

# 考虑三体相互作用项的 $O(6)$ 能谱修正公式

邵 彬

(首都师范大学物理系 北京 100037)

1993年6月28日收到

## 摘 要

通过在 IBM 哈密顿量中引入三体相互作用修正项, 给出  $O(6)$  能谱一个简明的修正公式. 对三种核区  $A \sim 70, 130, 190$  附近部分核的计算表明, 理论与实验的符合程度明显改善.

**关键词** 三体势,  $O(6)$ 能谱, 准  $\gamma$  带, staggering 现象.

## 1 引 言

作为相互作用玻色子模型 (IBM)<sup>[1]</sup> 动力学对称性之一的  $O(6)$  对称性, 其能谱规律与实验观测存在着系统的偏离, 主要表现在: (1) 用拟合最低几个实验值确定的参数计算典型  $O(6)$  能谱, 在较高能端处与实验值偏离过大; (2) 准  $\gamma$  带能级 ( $3_1^+$ ,  $4_2^+$ )、( $5_1^+$ ,  $6_2^+$ ) 等比较靠近, 形成与基态带相比能级分布明显的不均匀性, 即所谓 staggering 现象, 而实验观测不到或者仅能观测到较弱的 staggering 现象等等. 针对典型  $O(6)$  极限能谱与实验之间的这些固有差异, 适当地在  $O(6)$  哈密顿量中引入一个修正项将会有助于改善理论与实验结果之间的偏差.

1984年, K. Heyde 等人首次在 IBM 哈密顿量中引入了一个五参数三体势<sup>[2]</sup>. 之后, R. F. Casten 等人<sup>[3]</sup> 选取其中  $L=3$  的一项三体势, 对质量数  $A \sim 130$  核区附近具有  $O(6)$  极限特征的 Xe、Ba 同位素能谱进行了修正计算. 但是, 最近文献[4]指出, 那些  $L \neq 3$  的三体势影响与  $L=3$  的项相比两者具有同等重要性, 因而将五参数三体势全部考虑在内, 取得了较好的修正效果. 全部三体势有 17 项之多<sup>[4]</sup>, 而文献[4]引入的三体势只有其中 5 项, 其它三体势, 尤其是那些在微扰理论一级近似中起重要作用的具有对角型形式的三体势, 对  $O(6)$  能谱也有不可忽视的影响. 另外, 文献[2-4]引入三体修正项之后, 只能进行较为复杂的数值计算, 缺乏修正后的能谱解析表达式. 因此, 本文将具有对角型形式的三体势全部考虑在内, 通过对这些三体势自由参数的适当选取, 借助微扰理论, 给出一个解析的能谱修正公式. 该公式具有形式简单, 唯象可调参数少等特点. 对三种不同核区  $^{72-76}\text{Ge}$ 、 $^{124-130}\text{Xe}$ 、 $^{192-196}\text{Pt}$  同位素能谱的计算表明, 理论与实验结果的符合

程度有十分明显的改善.

## 2 能谱修正公式

具有对角型形式的全部玻色子三体相互作用项如下<sup>[1]</sup>:

$$V_1 = \sum_L \beta_1(L)(d^+d^+d^+)^{(L)} \cdot (\tilde{d}\tilde{d}\tilde{d})^{(L)}, (L = 0, 2, 3, 4, 6). \quad (1)$$

$$V_2 = \sum_L \beta_2(L)(s^+d^+d^+)^{(L)} \cdot (\tilde{s}\tilde{d}\tilde{d})^{(L)}, (L = 0, 2, 4). \quad (2)$$

$$V_3 = \beta_3(s^+s^+d^+)^{(2)} \cdot (\tilde{s}\tilde{s}\tilde{d})^{(2)}, \quad (3)$$

$$V_4 = \beta_4(s^+s^+s^+) \cdot (\tilde{s}\tilde{s}\tilde{s}). \quad (4)$$

文献[2,4]引入的五参数三体势是  $V_1$ , 文献[2,3]进行数值计算引入的三体势是  $V_1$  中  $L=3$  的一项. 其中  $\tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}$ , 为了减少自由参数的数目, 将(1)、(2)两式改写为如下形式:

$$V_1 = \beta_1 \sum_{Ll} [(d^+d^+)^{(l)}d^+]^{(L)} \cdot [(\tilde{d}\tilde{d})^{(l)}\tilde{d}]^{(L)}, \quad (5)$$

$$V_2 = \beta_2 \sum_L (d^+d^+)^{(L)} \cdot (\tilde{d}\tilde{d})^{(L)}(s^+s), \quad (6)$$

