

阶乘矩的归一化与间歇指数 对平均横动量的依赖性*

吴元芳 刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所, 武昌 430070)

摘 要

本文对阶乘矩的两种不同归一化进行了细致的分析, 发现在固定多重数以及间歇程度不依赖于多重数的情况下, 两种归一化得到的间歇指数相等。对于多重数不固定, 而间歇程度与多重数有关的情况, 给出了两种不同归一化得到的间歇指数用动力学间歇指数表示的公式。本文还在间歇程度依赖于单事件平均横动量的假定下, 全面再现了实验上观察到的间歇对横动量截断的依赖性, 证实了平均横动量对于决定间歇程度有重要意义。

一、引 言

近年来, 首先在宇宙线事件中^[1], 接着在 高能实验中^[2,3]相继发现了极窄快度窗口中的大起伏现象: 这一现象预示着, 在高能碰撞多重产生中, 除了统计起伏, 还有可能存在非统计的动力学起伏。Bialas 和 Peschanski^[4]首先指出, 利用阶乘矩可以消除统计起伏。将快度区间 Δy 分成 M 个子间隔, 计算阶乘矩 $F_i(\delta y)$ [见以下式(2), (3)], 其中 $\delta y = \Delta y/M$ 是子间隔的宽度。如果随着 δy 的减小,

$$F_i(\delta y) \sim \delta y^{-\alpha_i} \quad (1)$$

就表明存在动力学起伏。这一现象被称为间歇, 并已得到实验的广泛证实^[5]。

阶乘矩 F_i 有两种不同的归一化形式:

$$F_i^{(1)} = M^{i-1} \sum_{m=1}^M \left\langle \frac{K_m(K_m-1)\cdots(K_m-i+1)}{K(K-1)\cdots(K-i+1)} \right\rangle, \quad (2)$$

和

$$F_i^{(2)} = M^{-1} \sum_{m=1}^M \frac{\langle K_m(K_m-1)\cdots(K_m-i+1) \rangle}{\langle K_m \rangle^i}. \quad (3)$$

其中, K 是快度区间 Δy 中的总粒子数, K_m 是第 m 个子间隔中的粒子数。 $\langle \cdots \rangle$ 表示对大量事件取平均。不同实验组在发表数据时所用的归一化不尽相同。因此, 有必要对这

本文 1991 年 5 月 21 日。

* 本文得到国家自然科学基金的资助。

两种归一化的异同,及其对间歇指数的影响加以讨论。

实验表明^[6],不同多重数事件的间歇指数不相同。这是有必要采用(2)式归一化的一个原因。我们曾根据间歇程度对矩阶数的依赖性指出^[7],在高于和低于 ISR 最高能量的两个能区中,间歇程度对多重数有相反的依赖性。考虑到在这两个能区,平均横动量对多重数也有相反的依赖性^[8],有可能间歇程度更根本地是依赖于平均横动量,而不是多重数。

最近,EHS/NA22 实验组研究了间歇程度对横动量截断的依赖性。他们在 250GeV/c π^+p 和 K^+p 的实验中,将横动量大于和小于 0.15 (或 0.3) GeV/c 的粒子分别进行统计,发现 $p_T < p_T^{(cut)}$ 的样本的间歇程度高于整个事件的间歇程度,而 $p_T > p_T^{(cut)}$ 的样本则相反,见图 1(a)。

在本文里,我们拟对阶乘矩的两种归一化作仔细的分析,并从间歇程度依赖于单事件平均横动量的假设出发,复现实验上观察到的间歇对横动量截断的依赖性。最后,对所得结果的意义进行简短的讨论。

二、阶乘矩的两种归一化

为了简单起见,假定快度平台是平的,因而

$$\langle K_m \rangle = \langle K \rangle / M. \quad (4)$$

采用简写符号

$$\begin{aligned} f_{mi} &\equiv K_m(K_m - 1) \cdots (K_m - i + 1) \\ f_{ki} &\equiv K(K - 1) \cdots (K - i + 1), \end{aligned} \quad (5)$$

并令

$$P_K = \frac{N_{ev}^{(K)}}{N_{ev}}, \quad (6)$$

其中 N_{ev} 是总事件数, $N_{ev}^{(K)}$ 是落入 Δy 中的粒子正好有 K 个的事件数。我们有

$$\langle \cdots \rangle = \frac{1}{N_{ev}} \sum_{n=1}^{N_{ev}} \cdots = \sum_K \frac{1}{N_{ev}^{(K)}} \sum_{n=1}^{N_{ev}^{(K)}} P_K \cdots = \sum_K P_K \langle \cdots \rangle^{(K)}. \quad (7)$$

