第 18 卷 第 11 期　　高能物理与核物理　　Vol. 18, No. 11
1994 年 11 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Nov., 1994

QED 中相互作用场的量子化*

王仁川　　朱栋培
(中国科学技术大学基础物理中心　合肥　230026)　(中国科学技术大学近代物理系　合肥　230026)
1993 年 8 月 25 日收到

摘　　要

提出在 QED 中利用自由场的量子化条件和场方程，可以全面解决独立和非独立的相互作用场 $\psi(x)$，$A_\mu(x)$ 的量子化问题. 证明了：(1) 当外规范场 $A_\mu^{ex}(x)\neq 0$ 时，$\psi(x)$ 与 $A_\mu(x)$ 相互独立，它与常规的场量子化方法一致. (2) 当 $A_\mu^{ex}(x)=0$ 时，$\psi(x)$ 与 $A_\mu(x)$ 不再相互独立，常规的量子化方法不再适用，而本文提出的方法继续有效. 并以 1+1 维 QED 作为实例.

关键词　非独立相互作用场，量子化，量子电动力学.

1　引　　言

常规的量子化条件是以 $\psi(x)$ 和 $A_\mu(x)$ 为相互独立场的前提下得出的，其不为零的(反)对易关系为[4,5]

$$\{\psi(\boldsymbol{x},t),\psi^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\quad [A_\mu(\boldsymbol{x},t),\Pi_\nu(\boldsymbol{y},t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{1}$$

其中 $\Pi_\mu(x)=\dot{A}_\mu(x)$，由于 $A_\mu(x)(\mu=0,1,\cdots 3)$ 之间不是完全独立，量子化下 Lorentz 规范条件是

$$\langle|\partial_\mu A^\mu(x)|\rangle=0. \tag{2}$$

常规的量子化条件 (1) 式反过来也可以作为量子场方程算子解是否正确的判据. 然而，它是否能推广到非独立的情况，至今没有明确的结论[1,2,6]，回答这一问题是本文目标之一. 全文安排如下：第 2 节，提出相互作用场另一条量子化途径，即用自由场量子化条件和场方程去解决相互作用场的量子化问题，其中并没有涉及 $\psi(x)$，$A_\mu(x)$ 是否独立问题，因而它不受独立与否的限制. 第 3 节证明了，$A_\mu^{ex}(x)\neq 0$ 时，两种量子化途径相互等价. 第 4 节讨论了，$A_\mu^{ex}(x)=0$ 时，非独立相互作用场 $\psi(x)$ 与 $A_\mu(x)$ 的量子化问题，并证明了常规量子化条件(1)与场方程的解不相容，从而明确回答了(1)式不能作为非独立的 $\psi(x)$，$A_\mu(x)$ 的量子化条件. 自然，把(1)式作为量子场方程的算子解的正确与否的判据也失去了意义. 第 5 节列举 QED_2 一个实例，作四节的说明. 最后是小结.

2　QED 中另一条量子化途径

QED 中，$\psi(x)$ 和 $A_\mu(x)$ 满足的运动方程是

* 国家自然科学基金和科学院 LWTZ-1298 资助.

$$\{\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x)) + m\}\psi(x) = 0,$$
$$\partial_\lambda\partial^\lambda A_\mu(x) = -j_\mu(x). \tag{3}$$

其中 $j^\mu(x) = ie\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$，对于规范场 $A_\mu(x)$用了 Lorentz 条件 $\partial_\lambda A^\lambda(x) = 0$（作为经典场），作为量子场即为公式(2)．(3)式也可以看成量子场的运动方程，只是省略了正规乘积(: :)记号．方程(3)的形式解是

$$A_\mu(x) = A_\mu^{ex}(x) - ie\int_{-\infty}^{+\infty} d^4y G^R(x-y)\bar{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y),$$
$$\psi(x) = \psi^{\mathrm{Free}}(x) + ie\int_{-\infty}^{+\infty} d^4y G_\psi^R(x-y)\gamma^\mu A_\mu^{ex}(y)\psi(y)$$
$$+ e^2\int_{-\infty}^{+\infty} d^4y_1 d^4y_2 G_\psi^R(x-y_1)G^R(y_1-y_2)\gamma^\mu\bar{\psi}(y_2)\gamma_\mu\psi(y_2)\psi(y_1). \tag{4}$$

