第 18 卷 第 5 期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 5
1994 年 5 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS May, 1994

2+1 维 $SU(2)$ 规范场真空波函数的研究*

陈启洲 季 磊 李志兵 郭硕鸿
(中山大学物理系 广州 510275)
1993 年 1 月 3 日收到

摘 要

利用强耦合展开和本征函数以及变分方法研究了真空波函数，将这些结果进行了比较.

关键词 格点规范，强耦合展开，变分法，真空波函数.

1 引 言

对于规范场的真空波函数已经有了一些理论上的讨论[1]. 一般认为真空的结构和非阿贝尔规范理论中的禁闭性质密切相关. Greensite[2] 利用非微扰方法研究了杨-Mills 场的真空波函数. 在格点规范理论中，研究这个问题的方法有：变分法、Monte Carlo[3]、强耦合展开等等. 由于获得好的真空波函数的重要性，人们从不同的方面对此波函数进行了研究.

规范场的真空态除了能量最低外，必须满足 Gauss 定理. 所以最为普遍的波函数形式应该是规范不变的 Wilson 圈变量的组合. 普遍认为在强耦合区规范场是磁无序的，即单方块组态在真空波函数中有较大的贡献. 对于长波组态，规范场的真空形式可以写成[3]：

$$\Psi[A] = \exp\left(-\mu\int d^{D-1}x\,\mathrm{Tr}[F_{ij}^2(x)]\right). \tag{1.1}$$

在格点规范理论中，与上式对应的形式是：

$$\Psi[U] = \exp\left(\frac{\mu}{4}\sum_p \mathrm{Tr}U_p\right). \tag{1.2}$$

但是一般认为当耦合常数变小时，相关的区域要变大，因此真空波函数必须包含大方块的组态. 但如何确定这些组态以及相应的系数因子是一个有趣的问题. 在文献[6]中，曾用小振幅常数组态研究了 2+1 维 $SU(2)$ 规范场的真空波函数的红外形式. 本文中再用 Greensite 的级数展开方法以及减除的哈密顿量[7]变分法研究同一问题. 然后把这些方法以及 MC 方法的结果进行比较.

---

* 国家自然科学基金及中山大学高等学术中心资助.
本文 1993 年 1 月 3 日收到.

2 级数展开法

真空波函数可以写成 $\Psi[U]=\exp[A(U)]$. 其中 $A(U)$ 是规范不变量 Wilson 圈的组合. 于是问题可以变成解波函数的格点 Schrödinger 方程. 对于 2+1 维 $SU(2)$ 群,可以写成:

$$\frac{g^2}{2a}\left(\sum_l E_l^2-\frac{4}{g^4}\sum_p \mathrm{Tr}U_p\right)\Psi[U]=\varepsilon_0\Psi[U], \tag{2.1}$$

其中 a 为格距, g 为裸耦合常数, ε_0 为真空能量. 上式可写为:

$$[E_l,[E_l,A]]+[E_l,A][E_l,A]-\frac{4}{g^4}\sum_p \mathrm{Tr}U_p=\frac{2a}{g^2}\varepsilon_0 \tag{2.2}$$

正如 Greensite[4] 所做的一样,定义:

$$\mathrm{Dev}[A_\Gamma]=\sum_l [E_l,[E_l,A_\Gamma]], \tag{2.3}$$

$$\mathrm{Inv}[\mathrm{Dev}[A_\Gamma]]=A_\Gamma, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Inv}\ [\text{常数}]=0. \tag{2.5}$$

为了说明 Inv 的运算规则,举一个简单例子. 当计算 $\mathrm{Inv}[\square]$ 时,先算 $\mathrm{Dev}[\square]=[E_l^a,[E_l^a,\square]]=4\cdot c_N\square=3\square$, 由定义(2.4)式, $\mathrm{Inv}[\mathrm{Dev}[\square]]=\square$, 因此, $\mathrm{Inv}\times[\mathrm{Dev}[\square]]=\mathrm{Inv}[3\square]=3\mathrm{Inv}[\square]=\square$, 故 $\mathrm{Inv}[\square]=\frac{1}{3}\square$.

