

快报

在 e^+e^- 对撞过程中 τ 轻子对产生的阈行为*

吴济民 赵佩英

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

摘 要

利用结构函数方法, 足够精确地给出了在 e^+e^- 对撞过程中考虑了各种 QED 辐射修正效应后的 τ 轻子产生的阈行为解析表达式 (这里包括了始态辐射修正、真空极化效应、库仑效应和终态修正效应等), 这个阈行为用来为 BES 测量 τ 轻子的质量值。

τ 轻子衰变之谜已被人们知道好多年了。按照标准模型, 考虑了足够精确的电弱修正之后, 衰变分支比 $BR(\tau \rightarrow l\nu\bar{\nu})$ 与 τ 轻子寿命之间应有如下的线性关系^[1]

$$BR(\tau \rightarrow l\nu\bar{\nu}) = \tau_{\text{tau}} \frac{G^2 m_\tau^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_l^2}{m_\tau^2}\right) \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_l^2}{m_W^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha(m_\tau)}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - x^2\right)\right],$$

其中

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 8x + 8x^2 - x^4 - 12x^2 \ln x, \\ \alpha^{-1}(m_\tau) &= 133.3. \end{aligned} \quad (1)$$

如果用现有粒子表实验数据代入^[2], 即取

$$\begin{aligned} m_\tau &= 1784.1^{+3.7}_{-3.6} \text{MeV}, \\ \tau_{\text{tau}} &= (3.03 \pm 0.08) \times 10^{-13} \text{秒}, \\ BR(\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu}) &= (17.7 \pm 0.04)\%, \end{aligned} \quad (2)$$

并保持弱带电流的普适性 ($e-\mu-\tau$ 普适性)

$$G = G_\mu = (1.16637 \pm 0.00002) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}, \quad (3)$$

就可以发现实验点偏离此线性关系达到两个标准偏差, 为了解开这个谜, 人们首先怀疑过去测得的 m_τ 值和 (或者) τ_{tau} 值不准确。为此, 北京谱仪组在 τ 对产生阈附近测量 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 的阈行为, 精确地测得了 m_τ 值, 这是一项很有意义的工作^[3]。在过去国外已有的四组实验工作中^[4], e^+e^- 对撞总能量远离 τ 对产生阈, 靠外推方法求得 m_τ 值。其中只有一组工作考虑了辐射修正效应。而当时的辐射修正理论又比较粗糙。因此, 导致实验结果不准确。

现在, 重新测量 m_τ 值时, 当实验上准确测得 τ 对产生的阈行为之后, 要用考虑了足

本文 1992 年 8 月 31 日收到。

* 国家自然科学基金资助。

够精确 QED 辐射修正的理论预言阈行为去贴合实验结果,才能确定精确的 m_τ 值. 为此,本文将用结构函数方法,尽可能精确地给出这样的理论预言(并且是解析的结果),用来为 BES 测量 m_τ 值. 这里须要考虑下列修正因素: 始态辐射修正、真空极化效应,库仑效应和终态修正. 已有的研究表明^[9], 始态之间的 QED 干涉效应对总截面的影响很小,可以略去. $\tau^+\tau^-$ 对在低能下形成 $\tau^+\tau^-$ 束缚态 (tauonium), 它的基态束缚能为 $|E| = m\alpha^2/4 \approx 24\text{keV}$, 这一效应对阈行为的影响也可以略去.

按照结构函数方法,这一过程的截面是:

$$\sigma(s) = \int^1 dx_1 \int^1 dx_2 D_e(x_1, s) D_e(x_2, s) \sigma_A(x_1 x_2 s) \cdot (K \text{ 因子}), \quad (4)$$

其中 $D_e(x, s)$ 和 $D_{\bar{e}}(x, s)$ 是能量尺度为 s 、纵向动量份额为 x 的电子、正电子分布函数.

$$K \text{ 因子} = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right). \quad (5)$$

(4)式积分下限由 $x_1 x_2 s = 4m_\tau^2$ 确定.

让我们引入新变量 x :

$$x_1 x_2 = 1 - x, \quad (6)$$

则截面可改写成:

$$\sigma(s) = \int_0^{1 - \frac{4m_\tau^2}{s}} dx F(x, s) \sigma_A((1-x)s) \cdot (K \text{ 因子}), \quad (7)$$

其中辐射因子 $F(x, s)$ 是

$$F(x, s) = \int_{1-x}^1 \frac{dx_2}{x_2} D_e\left(\frac{1-x}{x_2}, s\right) D_{\bar{e}}(x_2, s), \quad (8)$$

已在文献[7]中给出了它足够精确的解析表达式

$$F(x, s) = e^{(\frac{3}{4}-c)\beta} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\beta-1+i}, \quad (9)$$

其中, c 为欧拉常数,展开系数 a_i ; 见[7].

$$\beta = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{s}{m_\tau^2} - 1 \right), \quad (10)$$

有关各项修正包含在 σ_A 中.