其中 $A_\mu^{ex}(x)$ 和 $\psi^{\mathrm{Free}}(x)$ 满足自由场方程

$$\partial_\lambda\partial^\lambda A_\mu^{ex}(x) = 0,$$
$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi^{\mathrm{Free}}(x) = 0. \tag{5}$$

同样 $A_\mu^{ex}(x)$ 也必须满足 Lorentz 条件，$A_\mu^{ex}(x)$ 是非粒子自身激发的电磁势，代表外势．由公式(4)看出，当 $A_\mu^{ex}(x) = 0$ 时，$\psi(x)$ 与 $A_\mu(x)$不再是相互独立的场量．$G^R(x-y)$ 和 $G_\psi^R(x-y)$ 代表推迟的 Green 函数，满足如下方程：

$$\partial_\lambda\partial^\lambda G^R(x-y) = \delta^4(x-y),$$
$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)G_\psi^R(x-y) = \delta^4(x-y). \tag{6}$$

由(4)式的结构可知，$\psi(x)$ 与 $A_\mu(x)$均可作如下展开

$$A_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n A_\mu^{(n)}(x),\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n\psi^{(n)}(x). \tag{7}$$

将公式(7)代入(4)式，可得 $\psi(x), A_\mu(x)$ 各级的递推表示

$$A_\mu^{(0)}(x) = A_\mu^{ex}(x),\ \psi^{(0)}(x) = \psi^{\mathrm{Free}}(x),$$
$$\psi^{(N)}(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} d^4y G_\psi^R\gamma^\mu A_\mu^{(0)}(y)\psi^{(N-1)}(y)$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d^4y_1 d^4y_2 G_\psi^R(x-y_1)G^R(y_1-y_2)\gamma^\mu\sum_{m=0}^{N-2}\sum_{n=0}^{N-2-m}\bar{\psi}^{(n)}$$
$$\times(y_2)\gamma_\mu\psi^{(N-2-m-n)}(y_2)\psi^{(m)}(y_1),$$
$$A_\mu^{(N)}(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} d^4y G^R(x-y)\sum_{m=0}^{N-1}\bar{\psi}^{(m)}(y)\gamma_\mu\psi^{(N-1-m)}(y).$$
$$(N = 1, 2, 3, \cdots) \tag{8}$$

其中 $\psi^{(N)}(x)$ 中的第二项$N=1$时为零．(8)式表明一旦 $A_\mu^0(x)$，$\psi^0(x)$ 给出，相应的 $\psi^{(N)}(x)$ 和 $A_\mu^{(N)}(N = 1, 2, \cdots)$ 依次完全决定．公式(4)、(7)、(8) 同样适合于量子场，只要给出自由场 $\psi^{(0)}(x), A_\mu^{(0)}(x)$ 的量子化，高阶 $\psi^{(N)}(x), A_\mu^{(N)}(x)$ 的量子化问题也随之解决．自由场量子化条件是

$$\{\psi^{(0)}(\boldsymbol{x}, t), \psi^{(0)\dagger}(\boldsymbol{y}, t)\} = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), [A_\mu^{(0)}(\boldsymbol{x}, t), \Pi_\nu^{(0)}(\boldsymbol{y}, t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{9}$$

除(9)式之外还包括等于零的(反)对易子，以及 Lorentz 条件 $\langle|\partial_\lambda A^{0\lambda}(x)|0\rangle = 0$，由于 $\psi^{(0)}(x)$ 与 $A_\mu^{(0)}(x)$之间没有任何关系，它们之间总可以对易的．由 $\psi^{(N)}(x)$，$A_\mu^{(N)}(x)$

