第 17 卷 第 10 期
1993 年 10 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 10
Oct., 1993

束流光学中的变换群
（Ⅰ）一般理论

郁庆长

（中国科学院高能物理研究所，北京 100039）

摘　要

本文讨论了带电粒子束在束流光学系统中运动时发射相图与粒子分布函数的变换，研究了这些变换组成的各种群——束传输群（*BT* 群）、相图保持群（*CP* 群）与分布保持群（*DP* 群）等. 束流光学的基本问题通常可归结为求一个变换的本征相图与求能保持一个发射相图形状不变的变换这样两类问题.

在束流光学中传统的数学工具是微分方程与线性代数. 在处理线性问题时这些工具是得心应手的. 但在研究非线性问题时却遇到了一些困难. 近年来人们对非线性力学的兴趣日益增加. 特别是由于超导加速器与强流束装置的发展，非线性束流光学的研究变得更为重要[1]. 人们开始利用其它的数学工具来探索这方面的问题. 其中 Dragt 提出的 Lie 代数方法[2,3]和 Berz 提出的微分代数方法[4,5]取得了引人注目的成就并已运用于超大型对撞机的设计.

在近代物理的发展中群论起了极重要的作用. 在 Dragt 的方法中也涉及了 Lie 群. 本文试图利用群论来进一步讨论束流光学中的变换.

一、粒子运动状态的变换

一个经典粒子的运动状态可用其位置与正则动量来描述. 为了方便可以把它写成列矢量形式

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\p_1\\x_2\\p_2\\x_3\\p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\p_x\\y\\p_y\\z\\p_z\end{pmatrix}. \tag{1}$$

此处采用直角坐标系(x,y,z)，p_x,p_y,p_z 是正则动量的三个分量.

本文 1992 年 7 月 29 日收到.

粒子的运动服从 Hamilton 正则方程

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2,3. \tag{2}$$

此处 H 为 Hamilton 函数，字母上的圆点表示对时间 t 的导数. 上式可改写为[3]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = - :H: \boldsymbol{x} = -[H, \boldsymbol{x}]. \tag{3}$$

此处 $:H:$ 是一个 Lie 算符，[ ]为 Poisson 括号，

$$[f,g] = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

设 $t=0$ 与 $t=t$ 时粒子的状态为 x_0 与 x，记由 x_0 到 x 的变换为

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}_0. \tag{5}$$

当 H 不依赖于时间 t 时

$$T = \exp(-t:H:). \tag{6}$$

由于变换 T 遵循 Hamilton 正则方程，它是一个辛变换. 对于六维相空间 $(x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3)$ 中任一封闭曲线，积分和

$$\sum_{i=1}^{3}\oint p_i \mathrm{d}x_i \tag{7}$$

在变换中保持不变[6].

上述方法用于束流光学时，常用束轴方向的坐标 z 代替时间 t 作为自变量. 这里束轴是束中参考粒子的运动轨迹. 在新的六维相空间中 $x_3 = t - t_0$, $p_3 = H_0 - H$, t_0 与 H_0 是参考粒子的 t 与 H 值. 而新的 Hamilton 函数 $K = -p_z$.

二、发射相图的变换　本征相图

在束流光学中人们所关心的不是个别粒子的运动，而是束粒子在六维相空间中所占据的区域的变化. 通常称此区域为发射相图. 设一个束流光学单元前后束的发射相图分别为 $\mathscr{E}_0$ 与 $\mathscr{E}$，用变换 T 表示它们的关系：

$$\mathscr{E} = T\mathscr{E}_0. \tag{8}$$

变换 T 把区域 $\mathscr{E}_0$ 中每一点变换到区域 $\mathscr{E}$ 中相应的点，它描述了这一单元的束流光学特性. 这里不考虑束在单元内部的运动状况. 显然可能有多种不同的单元对应着同一变换. 另一方面，对于某些变换却难于找到与其对应的单元.

所有保持式(7)不变的变换组成一个群，称它为面积保持群或 AP 群. 束流光学中所有可能的变换组成束传输群或 BT 群. 它是 AP 群的子群. 这些变换有两个特点：(1) 原点仍变换到原点，因此 BT 群是一个点群；(2) 变换的 Jacobi 矩阵的行列式值为 1. 以下仅讨论 BT 群中的变换.

对于任意两个发射相图 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}_0$，如果存在一个变换 T 满足式(8)，则称 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}_0$ 相关. 所有与 $\mathscr{E}_0$ 相关的相图组成 $\mathscr{E}_0$ 的相关相图集. 两个相图相关的必要条件是它们的相空间超体积相等. 当束通过一个可用 Hamilton 函数描述的束流光学系统时，任何地方的发射相图都是相关的.