$$\sigma_A(s) = \sigma_0(s) F_c \cdot F_{j\nu}. \quad (11)$$

其中,裸截面 σ_0 和库仑修正效应^[8]分别是:

$$\sigma_0(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \nu \frac{3-\nu^2}{2}, \quad (12)$$

$$F_c = \frac{\frac{\pi\alpha}{\nu}}{1 - e^{-\pi\alpha/\nu}}. \quad (13)$$

终态修正^[9]和真空极化效应^[10]给出,

$$F_{j\nu} = 1 + \frac{\pi\alpha}{\nu} \left\{ (1 + \nu^2) \left[\ln \frac{1+\nu}{2} \cdot \ln \frac{1+\nu}{1-\nu} + 2l \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi^2}{3} + 2l\left(\frac{1+\nu}{2}\right) - 2l\left(\frac{1-\nu}{2}\right) - 4l(\nu) + l(\nu^2) \Big] \\
& + \left[\frac{11}{8}(1+\nu^2) - 3\nu + \frac{1}{2} \frac{\nu^4}{3-\nu^2} \right] \ln\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \\
& + 6\nu \ln\left(\frac{1+\nu}{2}\right) - 4\nu \ln \nu + \frac{3}{4} \nu \frac{5-3\nu^2}{3-\nu^2} \Big\} \\
& - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{i=e,\mu,\tau} \left\{ \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4m_i^2}{s}\right) \right. \\
& \left. + \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{s}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4m_i^2}{s}\right) \right) \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{s}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4m_i^2}{s}}} \right) \right\}, \quad (14)
\end{aligned}$$

其中, $l(x)$ 是双对数函数. ν 为终态 τ 轻子速度 ($c=1$). 由于有

$$(1-x)s = 4E_\tau^2 = \frac{4m_\tau^2}{1-\nu^2}, \quad (15)$$

而我们又是在 τ 对产生阈以上附近研究问题, 所以, ν 与 x 都是小量. 我们就把积分(7)中的被积函数展成 x 的幂级数后完成积分. 为此, 改写并展开 $\sigma_A(s)$ 为:

$$\begin{aligned}
\sigma_A(s) &= \frac{\pi^2 \alpha^3}{6m_\tau^2} F_1(\nu) \cdot F_2(\nu) \cdot F_3(\nu) \\
&= \frac{\pi^2 \alpha^3}{6m_\tau^2} \{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots \}, \quad (16)
\end{aligned}$$

其中

$$F_1(\nu) \equiv (1-\nu^2)(3-\nu^2), F_2(\nu) \equiv \frac{1}{1-e^{-\pi\alpha/\nu}}, F_3(\nu) \equiv F_{f\nu},$$

以及各展开系数:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= F_1 F_2 F_3 |_{\nu=\nu_0}, \\
\alpha_1 &= \frac{\partial}{\partial x} (F_1 F_2 F_3) |_{\nu=\nu_0}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_1 F_2 F_3) |_{\nu=\nu_0}, \\
\alpha_3 &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (F_1 F_2 F_3) |_{\nu=\nu_0}, \\
&\dots\dots \quad (17)
\end{aligned}$$

这里, $F_1 F_2 F_3$ 都是 ν 的显函数, 但 ν 又是 x 的函数, 故可按隐函数方法对 x 作展开, 例如,

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \nu} (F_1 F_2 F_3) + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} (F_1 F_2 F_3) \right]_{\nu=\nu_0},$$

以及有:

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = -\frac{4m_\tau^2}{s} \frac{1}{2\nu_0}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = -\left(\frac{4m_\tau^2}{s} \right)^2 \frac{1}{\nu_0^3} - 2 \left(\frac{4m_\tau^2}{s} \right) \frac{1}{\nu_0}, \quad (18)$$

这些都是 s, m_τ^2 的已知函数。在 $x = 0$ 处的 v^2 值为:

$$v_0^2 = 1 - \frac{4m_\tau^2}{s}. \quad (19)$$

把(9)、(16)式一齐代入(7)式,得到所要求的阈行为:

$$\begin{aligned} \sigma(s, m_\tau) = & \frac{\pi^2 \alpha^3}{6m_\tau^2} e^{(\frac{3}{2}-\epsilon)\beta} \left\{ a_0 \alpha_0 \frac{1}{\beta} v_0^{2\beta} + (a_0 \alpha_1 + a_1 \alpha_0) \frac{1}{1+\beta} v_0^{2(\beta+1)} \right. \\ & + (a_0 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_0) \frac{1}{2+\beta} v_0^{2(\beta+2)} \\ & + (a_0 \alpha_3 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + a_3 \alpha_0) \frac{1}{3+\beta} v_0^{2(\beta+3)} \\ & \left. + (a_0 \alpha_4 + a_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_1 + a_4 \alpha_0) \frac{1}{4+\beta} v_0^{2(\beta+4)} + \dots \right\} \\ & \cdot (K \text{ 因子}) \quad (20) \end{aligned}$$