$(N=1,2,\cdots)$的量子化,最终导致 $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ 的量子化。这种量子化途径的优点是可以不涉及 $\psi(x)$ 与 $A_\mu(x)$是否是相互独立的场量。

3 两种量子化途径是相互等价的

场的二次量子化,是描述场的量子行为,是客观存在,因而与数学处理方式无关,即与量子化的途径无关,否则由自由场量子化推广到相互作用场就毫无意义,因而必须证明它们之间相互等价。在 Heisenberg 表象中,场算子方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t)=-i[\psi(\boldsymbol{x},t),\hat{H}],\quad \frac{\partial}{\partial t}\Pi_\mu(\boldsymbol{x},t)=-i[\Pi_\mu(\boldsymbol{x},t),\hat{H}]. \tag{10}$$

其中 $\hat{H}$ 是 QED 中总 Hamilton 量, $\Pi_\mu(x)=\dot{A}_\mu(x)$, 代入量子化条件 (1), (10) 式即为场的运动方程(3),其形式解仍为(4)式,它同样可以按(7)式作 e 的幂级数展开,其形式仍是(8)式。(7)式代入量子化条件(1)式可得 $\psi(x)$,$A_\mu(x)$ 各级对易或反对易关系,零级为

$$\{\psi^{(0)}(\boldsymbol{x},t),\psi^{(0)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),[A_\mu^{(0)}(\boldsymbol{x},t),\Pi_\nu^{(0)}(\boldsymbol{y},t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{11}$$

其余零级场量均可对易或反对易。高级项为

$$\sum_{K=0}^{N}\{\psi^{(K)}(\boldsymbol{x},t),\psi^{(N-K)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=0,$$

$$\sum_{K=0}^{N}[A_\mu^{(K)}(\boldsymbol{x},t),\Pi_\nu^{(N-K)}(\boldsymbol{y},t)]=0. \tag{12}$$

$$\cdots\cdots$$

零级量子化条件(11)式与自由场的量子化条件(9)式完全相同。采用公式 (9)。利用(8)式可以得到 $\psi^{(N)}(x)(N=0,1,\cdots)$和 $A_\mu^{(N)}(x)(N=0,1,2,\cdots)$ 之间的对易与反对易关系,并代入公式(12)中验算,如果满足其全部等式。则两种量子化的途径等效。问题是公式(12)包含了无穷多个等式,不可能通过逐级验算完成其证明,另外也无法使用归纳法,因而只能用反证法。假定 $\psi^{(N)}(x)$,$A_\mu^{(N)}(x)(N=0,1,\cdots)$ 不满足(12)式,很明显量子化条件(1)式与场方程解(4)式不相容,如果能证明这两者相容,说明原假定是错的。从而证明了两种量子化方案等效。引入仅仅依赖时间的酉变换 $U(t)$, 在U变换下场量 $\hat{O}$ 变成 $\hat{O}'$

$$\hat{O}'=U(t)\hat{O}U^\dagger(t), \tag{13}$$

其中 $\hat{O}$ 代表 $\psi(x)$,$\psi'^\dagger$,$A_\mu(x)$,$\Pi_\nu(x)$,$\hat{H}$,$\cdots$, 在(13)式变换下,量子化条件(1)式形式不变,其不为零项

$$\{\psi'(\boldsymbol{x},t),\psi'^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),[A'_\mu(\boldsymbol{x},t),\Pi'_\nu(\boldsymbol{y},t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{14}$$

如果 $U(t)$取下列形式[5]

$$U(t)=Te^{-i\int_{-\infty}^{t}\hat{H}'_I(t_1)\mathrm{d}t_1}, \tag{15}$$

其中 $\hat{H}'_I=U\hat{H}_IU^\dagger$, $\hat{H}_I=-ie\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}A_\mu(\boldsymbol{y},t)\bar{\psi}(\boldsymbol{y},t)\gamma^\mu\psi(\boldsymbol{y},t)$ 代表 Hamilton 量中相互作用部分。U 取(15)式形式,变换(13)式将 Heisenberg 表象换成相互作用表象,在相互作用表象下量子场方程(10)变成