将(5)式退耦, 利用对易关系:

$$[d_m^+, (dd)^{(l)}] = [(-1)^{l+1} - 1] \sum_\mu \langle 2\mu, 2m | l, \mu \rangle d_\mu, \quad (7)$$

以及 C-G 系数正交性, 则(5)式可化为:

$$V_1 = \beta_1 \sum_l (d^+d^+)^{(l)} \cdot (\tilde{d}\tilde{d})^{(l)}(n_d - 2), \quad (8)$$

其中  $n_d$  为  $d$  玻色子数. 再利用

$$\sum_L (d^+d^+)^{(L)} \cdot (\tilde{d}\tilde{d})^{(L)} = n_d(n_d - 1), \quad (9)$$

$$\text{则 } V_1, V_2 \text{ 可化为: } V_1 = \beta_1 n_d(n_d - 1)(n_d - 2), \quad (10)$$

$$V_2 = \beta_2 n_s n_d(n_d - 1), \quad (11)$$

同时(3)、(4)式可改写为:

$$V_3 = \beta_3 n_s(n_s - 1)n_d, \quad (12)$$

$$V_4 = \beta_4 n_s(n_s - 1)(n_s - 2). \quad (13)$$

因为总玻色子数  $N = n_s + n_d$ , 所以简化后的  $V_1, V_2, V_3, V_4$  中只有任意三个是独立的, 引入全部对角型三体势只需任取其中三个. 因此, 本文采用的三体势修正项为:

$$V' = V_1 + V_2 + V_3 = (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3)n_d^3 + [(N+1)\beta_2 - 3\beta_1 + (2N-1)\beta_3]n_d^2 + [2\beta_1 - N\beta_2 + N(N-1)\beta_3]n_d, \quad (14)$$

引入修正项  $V'$  后, IBM  $O(6)$  哈密顿变为:

$$H' = H_{O(6)} + V', \quad (15)$$

类似文献[3,4], 只限于讨论  $\sigma = N$  的情形, 则  $H_{O(6)}$  在  $O(6)$  基  $|[N], \sigma = N, \tau, \nu, L\rangle$  中的能谱为:

$$E_{O(6)} = E_0 + B\tau(\tau + 3) + CL(L + 1), \quad (16)$$

其中  $E_0$  仅与  $N$  有关,  $\tau$  为  $d$  玻色子不配对数. 在一级微扰近似下, 修正能谱:

$$E' = E_{O(6)} + \langle [N], N, \tau, \nu, L | V' | [N], N, \tau, \nu, L \rangle, \quad (17)$$

由公式<sup>[1,4]</sup>  $\langle [N], \sigma, \tau, \nu, L | n_d | [N], \sigma', \tau', \nu', L' \rangle = f(N, \tau) \delta_{\tau\tau'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{LL'}$ , (18)

及  $\langle [N], N, \tau, \nu, L | n_d | [N], N-2, \tau', \nu', L' \rangle = g(N, \tau) \delta_{\tau\tau'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{LL'}$ , (19)

其中  $f(N, \tau) = \frac{[N(N-1) + \tau(\tau+3)]}{2(N+1)}$ , (20)

$$g(N, \tau) = -\frac{\sqrt{N[N(N+3) - \tau(\tau+3)][(N-2)(N-1) - \tau(\tau+3)]}}{2N(N+1)}, \quad (21)$$

可得

$$\begin{aligned} & \langle [N], N, \tau, \nu, L | n_d^2 | [N], N, \tau, \nu, L \rangle \\ &= \sum_{\sigma', \tau', \nu', L'} \langle [N], N, \tau, \nu, L | n_d | [N], \sigma', \tau', \nu', L' \rangle \\ & \quad \cdot \langle [N], \sigma', \tau', \nu', L' | n_d | [N], N, \tau, \nu, L \rangle \\ &= \sum_{\sigma=N, N-2} \langle [N], N, \tau, \nu, L | n_d | [N], \sigma, \tau, \nu, L \rangle^2 \\ &= f^2(N, \tau) + g^2(N, \tau), \end{aligned} \quad (22)$$

同理

$$\langle [N], N, \tau, \nu, L | n_d^3 | [N], N, \tau, \nu, L \rangle = f(N, \tau)[f^2(N, \tau) + 3g^2(N, \tau)], \quad (23)$$