$\langle \cdots \rangle^{(K)}$ 表示对多重数为 K 的事件取平均。

(2)式和(3)式可改写为

$$F_i^{(1)} = M^{i-1} \sum_{m=1}^M \left\langle \frac{f_{mi}}{f_{ki}} \right\rangle = \sum_K P_K \left(M^{i-1} \sum_{m=1}^M \left\langle \frac{f_{mi}}{f_{ki}} \right\rangle^{(K)} \right) = \sum_K P_K F_i^{(1K)}, \quad (2a)$$

$$F_i^{(2)} = M^{i-1} \sum_{m=1}^M \frac{\langle f_{mi} \rangle}{\langle K \rangle^i} = \sum_K P_K \left(\frac{M^{i-1}}{\langle K \rangle^i} \sum_{m=1}^M \langle f_{mi} \rangle^{(K)} \right) = \sum_K P_K F_i^{(2K)}, \quad (3a)$$

其中 $F_i^{(1K)}$ 和 $F_i^{(2K)}$ 分别表示对固定多重数 K 的事件,按两种方式归一化的阶乘矩。

下面分几种情况讨论。

情况一: 多重数 K 固定

此时, $\langle K \rangle = K$,

$$F_i^{(2)} = \frac{f_{Ki}}{K^i} F_i^{(1)} = A F_i^{(1)}.$$

A 表示与间隔宽度 δy 无关的常数。因而, 按(1)式有 $\varphi_i^{(2)} = \varphi_i^{(1)}$ 用两种不同归一化计算出的间歇指数相等。

情况二: 多重数 K 不固定, 但间歇程度与多重数无关

此时, 还需要区分不同的统计起伏。

(i) 统计起伏是伯劳利起伏

按(2)式归一化的阶乘矩可以消去伯劳利起伏, 使 $F_i^{(1K)}$ 等于动力学矩 $C_i^{(K)}$, 因而

$$F_i^{(1)} = \sum_K P_K F_i^{1K} = \sum_K P_K C_i^{(K)} = C_i.$$

最后一步是因为, 在所考虑的情况下, 间歇程度与多重数无关, 因而 $C_i^{(K)} = C_i$ 与 K 无关。

$$F_i^{(2)} = \sum_K P_K \frac{f_{Ki}}{\langle K \rangle^i} F_i^{(1K)} = \sum_K P_K \frac{f_{Ki}}{\langle K \rangle^i} C_i^{(K)} = \sum_K \left(P_K \frac{f_{Ki}}{\langle K \rangle^i} \right) C_i.$$

C_i 前的系数与 δy 无关, 因而也有 $\varphi_i^{(2)} = \varphi_i^{(1)}$,

(ii) 统计起伏是泊松起伏

此时, 按(3)式归一化的阶乘矩能消去统计起伏。因而, $F_i^{(2K)} = C_i^{(K)}$,

$$F_i^{(2)} = \sum_K P_K F_i^{(2K)} = \sum_K P_K C_i^{(K)} = C_i,$$

$$F_i^{(1)} = \sum_K P_K \frac{\langle K \rangle^i}{f_{Ki}} F_i^{(2K)} = \sum_K P_K \frac{\langle K \rangle^i}{f_{Ki}} C_i^{(K)} = \sum_K \left(P_K \frac{\langle K \rangle^i}{f_{Ki}} \right) C_i.$$

括号中的表达式与 δy 无关, 因而也有 $\varphi_i^{(2)} = \varphi_i^{(1)}$ 。

我们看到, 只要间歇程度与多重数无关, 对于两种统计起伏都有 $\varphi_i^{(2)} = \varphi_i^{(1)}$ 。反之, 如果对实验结果按两种不同归一化阶乘矩进行统计, 得到 $\varphi_i^{(2)} \neq \varphi_i^{(1)}$, 就可以断定间歇程度与多重数有关。

情况三: 多重数 K 不固定, 且间歇程度与多重数有关

此时可以定义固定 K 的间歇指数

$$\varphi_i^{(aK)} = - \frac{d \ln F_i^{(aK)}}{d \ln \delta y} = - \frac{1}{F_i^{(aK)}} \frac{d F_i^{(aK)}}{d \ln \delta y} \quad (a = 1, 2), \quad (8)$$