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\boldsymbol{x},t)=-i[\psi'(\boldsymbol{x},t),H'_\psi(t)],\ \frac{\partial}{\partial t}\Pi'_\mu(\boldsymbol{x},t)=-i[\Pi'_\mu(\boldsymbol{x},t),H'_A(t)],\qquad(16)$$

其中 $\Pi'_\mu(x)=\frac{\partial}{\partial t}A'_\mu(x)=-i[A'_\mu(x),H'_A(t)]$，在量子化条件(14)式下，方程(16)即为 $\psi'(x),A'_\mu(x)$ 满足的自由场方程

$$\partial_\lambda\partial^\lambda A'_\mu(x)=0,$$
$$(\gamma^\mu\partial_\mu+m)\psi'(x)=0.\qquad(17)$$

显然，量子化条件(14)式与场方程(17)式是相容的。再经过 $U^{-1}(t)$变换，量子化条件(14)式变成(1)式，运动方程(17)式变成(3)式，它们自然也是相容的。因此两种量子化途径等效得到证明。

4　非独立相互作用场的量子化

由(4)式表明，当 $A^{ex}_\mu(x)=0$ 时，$A_\mu(x)$ 与 $\psi(x)$不再相互独立。为了显示与 $A^{ex}_\mu(x)\neq 0$ 时的 $\psi(x)$的区别，将 $\psi(x)$记为 $\Psi(x)$，(4)式变为

$$A_\mu(x)=-ie\int_{-\infty}^{+\infty}d^4yG^R(x-y)\bar\Psi(y)\gamma_\mu\Psi(y),$$
$$\Psi(x)=\Psi^{(0)}(x)+e^2\int_{-\infty}^{+\infty}d^4y_1d^4y_2G^R_\psi(x-y_1)G^R(y_1-y_2)\gamma^\lambda\bar\Psi(y_2)\gamma_\lambda\Psi(y_2)\Psi(y_1).\qquad(18)$$

非独立场量的量子化仍可以用自由场量子化条件(9)式，只是现在的情况 $A^{(0)}_\mu(x)=0$，剩下不为零的项

$$\{\Psi^{(0)}(\boldsymbol{x},t),\Psi^{(0)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\qquad(19)$$

利用(19)式可以逐级将 $\Psi^{(N)}(x),A^{(N)}_\mu(x)(N=1,2,\cdots)$进行量子化

$$\Psi^{(N)}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}d^4y_1d^4y_2G^R_\psi(x-y_1)G^R(y_1-y_2)\gamma^\mu\sum_{m=0}^{N-2}\sum_{n=0}^{N-2-m}\bar\Psi^{(n)}$$
$$\times(y_2)\gamma_\mu\Psi^{(N-2-m-n)}(y_2)\Psi^{(m)}(y_1),$$
$$A^{(N)}_\mu(x)=-i\int_{-\infty}^{+\infty}d^4yG^R(x-y)\sum_{m=0}^{N-1}\bar\Psi^{(m)}(y)\gamma_\mu\Psi^{(N-1-m)}(y)$$
$$(N=1,2,\cdots).\qquad(20)$$