将 Inv 作用于(2.2)中,可以得到:

$$A=\mathrm{Inv}\left[\frac{1}{4}\beta^2\sum_p \mathrm{Tr}U_p-\sum_l [E_l^a,A][E_l^a,A]\right], \tag{2.6}$$

其中 $\beta=4/g^2$, 所以可将 $A[U]$ 写成级数形式:

$$A_1=\mathrm{Inv}\left[\frac{1}{4}\beta^2\sum_p \mathrm{Tr}U_p\right], \tag{2.7a}$$

$$A_{n+1}=\mathrm{Inv}\left[\frac{1}{4}\beta^2\sum_p \mathrm{Tr}U_p-\sum_l [E_l,A_n][E_l,A_n]\right]. \tag{2.7b}$$

计算到二级,近似的结果是:

$$\begin{aligned}A_2=&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\beta^2\right)\sum_p \hat{\square}-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{3}\beta^2\right)^2\square^2\\&+\frac{1}{39}\left(\frac{1}{3}\beta^2\right)^2\text{中}-\frac{1}{104}\left(\frac{1}{3}\beta^2\right)^2\square\square,\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $\square=\mathrm{Tr}U_p$, $\square^2=\text{回}=[\mathrm{Tr}U_p]^2$, 其余类推.

从(2.8)式可以看出级数的系数因子是 $\frac{1}{3}\beta^2$ 的级数,因此在强耦合情况下上式成立. 上面的波函数不但给出了四种不同的组态,而且给出了不同组态的系数因子. Heys 和 Arisue[5] 等利用变分方法计算了以上各种组态的系数因子. 他们的结果和(2.8)式比较起来,在强耦合区 ($1/g^2\leqslant 0.6$) 符合得较好,从过渡区开始有明显的差别.

对于长波组态，$A([U])$ 可以近似地表为

$$A([U])=\frac{1}{4}\mu_{\mathrm{eff}}\sum_{p}\mathrm{Tr}U_{p}.$$

利用文献[6]中提出的抽取等效 μ_{eff} 的方法，可以由(2.8)中得到:

$$\mu_{\mathrm{eff}}=\frac{1}{3}\beta^{2}+16\left(\frac{1}{3}\beta^{2}\right)^{2}\left[\frac{1}{39}-\frac{1}{128}-\frac{1}{104}\right]. \tag{2.9}$$

一般认为 2+1 维 $SU(2)$ 群过渡区的起始点在 $\beta=2.4$ 附近，则二级近似不能推进到较深的弱耦合区. 因此进一步利用文献[4]提出的解耦合代数方程组方法，假定真空态波函数近似写成:

$$|\Omega\rangle=\exp\left[\frac{\mu}{4}\square+c_{1}\text{中}+c_{2}\square^{2}+c_{3}\square\square\right]|0\rangle=\mathrm{e}^{A(U)}|0\rangle. \tag{2.10}$$

在解本征方程(2.6)时，需要计算 $[E,A][E,A]$，它将产生一些新的图形，结果如下:

$$\begin{aligned}
&[E,\square][E,\square]=\square^{2}-4-2\text{中}+\square\square,\\
&\mathrm{Inv}[[E,\square][E,\square]]=\frac{1}{8}\square^{2}+\frac{2}{13}\square\square-\frac{16}{39}\text{中},\\
&[E,\square][E,\square^{2}]=2[\square^{3}-4\square-2\text{中}+\square^{2}\square],\\
&[E,\square][E,\square\square]=2[\square^{2}\square-4\square-2\text{中}\square+\square\square\square],\\
&[E,\square^{2}][E,\square^{2}]=4[\square^{4}-4\square^{2}-2\text{中}+\square^{2}\square^{2}],\\
&[E,\square\square][E,\square\square]=4[\square\text{卣}\square+\text{卣}\square^{2}]+\text{其它图},\\
&[E,\square^{2}][E,\square\square]=4[\square^{3}\square-4\square\square-2\text{中}\square+\square^{2}\square\square].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