此级数收敛很快。例如,取 $m_\tau = 1776.9 \text{ MeV}$, $E_b = 1.8 \text{ GeV}$, 展开式各级依次给出 1.3630 nb , -0.0435 nb , -0.0063 nb , -0.0020 nb , -0.0009 nb 。取5级展开结果已使误差小于 6×10^{-4} 。

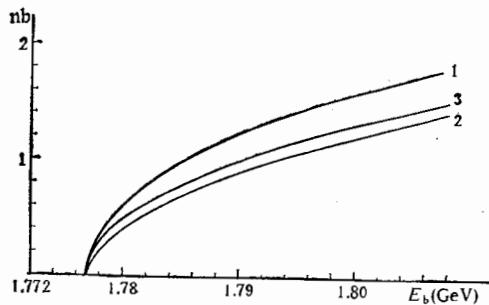


图1 τ 轻子对产生的阈行为(见正文说明)

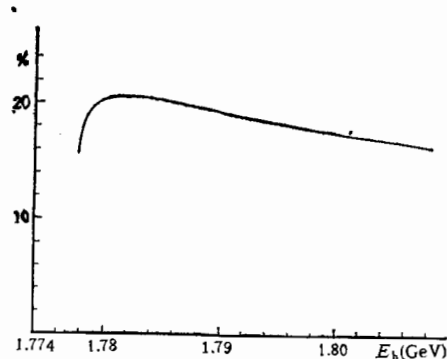


图2 考虑各种 QED 辐射修正效应后,截面下降的相对值(以裸截面为标准)

图1给出阈行为(20)式的结果。(取 $m_\tau = 1776.9 \text{ MeV}$), 曲线1为没有任何修正的裸截面。曲线2为再加入了始态修正后的行为。由于 s/m_τ^2 比值大, 始态 e^+e^- 很容易发生辐射, 明显地降低截面值。曲线3为再加入库仑效应后的行为。低能 $\tau^+\tau^-$ 异性带电粒子相吸, 导致曲线3比曲线2提高。再考虑真空极化效应和其余的终态修正, 使截面值在曲线3基础上有1%左右的变化。(难在图1上画出, 故未画出)。下面给出一例, 看各种效应导致截面变化的大小。($E_b = 1.8 \text{ GeV}$, $m_\tau = 1776.9 \text{ MeV}$)。

裸截面	1.5916 nb
裸截面+始态修正	1.2165 nb
裸、始+库仑修正	1.3101 nb
裸、始、库+终态修正	1.2969 nb
裸、始、库、终+真空极化	1.3100 nb

这里, 我们已经考虑了尽可能精确的各种 QED 修正, 精确到使截面相对误差远小于 1%。这对确定 m_τ 值来说足够精确了。图 2 给出 QED 辐射修正使得截面值下降的相对值, 它是 s 的函数。在阈附近, 一般来说, QED 辐射修正使裸截面下降 15—20%。

Voloshin^[10] 曾提出, τ 对产生阈行为应取下列形式(裸截面、库仑修正、终态修正),

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-) = \sigma_0 F_c F_r,$$

并说始态修正效应是“十分标准的”。与他一般性地讨论相比, 我们首先精确和解析地求得辐射因子 $F(x, s)^{[6,7]}$ 就比以往更精确地考虑了始态修正。进而, 本文又给出解析的阈行为表达式。显然, 本文结果精确, 实际可用, 并已在 BES 测量中应用。

本文作者感谢与王平同志的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] W. Marciano and A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 1815.
- [2] Particle Data Group, *Phys. Lett.*, **239B**(1990), 1.
- [3] J. Z. Bai et al., (BES Collaboration) *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 3021.
- [4] R. Brandelik et al., *Phys. Lett.*, **73B**(1978), 109. (DASP)
W. Bartel et al., *Phys. Lett.*, **77B**(1978), 331. (DESY)
W. Bacino et al., *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 13. (DLCO)
C. A. Blocker, LBL-10801 (Thesis) (Mark II)
- [5] F. A. Berends, K. J. F. Gaemers, R. Gastmans, *Nucl., Phys.*, **B57**(1973), 381.
- [6] 吴济民, 高能物理与核物理, **16**(1992), 518.
- [7] 吴济民, “在 e^+e^- 对撞过程中辐射因子的严格计算”, 高能物理与核物理 待发表.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* 3rd. (Pergamon Press 1977) p. 123.
- [9] J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields* Vol. III (Addison-Wesley, 1989) p. 109.
- [10] M. B. Voloshin, TPI-MINN-89/33-T.

Analytic Approximation for Process $e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-$ Cross Section Near Threshold

WU JIMIN ZHAO PEIYING

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039)

ABSTRACT

In the structure function approach, we calculate the threshold behaviours for $e^+ + e^- \rightarrow \tau^+ + \tau^-$, which including QED radiative corrections from initial correction, vacuum polarization effect, Coulomb effect and final state correction. This theoretical prediction for threshold behaviours of τ -pair production is useful for BES new measurement of lepton τ mass.