其中 $\Psi^{(1)}(x)=0$，由于有(7)式，$A_\mu(x),\psi(x)$ 量子化问题相应随之解决。下面的问题是量子化条件(1)式能否推广到非独立的相互作用场？答案是否定的，以下将证明量子化条件(1)式与场方程(3)所确定的解(18)是不相容的。换言之 $\{\Psi^{(N)}(x),N=1,2,\cdots\}$和 $\{A^{(0)}_\mu(x)=0,A^{(N)}_\mu(x),N=1,2,\cdots\}$不可能满足公式(11),(12)中的全部等式.最明显不满足之处是，量子化条件(1)式要求 $A^{(0)}_\mu(x)\neq 0$，并有 $[A^{(0)}_\mu(\boldsymbol{x},t),\dot A^{(0)}_\nu(\boldsymbol{y},t)]=i\delta_{\mu\nu}\delta^3\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，而非独立相互作用场 $A^{(0)}_\mu(x)=0$，关系(11)对于规范场部分不满足并不能说明对粒子场部分同样也不满足，对于 $\Psi(x)$能否采用量子化条件(1)式？答案仍是否定的，也就是说

$$\{\Psi(\boldsymbol{x},t),\Psi^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}\neq\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\qquad(21)$$

(21)式可以用反证法证明成立，如果(21)式不成立，有

$$\{\Psi(\boldsymbol{x},t),\Psi^{\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{22}$$

用 e 的幂级数展开 $\Psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{n}\Psi^{(n)}(x)$ 代入(22)式得

$$\begin{aligned}&\{\Psi^{(0)}(\boldsymbol{x},t),\Psi^{(0)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\\&\sum_{K=0}^{N}\{\Psi^{(K)}(\boldsymbol{x},t),\Psi^{(N-K)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=0\qquad(N=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{23}$$

$\psi(x)$ 是 $A_{\mu}^{(0)}(x)\neq 0$ 时粒子场，满足量子化条件(1)式，有

$$\{\psi(\boldsymbol{x},t),\psi^{\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

用 e 的幂级数展开式(7)代入上式，得与(23)式形式完全相同的关系式

$$\begin{aligned}&\{\psi^{(0)}(\boldsymbol{x},t),\psi^{(0)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\\&\sum_{K=0}^{N}\{\psi^{(K)}(\boldsymbol{x},t),\psi^{(N-K)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}=0\quad(N=1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{24}$$

以下将证明公式(23)与(24)是不相容的. 由公式(4)，(8)与(18)，(20)比较得

$$\begin{aligned}&\psi^{0}(x)=\Psi^{(0)}(x),\\&\psi^{(1)}(x)=\Psi^{(1)}(x)+i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^{4}yG_{\psi}^{R}(x-y)A_{\mu}^{(0)}(y)\gamma^{\mu}\Psi^{(0)}(y),\\&\psi^{(2)}(x)=\Psi^{(2)}(x)+i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^{4}yG_{\psi}^{R}(x-y)A_{\mu}^{(0)}(y)\gamma^{\mu}\Psi^{(1)}(y)\\&\qquad-\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^{4}y_{1}\mathrm{d}^{4}y_{2}G_{\psi}^{R}(x-y_{1})A_{\mu}^{(0)}(y_{1})\gamma^{\mu}G_{\psi}^{R}(y_{1}\\&\qquad-y_{2})A_{\nu}^{0}(y_{2})\gamma^{\nu}\Psi^{(0)}(y_{2}),\\&\cdots\cdots\end{aligned} \tag{25}$$

公式(25)是用 $\Psi^{(n)}(x)(n=0,1,2,\cdots)$ 和 $A_{\mu}^{(0)}(x)$ 通过逐级代换将 $\psi^{(N)}(x)$ 表示出来，用公式(23)计算

$$E^{(N)}(x,y)=\sum_{K=0}^{N}\{\psi^{(K)}(\boldsymbol{x},t),\psi^{(N-K)\dagger}(\boldsymbol{y},t)\}. \tag{26}$$