BT 群中的线性变换组成它的一个子群，线性 BT 群或 LBT 群. 对于任意两个发射相图，如果存在一个线性变换满足

$$\mathscr{E} = L\mathscr{E}_0, \tag{9}$$

则称 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}_0$ 线性相关. 所有与 $\mathscr{E}_0$ 线性相关的相图组成 $\mathscr{E}_0$ 的线性相关相图集. 当束通过一个线性束流光学系统时，任何地方的发射相图都是线性相关的.

如果一个发射相图 $\mathscr{E}$ 满足

$$\mathscr{E} = T\mathscr{E}\ , \tag{10}$$

则称 $\mathscr{E}$ 是变换 T 的本征相图. 变换 T 的所有本征相图组成它的本征相图集. 对于某些变换这个集可以是空集.

对于一个变换 T，如果存在一个相空间区域 S，S 内部任意一点都处于 T 的某个本征相图之内，则称 S 为变换 T 的稳定区域. 如果一个变换的稳定区域是整个相空间，则称此变换是完全稳定的. 本征相图集为空集的变换则是完全不稳定的.

某一变换的两个本征相图 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 的和相图 $\mathscr{E}$ 也是同一变换的本征相图. 和相图按下述规则定义：一点属于 $\mathscr{E}$ 的充分且必要条件是属于 $\mathscr{E}_1$ 或 $\mathscr{E}_2$，则 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$.

如果一个发射相图 $\mathscr{E}$ 满足

$$\mathscr{E} = T^n\mathscr{E}\ , \tag{11}$$

则称 $\mathscr{E}$ 是变换 T 的周期本征相图，满足上式的最小正整数 n 称为它的周期. 显然如果 E 为变换 T 的周期本征相图且周期为 n，那么 $\sum_{i=0}^{n-1} T^i\varepsilon$ 是 T 的本征相图.

图 1 中 $\mathscr{E}_1$ 为变换 T 的本征相图，$\mathscr{E}_2$，$\mathscr{E}_3$，$\mathscr{E}_4$ 和 $\mathscr{E}_5$ 为变换 T 的周期本征相图，周期为 4，$\mathscr{E}_3=T\mathscr{E}_2$，$\mathscr{E}_4=T\mathscr{E}_3$，$\mathscr{E}_5=T\mathscr{E}_4$，$\mathscr{E}_2=T\mathscr{E}_5$. 显然 $\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4+\mathscr{E}_5$ 和 $\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4+\mathscr{E}_5$ 也是变换 T 的本征相图.

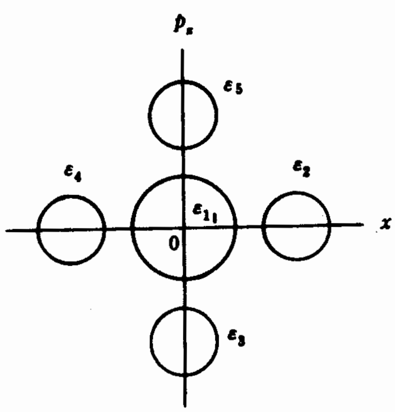

图 1 本征相图和周期本征相图

给定一个发射相图 $\mathscr{E}$，所有以 $\mathscr{E}$ 为本征相图的变换组成 BT 群的一个子群，由于这些变换不改变相图 $\mathscr{E}$ 的形状，所以称这个子群为 $\mathscr{E}$ 的相图保持群或 $CP(\mathscr{E})$ 群. $CP(\mathscr{E})$ 群中的线性变换又组成它的一个子群，线性 $CP(\mathscr{E})$ 群或 $LCP(\mathscr{E})$ 群.

三、等效变换　束流光学的基本问题

如果存在两个变换 T 与 T_0 满足

$$T\mathscr{E} = T_0\mathscr{E}\ , \tag{12}$$

则称 T 与 T_0 对发射相图 $\mathscr{E}$ 等效. 所有对于 $\mathscr{E}$ 与变换 T_0 等效的变换组成 BT 群的一个子集，称为由 $\boldsymbol{E}$ 到 $T_0\mathscr{E}$ 的等效变换集.

已知变换 T_0，任一对于 $\mathscr{E}$ 与 T_0 等效的变换 T_i 都可写成 T_0 与 $CP(\mathscr{E})$ 群中某一变换 S_i 的积，即

$$T_i = T_0 S_i, \tag{13}$$

因此由 $\mathscr{E}$ 到 $T_0\mathscr{E}$ 的等效变换集是 $CP(\mathscr{E})$ 群的一个左陪集.