如果在 $[E,A][E,A]$ 的表示式中只保留 A 所包含的图形，以及能化为这些图形线性组合的图形. 则有:

$$\begin{aligned}
[E_{l}^{a},A][E_{l}^{a},A]=&\frac{\mu^{2}}{16}[\square^{2}-4-2\text{中}+\square\square]-\mu[4c_{2}\square+4c_{3}\square]\\
&-16c_{2}^{2}\square^{2}-32c_{2}c_{3}\square\square-8c_{3}^{2}\square^{2}+\text{其它复合图}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

将上式代到(2.6)中，并且略去其它复合图后，得到下列方程组:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{4}=\frac{4}{3g^{4}}+\frac{4}{3}\mu(c_{2}+c_{3}),\\
&c_{1}=\frac{\mu^{2}}{39}+\frac{128}{117}c_{2}c_{3},\\
&c_{2}=-\frac{\mu^{2}}{128}+2c_{2}^{2}+c_{3}^{2},\\
&c_{3}=-\frac{\mu^{2}}{104}+\frac{64}{13}c_{2}c_{3}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中利用了 $\mathrm{Inv}[\square]=\frac{1}{3}\square$, $\mathrm{Inv}[\square^{2}]=\frac{1}{8}\square^{2}$, $\mathrm{Inv}[\text{中}]=\frac{2}{9}\text{中}$, $\mathrm{Inv}[\square\square]=\frac{2}{13}\left[\square\square+\frac{2}{9}\text{中}\right]$ 和 $\text{卣}=\square-2$ (如果没有利用最后一式从 $[E_{l}^{a}, A][E_{l}^{a}, A]$ 中抽出$\square$, $\square^{2}$、$\square\square$，则(2.13)式恢复到(2.8)式). (2.13)式有两组解，其中一组导致 $\mu_{\mathrm{eff}}=$

$\mu+16(c_1+c_2+c_3)$ 为负值,认为它是非物理解。物理解对应于

$$c_3=\frac{-\left(1+\frac{4\beta^2}{\mu}\right)+\sqrt{\left(1+\frac{4\beta^2}{\mu}\right)^2-32\mu^2}}{128}.$$

这个解的数值见表 1.

用这种方法处理激发态时,将遇到如何处理不相连图问题,有待进一步研究.

3 减除的哈密顿量方法

对通常的 Kogut-Susskind 哈密顿量

$$H=\frac{g^2}{2a}W=\frac{g^2}{2a}\left(\sum_l E_l^2-\frac{\beta^2}{4}\sum_p \mathrm{Tr}U_p\right). \tag{3.1}$$

若取变分 真空态为独立元格形式

$$|\Omega\rangle=\mathrm{e}^{\frac{\mu}{4}R}|0\rangle,\quad R=\sum_p \mathrm{Tr}U_p, \tag{3.2}$$

得:

$$N_p^{-1}\langle W\rangle_0=\left(\frac{3}{4}\mu-\frac{\beta^2}{2}\right)\frac{\mathrm{I}_2(\mu)}{\mathrm{I}_1(\mu)}, \tag{3.3}$$

其中 N_p 为方格数, I_n 为虚宗量贝塞尔函数. 对 μ 变分使 $\langle W\rangle_0$ 极小,得

$$\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}+\left(\mu-\frac{2\beta^2}{3}\right)\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}=0. \tag{3.4}$$

在强耦合区和弱耦合区的 μ 分别为

$$\mu\approx\frac{\beta^2}{3}\quad(\beta\to 0), \tag{3.5}$$

$$\mu\approx\beta\quad(\beta\to\infty). \tag{3.6}$$

弱耦合区的 μ 并不满足标度关系 $\mu\sim a^{-2}$. 这是由于用变分法时, 必须对所有 U 组态积分. 积分中短波组态 $p\sim \mathrm{O}(a^{-1})$ 占主要部分. 因此简单变分波函数并不给出长波组态的真空态, 这也是用简单变分法不能给出满足标度行为的能谱[5]的原因. 要用变分法进行能谱计算,需要采用比较复杂的变分真空态,或者用变型的哈密顿量以减除短波组态的贡献.