由(14)、(18—23)式可将修正项整理成如下形式:

$$\begin{aligned} & \langle [N], N, \tau, \nu, L | V' | [N], N, \tau, \nu, L \rangle \\ &= P_0 + P_1 \tau(\tau+3) + P_2 \tau^2(\tau+3)^2 + P_3 \tau^3(\tau+3)^3, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $P_0, P_1, P_2, P_3$  是  $N$  及三个独立参数  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  较为复杂的函数, 它们中只有三个是独立的. 为了简明, 选择  $P_1, P_2, P_3$  为自由可调参数, 且将(24)式前两项与(16)式相应项合并, 则修正后的  $O(6)$  核激发态的能谱解析式为

$$E' = B' \tau(\tau+3) + P_2 \tau^2(\tau+3)^2 + P_3 \tau^3(\tau+3)^3 + C' L(L+1), \quad (25)$$

其中  $B', C', P_2, P_3$  可作为独立参数对实验能谱进行拟合. 当  $P_1, P_2, P_3$  确定后, 反过来可以求出参数  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ .

### 3 结果与讨论

本文引入三体势对典型  $O(6)$  能谱进行修正, 给出了一个由四参数 ( $B', C', P_2, P_3$ ) 描述的能谱修正公式, 这四个参数自由可调. 当选取  $P_3 = 0$  时, 该公式退化成三参数能谱修正公式, 相当于引入一个等效的二体势修正项. 计算表明三参数公式同样能够很好地改善理论计算结果, 但通常四参数公式要比三参数公式能更好地拟合实验值.

表1中, 给出了修正后与未修正的  $O(6)$  能谱参数取值. 为比较起见, 表2在给出本文计算结果和典型  $O(6)$  极限能谱的同时, 还列出了对(1)式作另一种简化处理的三体势计算结果<sup>[4]</sup>. 总体上看, 引入三体势修正项后本文和文献[4]都明显地改善了  $O(6)$  能谱的计算, 但本文方法简单, 能够给出能谱解析式, 与实验值比较, 理论计算值整体上优于文献[4]的计算结果, 尤其体现在对较高激发态的修正计算上.

在表3, 4和图1中, 本文给出了一些角动量相对较高状态的能谱, 从中能够清楚地看到, 典型  $O(6)$  极限基带能谱随着自旋的增高与实验值的偏离逐渐变得十分显著, 并且

表 1 计算能谱时的参数取值(keV)

Parameter	<sup>76</sup> Ge	<sup>74</sup> Ge	<sup>72</sup> Ge	<sup>130</sup> Xe	<sup>128</sup> Xe	<sup>126</sup> Xe	<sup>124</sup> Xe	<sup>196</sup> Pt	<sup>194</sup> Pt	<sup>192</sup> Pt
$B'$	115.9	105	147.9	119.9	102.8	81.5	79.9	62.1	67	61
$C'$	11	29	23.6	11.1	8.6	10.5	9.2	12.7	13.2	9.8
$P_2$	-0.13	-1.4	-2	-1.9	-1.7	-0.65	-1	-0.23	-1.5	-0.38
$P_3$	-0.03	0.007	-0.006	0	-0.014	-0.004	0.01	-0.008	0.023	-0.005
$B$	106	87	128	97	78	71	68	46	41	45
$C$	13	32	40	10	9	9	9	21	20	14

$B', C', P_2, P_3$  为本文用(25)式计算能谱时选取的参数,  $B, C$  是用(16)式计算典型  $O(6)$  极限能谱时选取的参数.

表 2 <sup>72-76</sup>Ge 理论计算值与实验值的比较(keV)

$J^\pi(\tau\nu)$	<sup>76</sup> Ge( $N=5$ )				<sup>74</sup> Ge( $N=6$ )				<sup>72</sup> Ge( $N=7$ )			
	Exp	Th1	Th	Th2	Exp	Th1	Th	Th2	Exp	Th1	Th	Th2
$0^+_1(00)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^+_1(10)$	563	526	573	495	598	572	694	508	833	701	829	612
$4^+_1(20)$	1409	1336	1311	1308	1466	1497	1429	1449	1728	1745	1706	1744
$2^+_2(20)$	1107	1182	1124	1115	1203	1091	970	947	1464	1415	1125	1151
$3^+_1(30)$					1695	1825	1745	1749	2064	2262	2115	2123
$4^+_1(30)$	2018	2089	2129	2136	2165	2057	2027	2035	2463	2451	2488	2461
$0^+_2(31)$	1912	1869	1862	1859	1485	1477	1361	1318	2028	1979	1636	1615
$2^+_3(41)$	2506	2551	2948	2977	2198	2170	2255	2267	2401	2583	2764	2767
$4^+_2(40)$	2739	2705	3131	3173	2572	2576	2704	2768	3072	2914	4283	4426