同样 T_i 也可写成 $CP(T_0\mathscr{E})$ 群中某一变换 S_i' 与 T_0 的积，即

$$T_i = S_i' T_0, \tag{14}$$

因此由 $\mathscr{E}$ 到 $T_0\mathscr{E}$ 的等效变换集又是 $CP(T_0\mathscr{E})$ 群的一个右陪集.

由式(13)、(14)得

$$S_i' = T_0 S_i T_0^{-1}. \tag{15}$$

这意味着，对于 $CP(\mathscr{E})$ 群中某一变换 S_i，可在 $CP(\mathscr{E}')$ 群中找到一个与 S_i 共轭的变换 S_i'，只要相图 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{E}'$ 相关.

如果两个变换 S 与 S' 是共轭的，它们的本征相图集将是一一对应的. 这就是说，S 的任一个本征相图 $\mathscr{E}$ 必定对应着 S' 的某个唯一与 $\mathscr{E}$ 相关的本征相图 $\mathscr{E}'$，反之亦然. 我们将称这样的本征相图集为同构的.

如果一个变换 T 对于 $\mathscr{E}$ 等效于线性变换 L，

$$T\mathscr{E} = L\mathscr{E}\ , \tag{16}$$

则称变换 T 对于 $\mathscr{E}$ 是类线性的. 显然 $\mathscr{E}$ 是变换 $L^{-1}T$ 的本征相图，

$$L^{-1}T\mathscr{E} = \mathscr{E}. \tag{17}$$

人们经常希望对粒子束进行线性传输，此时各束流光学单元对相图进行的变换应当是类线性的. 由式(16)、(17)可知类线性变换问题可以化为本征相图问题，因此从群论观点看来，束流光学的基本问题是：

1. 给定一个变换，求出它的本征相图集中满足一定条件的相图（正问题）；
2. 给定一个发射相图，求出它的 CP 群中满足一定条件的变换（逆问题）.

逆问题的求解比正问题更困难.

四、一维运动

设一个六维相空间相图 $\mathscr{E}$ 在 (x, p_x) 相平面的投影为 $\mathscr{E}_x$，用投影映射 P_x 描述它们的关系

$$P_x\mathscr{E} = \mathscr{E}_x, \tag{18}$$

类似地可定义 P_y, P_t.

设变换 T 与发射相图 $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2$ 间满足

$$T\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2, \tag{19}$$

则

$$P_xT\mathscr{E}_1=P_x\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_{2x}, \tag{20}$$

如果在变换中粒子在 x 方向的运动与其它方向的运动间没有耦合，则 P_x 与 T 可以对易

$$P_xT=TP_x, \tag{21}$$

由此

$$T\mathscr{E}_{1x}=\mathscr{E}_{2x}, \tag{22}$$

$\mathscr{E}_{1x},\mathscr{E}_{2x}$是 $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2$ 在(x,p_x)相平面上的投影. 在这种情况下可以只讨论(x,p_x)相平面上的发射相图. 在相平面(x,p_x)上任选一点 x_0 作为粒子运动的初始点，对 x_0 重复进行变换求出 $x_i=T^ix_0(i=1,2,3\cdots\infty)$. 我们称集合$\{x_i\}$为变换的轨迹. 注意这轨迹并不是粒子在相平面上运动的轨迹. 因为这里并未涉及粒子在束流光学单元内部的运动. 对于作周期运动的粒子，轨迹由相平面上有限个点组成. 对于作混沌运动的粒子，轨迹由相平面上无限个散乱分布的点组成. 我们最关心的是作准周期运动的粒子，它的轨迹是一条或几条封闭曲线. 一个准周期运动粒子的轨迹所包围的区域就是变换的本征相图，两个准周期运动粒子的轨迹之间的区域也是变换的本征相图. 下面仅讨论前者.

线性变换的本征相图是一系列同心相似的椭圆. 非线性变换的本征相图具有不同的形状. 如果粒子轨迹由 n 条封闭曲线组成，那么本征相图将包含 n 个不相连的区域(如图1中 $\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3,\mathscr{E}_4,\mathscr{E}_5$)，每一区域都是以 n 为周期的周期本征相图. 一个本征相图内部的粒子不能逸出该相图 [1)].