在文献 [7] 中讨论了对哈密顿量的减除和重正化. 对 W 加上连续极限为零的一项 ΔW,

$$\Delta W=\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2\left(\sum_l [R,E_l][E_l,R]-r\sum_p \mathrm{Tr}U_p+KI\right), \tag{3.7}$$

其中系数 r 和 K 由对低能组态 $\langle\psi|\Delta W|\psi'\rangle\to 0$ 的条件确定. 只要

$$\alpha<\mathrm{O}(a^{-2}),$$

则 ΔW 为不相关算符,减除后的哈密顿量为

$$W'=W+\Delta W=\sum_l E_l^2-\frac{\beta'^2}{4}\sum_p \mathrm{Tr}U_p+\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2\sum_l [R,E_l][E_l,R], \tag{3.8}$$

其中

$$\beta'^2 = \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} r. \tag{3.9}$$

为重正化的 β^2 值．ΔW 项将减除部分短波组态的贡献．用变分真空态(3.2)得

$$N_p^{-1}\langle W'\rangle_0 = \left(\frac{3}{4}\mu - \frac{\beta'^2}{2}\right)\frac{\mathrm{I}_2(\mu)}{\mathrm{I}_1(\mu)} + \frac{3}{4}\frac{\alpha^2}{\mu}\frac{\mathrm{I}_2(\mu)}{\mathrm{I}_1(\mu)}. \tag{3.10}$$

对 μ 变分得

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{\mu^2}\right)\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1} + \left(\mu + \frac{\alpha^2}{\mu} - \frac{2\beta'^2}{3}\right)\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1} = 0. \tag{3.11}$$

容易看出上式的一个解为

$$\mu = \alpha = \frac{\beta'^2}{3}. \tag{3.12}$$

这即是文献[8]的精确基态解，但此时 $\alpha \sim O(a^{-2})$，因此 ΔW 是相关算符．用 W' 求出的能谱可能有 p^2/μ（p 为平均动量)的误差．

为使 ΔW 为不相关算符，需取 $\alpha < O(\beta'^2)$．此时(3.11)式给出强耦合区和弱耦合区的 μ 分别为

$$\mu \to \frac{\beta'^2}{3} \quad (\beta' \to 0), \tag{3.13}$$

$$\mu \to (\alpha^2 + \beta'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\beta' \to \infty). \tag{3.14}$$

为使 ΔW 减去尽可能多的短波组态贡献，取

$$\alpha = \frac{1}{3}\beta'^{2\lambda}, \quad \lambda = 1 - \varepsilon, \tag{3.15}$$

ε 为小量，此时

$$\mu \to \frac{1}{3}\beta'^{2-2\varepsilon} \quad (\beta' \to \infty). \tag{3.16}$$

即 μ 可以任意接近满足标度关系的 $\frac{1}{3}\beta'^2$ 式．

由于已知长波组态的真空为(3.2)式[6]，其中

$$\mu \cong \frac{1}{3}\beta^2, \tag{3.17}$$

因此，$\beta' = \beta$．即在 2+1 维情形对 β 没有重正化[7]．本节的结果也从另一方面论证了(3.2)(其中 μ 取(3.17)式)是长波组态真空波函数的较好近似．