如果 $E^{(N)}(x,y)=0,(N=1,2,\cdots)$，它表示公式(23)与(24)是相容的，反之公式(26)中只要找到一个 $E^{(N)}(x,y)\neq 0$，则(23)式与(24)式就不相容，由于(24)式已被证明是正确的，那么(23)式必定是错的，即原假定公式(21)不成立是错的，由此得出 $\Psi(x)$ 仍不能采用量子化条件(1)式. 经过冗长的计算可得

$$\begin{aligned}&E^{(1)}(x,y)=0,\\&E^{(2)}(x,y)=i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^{4}z_{1}\mathrm{d}^{4}z_{2}\theta(t-t_{1})\theta(t-t_{2})S(x-z_{1})D(z_{1}-z_{2})\gamma^{\lambda}\\&\qquad\cdot[iS(z_{1}-z_{2})-\psi^{(0)}(z_{1})\psi^{(0)\dagger}(z_{2})\gamma^{4}]\gamma_{\lambda}S(z_{2}-y)\gamma^{4}\neq 0.\end{aligned} \tag{27}$$

(21)式成立.

5 QED$_2$ 的实例[7]

能严格给出算子解的是零质量的 QED$_2$，其最小电磁耦合的拉氏量是

$$\mathscr{L} = i:\bar{\psi}(x,A)\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + ieA_{\mu})\psi(x,A): - \frac{1}{4}:F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x): \tag{28}$$

其 γ 矩阵选择如下: $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = i\sigma_2$, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = -\sigma_3$, 由于有 $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$, 所以度规张量为

$$g_{\mu\nu} = (2\delta_{\mu,0}\delta_{\nu,0} - 1)\delta_{\mu\nu}. \tag{29}$$

场满足的运动方程是[5]

$$\begin{aligned} &i\gamma^{\mu}:(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}(x))\psi(x,A): = 0, \\ &\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}A^{\mu}(x) = e:\bar{\psi}(x,A)\gamma^{\mu}\psi(x,A):. \end{aligned} \tag{30}$$

Lorentz 规范条件是 $\langle|\partial_{\lambda}A^{\lambda}(x)|\rangle = 0$,(27)式的形式解为

$$A_{\mu}(x) = A_{\mu}^{ex}(x) + e\int_{-\infty}^{+\infty} d^2y G^R(x-y):\bar{\psi}(y,A)\gamma_{\mu}\psi(y,A):. \tag{31}$$

$G^R(x-y)$ 是推迟的 Green 函数,满足 $\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}G^R(x-y) = \delta^2(x-y)$,其形式为[3]

$$G^R(x-y) = \frac{1}{2}\theta[(x-y)^+]\theta[(x-y)^-]. \tag{32}$$

θ 是阶梯函数, $x^+ = x^0 + x^1$, $x^- = x^0 - x^1$ 是光锥坐标, 将 (28) 式代入 (27) 式中的 Dirac 方程,得到 $\psi(x,A)$满足的方程

$$i\gamma^{\mu}:\left\{\partial_{\mu} + ieA_{\mu}^{ex}(x) + ie^2\int_{-\infty}^{+\infty} d^2y G^R(x-y)\bar{\psi}(y,A)\gamma_{\mu}\psi(y,A)\right\}\psi(x,A):=0 \tag{33}$$

公式(33)对 $\psi(x,A)$而言是一个封闭的(非线性)微分、积分方程,一般情况下不可能严格求解. 然而,对零质量的 1+1 维的 QED 是能严格解出的. 非独立相互作用场, $A_{\mu}^{ex}(x) = 0$,对 $\psi(x,A)$量子化,只能采用自由场量子化方法, 1+1 维自由费米子场的量子化条件是[1]

$$\{\psi(x^1,t), \psi^{\dagger}(y^1,t)\} = \delta(x^1 - y^1). \tag{34}$$

其中 $\psi(x)$满足 1+1 维零质量的 Dirac 方程

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) = 0. \tag{35}$$

场方程(30)的严格解可以表示成[2]

$$\psi(x,A) = e^{i\sqrt{\pi}\gamma^5\tilde{\Sigma}^+(x)}\psi(x)e^{i\sqrt{\pi}\gamma^5\tilde{\Sigma}^-(x)} = :e^{i\sqrt{\pi}\gamma^5\tilde{\Sigma}(x)}\psi(x):. \tag{36}$$