如果粒子在 M 次变换的过程中在某一本征相图边界上绕原点转动 m 圈，则称

$$\mu=2\pi\lim_{M\to\infty}\frac{m}{M} \tag{23}$$

为此相图在这一变换中的相移. 一个线性变换的各本征相图具有相同的相移，而一个非线性变换的各本征相图的相移一般是不同的.

在一维运动情况下相互共轭的变换，其对应的本征相图的相移相同.

五、粒子分布函数的变换

考虑一个由大量经典粒子组成的系统. 设粒子在六维相空间中的分布函数为 $f(\boldsymbol{x})$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}-:H:f=\frac{\partial f}{\partial t}-[H,f]=0, \tag{24}$$

可得

$$\frac{\partial f}{\partial t}=:H:f. \tag{25}$$

1) 在多维运动情况下，作混沌运动的粒子可以通过 Arnold 扩散极缓慢地逃逸[6].

设 $t=0$ 与 $t=t$ 时系统的分布函数为 f_0 与 f，由式(3)、(5)与(25)可知，

$$f(\boldsymbol{x}) = f_0(T^{-1}\boldsymbol{x}). \tag{26}$$

在束流光学中，一个束流光学单元前后粒子分布函数 f_0 与 f 的关系也可用上式表示，不同的是采用坐标 z 代替时间 t 作为自变量.

对于任意两个分布函数 f_0 与 f，如果存在至少一个变换 T 满足式(26)，则 f 与 f_0 相关. 类似地可以给出线性相关分布函数的定义.

如果一个分布函数满足

$$f(\boldsymbol{x}) = f(T^{-1}\boldsymbol{x}), \tag{27}$$

则称 f 是变换 T 的本征分布函数. 变换 T 的所有本征分布函数组成它的本征分布函数集. 如果 f_1, f_2 是 T 的本征分布函数，则 $c_1f_1+c_2f_2$ 也是它的本征分布函数，c_1, c_2 为任意正数.

所有以 f 为本征分布函数的变换组成 BT 群的一个子群，它被称为 f 的分布保持群或 $DP(f)$ 群.

如果存在两个变换 T 与 T_0 满足

$$f(T^{-1}\boldsymbol{x}) = f(T_0^{-1}\boldsymbol{x}), \tag{28}$$

则称 T 与 T_0 对分布函数 f 等效. 所有对于 f 与变换 T_0 等效的变换组成 BT 群的一个子集，即对 f 与 T_0 的等效变换集，它是 $DP(f)$ 群的一个左陪集，又是 $DP(f)$ 群的一个右陪集，$f(\boldsymbol{x})=f(T_0^{-1}\boldsymbol{x})$.

对于 $DP(f)$ 群中任一变换，可以在 $DP(f)$ 群中找到一个与它共轭的变换，只要分布函数 f 与 f 相关.

在必需研究粒子分布函数的情况下，束流光学的基本问题是：

1. 给定一个变换，求出它的本征分布函数集中满足一定条件的函数.
2. 给定一种粒子分布函数，求出它的 DP 群中满足一定条件的变换.

以上讨论了粒子束在束流光学系统中运动时发射相图与粒子分布函数的变换，研究了这些变换组成的各种群——束传输群(BT 群)、相图保持群(CP 群)与分布保持群(DP 群)等. 指出束流光学的基本问题通常可以归结为求一个变换的本征相图以及求一个能保持发射相图形状不变的变换这样两类问题. 在本文的以下部分将运用这些理论来讨论束流光学中的一些问题.

本工作得到了王书鸿与杜东生教授的帮助，特此志谢.

参 考 文 献

[1] J. M. Jowett, M. Month, S. Turner(eds.), Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[2] A. J. Dragt, Lectures on Nonlinear Orbit Dynamics, AIP Conf. Proc. 87, New York, 1982, p. 147.
[3] A. J. Dragt, *Nucl. Instr. Meth.*, **A258**(1987), 339.
[4] M. Berz. *Nucl. Instr. Meth.*, **A298**(1990), 426.
[5] M. Berz. *Particle Accelerators* **24**(1989), 109.
[6] A. J. Lichtenberg M. A. Lieberman, Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlag, New York, 1983.

Transformation Groups in Beam Optics (I) General Theory

YU QINGCHANG
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing* 100039)

ABSTRACT

The motion of charged particle beams in a beam optical system can be described by means of the transformations of the phase space contours and particle distribution functions. These transformations compose several groups——the beam transport group (*BT* group), contour preserving group (*CP* group), distribution preserving group (*DP* group) and so on. The principal problems of beam optics can be reduced to two: the determination of the eigen phase space contour of a transformation and the determination of the transformation can preserve the shape of a phase space contour.