(a) Exp 表示实验值, Th1 表示本文的理论计算结果, Th 表示文献[4]引入三体势后的理论计算结果, Th2 表示典型  $O(6)$  极限能谱. (b) Exp, Th, Th2 的数据取自文献[4].

表 3 <sup>124, 126, 130</sup>Xe 理论计算值与实验值的比较 (keV)

$J^\pi(\tau)$	<sup>130</sup> Xe( $N=5$ )			<sup>126</sup> Xe( $N=7$ )			<sup>124</sup> Xe( $N=8$ )		
	Exp	Th1	Th2	Epx	Th1	Th2	Exp	Th1	Th2
$0^+_1(0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^+_1(1)$	536	516	448	389	378	338	354	359	326
$4^+_1(2)$	1205	1231	1170	942	956	890	879	893	860
$6^+_1(3)$	1944	2009	2166	1635	1674	1656	1549	1559	1602
$8^+_1(4)$	2697	2667	3436	2436	2441	2636	2331	2335	2552
$10^+_1(5)$	2973	2977	4980				3172	3248	3710
$2^+_2(2)$	1122	1076	1030	880	809	764	847	764	734
$3^+_1(3)$	1633	1676	1866	1317	1359	1386	1248	1283	1332
$4^+_2(3)$	1808	1765	1946	1488	1443	1458	1438	1357	1404
$5^+_1(4)$	2172	2201	3016	1903	1999	2258	1837	1949	2174
$6^+_2(4)$	2362	2334	3136	2214	2126	2366	2145	2059	2282
$7^+_1(5)$				2562	2552	3344	2575	2751	3224

实验值取自文献[5,6].

表4  $^{192-196}\text{Pt}$  理论计算值与实验值的比较 (keV)

$J^\pi(\tau)$	$^{196}\text{Pt}(N=6)$			$^{194}\text{Pt}(N=7)$			$^{192}\text{Pt}(N=8)$		
	Exp	Th1	Th2	Exp	Th1	Th2	Exp	Th1	Th2
$0^+(0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^+(1)$	356	320	310	329	325	284	317	296	264
$4^+(2)$	877	844	880	811	807	810	785	763	730
$6^+(3)$	1527	1530	1710	1412	1409	1578	1366	1357	1398
$8^+(4)$	2255	2297	2800	2100	2155	2588	2019	2006	2268
$10^+(5)$	2995	3001	4150				2519	2590	3340
$2^+(2)$	689	666	586	622	622	530	613	626	534
$3^+(3)$	1015	1149	1080	923	1013	978	921	1063	978
$4^+(3)$	1293	1250	1248	1230	1118	1138	1201	1142	1090
$5^+(4)$				1499	1601	1748	1482	1594	1680
$6^+(4)$	2009	1916	2170	1926	1759	1988	1869	1712	1848
$7^+(5)$							2113	2061	2584
$8^+(5)$				2689	2702	3080			

实验值取自文献[6,7].

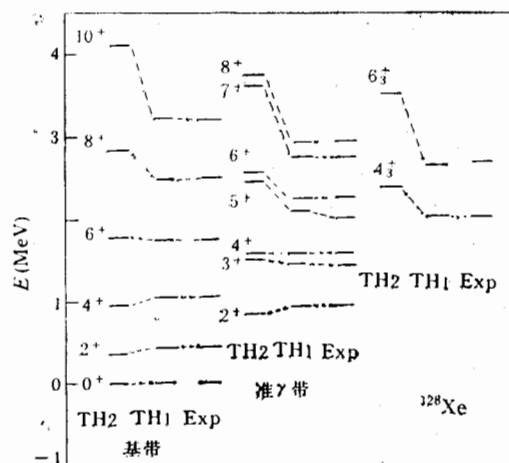


图1 理论计算能谱与实验能谱的比较

Exp 取自文献[8].