其中 $\tilde{\Sigma}(x) = \tilde{\Sigma}^+(x) + \tilde{\Sigma}^-(x)$. $\tilde{\Sigma}^+(x)$,$\tilde{\Sigma}^-(x)$ 分别表示某种量子场在坐标空间中的产生和湮没算符. $\tilde{\Sigma}(x)$ 与 $A_{\mu}(x)$的关系为

$$\varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\Sigma}(x) = \frac{e}{\sqrt{\pi}}A_{\mu}(x), \tag{37}$$

其中 $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$, $\varepsilon_{01} = 1$, $\tilde{\Sigma}$ 的构造是[3]

$$\begin{aligned} &\tilde{\Sigma}(x) = \frac{e^2}{4\pi}\{x^+\Xi(x^-) + x^-\Xi(x^+)\}, \\ &\Xi(x^+) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}}\int_{K\to 0}^{\infty}(p^1)^{-3/2}dp^1[\hat{c}^*(-p^1)e^{ip^1x^+} - \hat{c}(-p^1)e^{-ip^1x^+}], \\ &\Xi(x^-) = \frac{-i}{2\sqrt{\pi}}\int_{K\to 0}^{\infty}(p^1)^{-3/2}dp^1[\hat{c}^*(p^1)e^{ip^1x^-} - \hat{c}(p^1)e^{-ip^1x^-}]. \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $\hat{c}^*(p^1)$，$\hat{c}(p^1)$ 分别代表某种玻色子的产生和湮没算符在动量空间中的表示，其不为零的对易子

$$[\hat{c}(p^1),\ \hat{c}^*(q^1)] = \delta(p^1 - q^1). \tag{39}$$

$\hat{c}(p^1)$ 与自由的零质量的正反费米子产生和湮没算符 $\hat{a}^*(p^1),\hat{a}(p^1),\hat{b}^*(p^1),\hat{b}(p^1)$ 的关系为[1]

$$\begin{aligned}\hat{c}(p^1) = \frac{i}{\sqrt{|p^1|}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk^1\{\theta(k^1p^1)[\hat{b}^*(k^1)\hat{b}(k^1+p^1) - \hat{a}^*(k^1)\hat{a}(k^1+p^1)]\\ + \theta[k^1(p^1-k^1)]\hat{a}(p^1-k^1)\hat{b}(k^1)\}.\end{aligned} \tag{40}$$

其自由费米子满足的 Dirac 方程(35)的解是

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp^1[\hat{a}^*(p^1)e^{ipx} + \hat{b}(p^1)e^{-ipx}]u(p^1),$$

其中 $u(p^1) = \begin{pmatrix}\theta(-p^1)\\ \theta(p^1)\end{pmatrix}$，$px = p^0x^0 - p^1x^1$，$p^0 = |p^1|$，与(34)式等价的量子化条件是

$$\begin{aligned}\{\hat{a}(p^1),\ \hat{a}^*(q^1)\} = \delta(p^1 - q^1),\\ \{\hat{b}(p^1),\hat{b}^*(q^1)\} = \delta(p^1 - q^1).\end{aligned} \tag{41}$$

其余均可以反对易，利用公式(38)—(41)可以找到 $\tilde{\Sigma}(x),\tilde{\Sigma}(y),\psi(x),\psi^\dagger(y)$ 之间的对易关系[3]

$$\begin{aligned}&[\tilde{\Sigma}(x),\tilde{\Sigma}(y)] = \frac{1}{4i}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2[(x-y)^2]^2D(x-y),\\ &[\tilde{\Sigma}(x),\psi(y)] = -\frac{e^2}{4\sqrt{\pi}}(x-y)^2\{\widetilde{D}(x-y) + \gamma^5D(x-y)\}\psi(y),\\ &[\tilde{\Sigma}(x),\psi^\dagger(y)] = \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}}(x-y)^2\psi^\dagger(y)\{\widetilde{D}(x-y) + \gamma^5D(x-y)\}.\end{aligned} \tag{42}$$