4 结果和讨论

以上用不同方法计算了折合到独立元格真空态的有效 $\mu_{\rm eff}$ 值，这些结果列于表 2，其中 $\mu_{\rm eff}^{\rm SC}, \mu_{\rm eff}^{\rm EE}, \mu_{\rm eff}^{\rm Lw[6]}$ 和 $\mu_{\rm eff}^{\rm VA}$ 分别表示强耦合展开式(2.9)，截断本征方程值(表 1)，长波组态法[6]和减除哈密顿量变分法(3.11)所得的 $\mu_{\rm eff}$ 值(在变分法中，α 取(3.15)式，$\varepsilon =$

表 1

β	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6
μ	0.212	0.830	1.580	2.361	3.112	3.838	4.546
C_1	1.2×10^{-3}	0.010	0.064	0.145	0.253	0.387	0.546
C_2	-3.5×10^{-4}	-3.1×10^{-3}	−0.018	−0.039	−0.063	−0.089	−0.118
C_3	-4.3×10^{-4}	-3.8×10^{-3}	−0.022	−0.045	−0.071	−0.098	−0.126
μ_{eff}	0.218	0.884	1.965	3.340	5.021	7.030	9.387

表 2

β	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6
μ_{eff}^{sc}	0.219	0.949	2.405	4.944	9.071	15.431	24.790
μ_{eff}^{EE}	0.218	0.884	1.965	3.340	5.021	7.030	9.387
μ_{eff}^{LW}	0.216	0.825	1.982	3.486	5.408	7.758	10.530
μ_{eff}^{VA}	0.218	0.863	1.759	3.039	4.643	6.565	8.799
$\frac{1}{3}\beta^2$	0.213	0.853	1.920	3.413	5.333	7.680	10.453
μ_{MC}	0.259	1.037	2.333	4.147	6.480	9.331	12.701

0.05)．表中还列出 $\frac{1}{3}\beta^2$ 值以及 Green site 在拉氏形式下进行 Monte Carlo 模拟的 μ_{MC} 值．μ_{MC} 比 $\frac{1}{3}\beta^2$ 大一个因子 $3\times0.405=1.215$．这差别来自拉氏形式与哈密顿形式耦合常数的差别．

如所预料，强耦合展开法对大 β 不适用，除此以外，所有其他方法都给出基本一致的结果．这说明独立元格真空态对缓变组态来说是好的基态．文献[9]用此基态作为一个变型哈密顿量的精确基态计算能谱，都获得了远比其它方法清楚的标度性行为，这些结果都支持了本文所得的结论．

参 考 文 献

[1] R. P. Feynman, *Nucl. Phys.*, **B188**(1981) 479.
[2] J. Greensite, *Nucl. Phys.*, **B158**(1979) 469.
[3] J. Greensite, *Phys. Lett.*, **B191**(1987) 431; J. Greensite, *Phys. Lett.*, **B223**(1989) 207.
[4] J. Greensite, *Nucl. Phys.*, **B166**(1980) 113.
[5] D. W. Heys, et al., *Phys. Rev.*, **D29**(1984) 1791; H. Arisue, M. Kato and T. Fujiwara, *Prog. of Theor. Phys.* Vol. **70**(1983) 229.
[6] 陈启洲等，高能物理与核物理，18(1994)37.
[7] S. H. Guo, W. H. Zheng, J. M. Liu and Z. B. Li, *Phys. Rev.*, **D44**(1991) 1269.
[8] S. H. Guo, W. H. Zheng and J. M. Liu, *Phys. Rev.*, **D38**(1988) 2591.
[9] H. Arisue, *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 84**(1990) 951.

Vacuum Wave Function Study of 2+1 Dimensional $SU(2)$ Gauge Field

Chen Qizhou Li Lei Li Zhibing Guo Shuohong
(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Received on January 3, 1993

Abstract

We study the vacuum wave function by three different methods: the strong coupling expansion method, the eigenfunction method, and the variational method. Comparison between the results is made.

Key words lattice gauge, strong coupling expansion, variational method, vacuum wavefunction.