有规律地呈递增趋势。而三体势对能谱的修正值则随着量子数  $\tau$  的增高呈现有规律增大的趋向,从而能够十分有效地修正这种系统性偏离,使较高能端处理论与实验值的偏差大大减少了。同样,在准  $\gamma$  带中,理论计算与实验值也符合得很好,所谓 staggering 现象被不同程度地缓解了。这说明,引用三体势对  $O(6)$  能谱进行修正确实是一个十分有效的方法。为避免计算的复杂性和自由参数过多等因素,对其进行适当的简化处理具有一定的必要性和合理性。

从本文看,简化后的三体势  $V'$  是算符  $n_d$  的函数,因此,它不会造成  $O(5)$  对称性破缺,即引入修正项后,  $\tau$  仍然是好量子数。但  $V'$  对  $O(6)$  对称性造成了一定的破缺,它表现在能够使某些  $\sigma$  值不同而其它量子数相同的状态之间发生混合。若是在  $\sigma = N$  的

限制条件下求解, 由于排除了这种混合的可能性,  $V'$  在  $O(6)$  基中则是对角化的, 它不破坏  $O(6)$  对称性。就改善能谱而言, 不论引入的三体势对  $O(6)$  对称性造成破缺<sup>[2-4]</sup>, 还是不造成破缺(本文情况), 都能够给出较好的修正结果。

对照变形核的情况, 实验观测的转动能级与  $I(I+1)$  规律有系统的偏离。A. Bohr 与 B. R. Mottelson 曾认为<sup>[9]</sup>, 若基于保持核的轴对称性, 则转动能谱可以展开为  $I(I+1)$  的幂级数, 因而出现了对转动能谱  $I(I+1)$  规律修正的二参数、三参数以至四参数等能谱修正公式。从这个意义上看, 对于  $\gamma$ -soft 核, 导致对  $\tau(\tau+3)$  规律修正的能谱解析式(25)式, 可能是由于引入的三体势  $V'$  保持了  $O(5)$  对称性(在  $\sigma=N$  的条件下, 它还同时保持  $O(6)$  对称性)。对三体势作适当简化处理正是为了保证这种代数对称性的需要。因而能够推出对  $\tau(\tau+3)$  规律修正的三次幂级数公式。

最后要说明的是, 由于能级  $0_2^+$  与  $3_1^+$  同属于  $\tau=3$  状态, 因此, 本文仅用与  $O(5)$  量子数  $\tau$  有关的修正项计算出来的  $0_2^+$  能级位置总是处在  $3_1^+$  下方的。在这一点上, 文献[4]也得出此结论, 而实验观测却是  $0_2^+$  位置处在  $3_1^+$  之上。究竟应引入一个什么样的修正项能使理论与实验观测一致, 目前尚不清楚。但有一点, 这样的修正项应该与角动量有关。另外, 由于在  $\sigma=N$  的条件下,  $V'$  未造成  $O(6)$  破缺, 系统波函数不发生改变, 因此对  $E2$  跃迁等一些核性质无修正。

### 参 考 文 献

- [1] F. Iachello and A. Arima., *The Interacting Boson Model* (Cambridge University Press, 1987).
- [2] K. Heyde et al., *Phys. Rev.*, **C29**(1984)1420.
- [3] R.F. Casten et al., *Nucl. Phys.*, **A439**(1985)289.
- [4] 王黄生、廖继志, *高能物理与核物理*, **16**(1992)954.
- [5] T. Tamura et al., *Nucl. Data Sheets*, **41**(1984)413.
- [6] M. Sakai., *At. Data Nucl. Data Tables.*, **31**(1984)399.
- [7] V.S. Shirley et al., *Nucl. Data. Sheets*, **64**(1991)205.
- [8] R. Reinhardt et al., *Z. Phys.*, **A329**(1988)507.
- [9] A. Bohr and B.R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. II(Benjamin, New York, 1975).

## Three-Body Interaction Corrections on the $O(6)$ Energy Spectra

Shao Bin

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100037)

Received on June 28, 1993

### Abstract

The three-body interacting items are introduced in the IBM Hamiltonian and a simply corrected formula of the  $O(6)$  energy spectra is given. The calculations for some nuclei near  $A \sim 70, 130, 190$  regions show that the agreement between the theory and experimental data is greatly improved.

**Key words** three-body potential,  $O(6)$  energy spectra, quasi- $\gamma$  band, staggering phenomenon.