\xi_{21},$$
$$x\mapsto\overline{x},\quad x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

5 自由费米子八顶角模型

如所熟知的，以这种方式给出的扭结子并不一定给出一个可积模型的统计权重. 然而，可以验证，本文所给出的 R 矩阵给出了一个可积的八顶角模型，因为 R 满足自由费米子条件[9]

$$R_{00}^{00}R_{11}^{11}+R_{10}^{01}R_{10}^{10}=R_{00}^{11}R_{11}^{00}+R_{01}^{01}R_{10}^{10}.$$

这是一个有趣的结论.

在文献[13 — 15] 中已经证明，八顶角自由费米子模型[10] 是一个阶化的 Clifford-Hopf 代数 $\hat{CH}_q(2)$的二维循环表示的扭结子. 而在我们的结论中，某一个八顶角自由费米子模型的 R 矩阵是 $U_q(sl(2))$代数的二维循环表示的扭结子，从而与手征 Potts 模型位于一个代数分类中. 我们希望能在下一文章中阐述我们的结果与马德里组的结果[12—15] 的内在联系.

作者感谢郭汉英，吴可，王世坤的有益讨论. 阎宏感谢京都大学的柏原正树，三轮哲二及神保道夫把这个有意义的题目带给他. 这一工作在开始阶段得到了日本学术振兴会的部分资助.

参 考 文 献

[1] 马中骐，杨-巴克斯特方程和量子包络代数，科学出版社，1993.
[2] C. De Concini, V. G. Kac, Representations of quantum groups at root of 1, Colloque Dixmier, **471**—506, Prog. Math. **92**, Birkhauser (1990).
[3] H. Auyang et al., *Phys. Lett.*, **A123** (1987) 219.
[4] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, *J. Stat. Phys.*, **59** (1990) 199.
[5] E. Date et al., *RIMS*, **27** (1991) 639.
[6] E. Date et al., *Commun. Math. Phys.*, **137** (1991) 133.
[7] E. Date et al., *RIMS*, **27** (1991) 437.
[8] W. A. Schnizer, *RIMS* (1993) 916.
[9] C. Fan, F. Y. Wu, *Phys. Rev.*, **B2** (1970) 723.
[10] B. U. Felderhof, *Physica*, **65** (1973) 421; *Physica*, **66** (1973) 279.
[11] J. Murakami, *RIMS* (1991) 822.

[12] M. Ruiz-Altaba, *Phys. Lett.*, **B279** (1992) 326.
[13] R. Cuerno et al., *IMAFF*–2/93.
[14] R. Cuerno, A. Gonzalez-Ruiz, *IMAFF*–11/93, *LPTHE–PAR*–21/93.
[15] E. Lopez, *IMAFF*–12/93.

2−Dimensional Cyclic Representations of $U_q(sl(2))$, C−G Coefficients and a Free Fermion 8−Vertex Model

Zhang Jun　　Yang Guangcan　　Yan Hong

(*Institute of Theoretical Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Received 25 October 1994

Abstract

We give explicitly the 2−dimensional cyclic representations of quantum algebra $U_q(sl(2))$ with central extension. The C−G rule and the C−G coefficients are calculated and the intertwiner for tensor representations in different orders is constructed with C−G coefficients. This intertwiner is shown to be the R−matrix for an eight vertex model that satisfies the free Fermion condition and therefore gives an integrable model.

Key words quantum algebra, cyclic representation, intertwiner, vertex model.