其中 $D(\xi) = \frac{1}{2}\varepsilon(\xi^0)\theta(\xi^2)$，$\widetilde{D}(\xi) = -\frac{1}{2}\varepsilon(\xi^1)\theta(-\xi^2)$，而 $\varepsilon(\xi^a) = \theta(\xi^a) - \theta(-\xi^a)$，

在 $x^0 = y^0 = t$，$x^1 \neq y^1$ 情况下，波函数分量交换关系为

$$\begin{aligned}&\psi_1(x^1,t,A)\psi_1^*(y^1,t,A) = -e^{-i\frac{e^2}{4}\varepsilon(x^1-y^1)(x^1-y^1)^2}\psi_1^*(y^1,t,A)\psi_1(x^1,t,A),\\ &\psi_2(x^1,t,A)\psi_2^*(y^1,t,A) = -e^{i\frac{e^2}{4}\varepsilon(x^1-y^1)(x^1-y^1)^2}\psi_2^*(y^1,t,A)\psi_2(x^1,t,A),\\ &\{\psi_j(x^1,t,A),\psi_k^*(y^1,t,A)\} = 0 \quad j \neq k.\end{aligned} \tag{43}$$

显然没有 $\{\psi(x^1,t,A),\psi^\dagger(y^1,t,A)\} = \delta(x^1 - y^1)|_{x^1\neq y^1} = 0$ 这样简单的关系.

6 结束语

QED 中，很少人注意到通常场的正则量子化所得量子化条件 (1)式，是以 $\psi(x)$，$A_\mu(x)$ 为相互独立场做前提. 至于 $\psi(x)$，$A_\mu(x)$ 不相互独立，即公式(4)中 $A_\mu^{ex}(x)=0$ 时，$A_\mu(x)$ 完全由 $\psi(x)$决定. 通常场正则量子化方法是否仍适用至今没有人正面给予回答. 然而，场满足运动方程(3)的结构，容许作(7)式的展开，另一条不涉及 $\psi(x)$，$A_\mu(x)$

之间是否独立的量子化途径存在，即由自由场量子化导致 $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ 的量子化[1-3]，同样其合法性也没有得到证明，我们的研究圆满地回答这些问题，并为自由场的量子化途径提供理论根据。在完成本文中与 C. Y. Wong 和 C. C. Shih 教授进行了许多有益的讨论。

参 考 文 献

[1] B. Klaiber, Lectures in Theoretical Physics, Boulder Lectures (1967).
[2] J. H. Lowenstein and Swieca, *Ann. Phys.* (N. Y.), **68**(1971) 172.
[3] R. C. Wang, S. W. Zhang and C. Y. Wong, "The Structure of Solving Field in Two Dimensional QED (I)" to be Published.
[4] W. Pauli, "Pauli Lecture On Physics: Volume 6, Selected Topics in Field Quantization" Edited by C. P. Enz, (1973).
[5] S. N. Gupta, "Quantum Electrodynamics"中译本，北师大出版社.
[6] P. A. M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics" Yeshiva Univ. New York, (1964).
[7] E. Abdalla et al, "Non-Perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory", World Scientific, Singapore, (1991).

On the Quantization of Interacting Fields in QED

Wang Renchuan

(*Center For Fundamental Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Zhu Dongpei

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Received on August 25, 1993

Abstract

We propose a new quantization scheme with which and the equation of motion the quantization problem of both independent and dependent interacting fields in QED can be solved simultaneously. When the external gauge field $A_\mu(x) \neq 0$ (i.e. the Fermion field $\psi(x)$ and the electromagnetic field $A_\mu(x)$ are independent) our scheme gives the same result as the usual quantization approach. When the external gauge field is absent the usual quantization conditions are failed since it is not compatible with the equation of motion, meanwhile our scheme is still valid. These results are demonstrated with solvable QED in 1 + 1 dimension.

Key words dependent interacting fields, quantization, QED