用它来表示整个样本的间歇指数

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(a)} &= - \frac{d \ln F_i^{(a)}}{d \ln \delta y} = - \frac{1}{F_i^{(a)}} \frac{d \sum_K P_K F_i^{(aK)}}{d \ln \delta y} \\ &= \frac{1}{F_i^{(a)}} \sum_K P_K F_i^{(aK)} \varphi_i^{(aK)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_K P_K F_i^{(aK)} \varphi_i^{(aK)}}{\sum_K P_K F_i^{(aK)}} \quad (a = 1, 2). \quad (9)$$

(i) 统计起伏是伯劳利起伏

此时应该用(2)式归一化来消去统计起伏,与动力学直接有关的是 $\varphi_i^{(1K)}$. 由(9)式有

$$\varphi_i^{(1)} = \frac{\sum_K P_K F_i^{(1K)} \varphi_i^{(1K)}}{\sum_K P_K F_i^{(1K)}}, \quad (10)$$

再利用

$$F_i^{(2K)} = \frac{f_{K_i}}{\langle K \rangle^i} F_i^{(1K)} \quad (11)$$

得到

$$\varphi_i^{(2)} = \frac{\sum_K P_K f_{K_i} F_i^{(1K)} \varphi_i^{(1K)}}{\sum_K P_K f_{K_i} F_i^{(1K)}}. \quad (12)$$

我们看到, $\varphi_i^{(1)}$ 和 $\varphi_i^{(2)}$ 可以分别用归一化的权重函数

$$Q_{B_i}^{(1K)} = \frac{P_K F_i^{(1K)}}{\sum_K P_K F_i^{(1K)}}; \quad Q_{B_i}^{(2K)} = \frac{P_K f_{K_i} F_i^{(1K)}}{\sum_K P_K f_{K_i} F_i^{(1K)}}. \quad (13)$$

对有动力学意义的 $\varphi_i^{(1K)}$ 求平均得到:

$$\varphi_i^{(1)} = \sum_K Q_{B_i}^{(1K)} \varphi_i^{(1K)}; \quad \varphi_i^{(2)} = \sum_K Q_{B_i}^{(2K)} \varphi_i^{(1K)}. \quad (14)$$

Q 的下标 B 表示统计起伏是伯劳利起伏.

(ii) 统计起伏是泊松起伏

此时,与动力学直接有关的是 $\varphi_i^{(2K)}$. 利用(9)式和(11)式得到,

$$Q_{P_i}^{(1K)} = \frac{P_K F_i^{(2K)} / f_{K_i}}{\sum_K P_K F_i^{(2K)} / f_{K_i}}; \quad Q_{P_i}^{(2K)} = \frac{P_K F_i^{(2K)}}{\sum_K P_K F_i^{(2K)}}, \quad (15)$$

$$\varphi_i^{(1)} = \sum_K Q_{P_i}^{(1K)} \varphi_i^{(2K)}; \quad \varphi_i^{(2)} = \sum_K Q_{P_i}^{(2K)} \varphi_i^{(2K)}.$$

三、间歇的平均横动量依赖性

在引言中已经提到, NA22 实验组^[9]将他们的数据按一定的横动量截断 $p_T^{(cut)}$ 分成两个样本, 分别进行统计, 发现 $p_T < p_T^{(cut)}$ 样本的间歇指数比整个事件的间歇指数大, 而 $p_T > p_T^{(cut)}$ 样本的间歇指数则相反.

但是, 间歇现象与整个事件中的粒子在相空间中的分布有关, 对于单个粒子, 无所谓“间歇”, 因而决定间歇程度的应该是整个事件的平均横动量 \bar{p}_T , 而不是单个粒子的横动量 p_T . 根据这一考虑, 我们作了一个简单的模型计算.

我们采用每一步的几率都归一化的随机级联模型^[10]. 基元分割的几率是 $(1+r)/2$, 其中 r 是区间 $(-\alpha, \alpha)$ 中均匀分布的随机数, $0 \leq \alpha \leq 1$. 参数 α 决定了间歇的程度.

为了简单起见, 将整个事件的粒子数固定为 30. 末态粒子的动量分布为

$$P(p_T) = \frac{1}{\lambda} e^{-p_T/\lambda}, \quad (16)$$

其中 $\lambda = \langle p \rangle = 0.38 \text{ GeV}/c$ 是对所有事件平均的平均横动量.

按照前面的讨论, 我们假设一个事件的间歇参数 α 是这一事件的平均横动量 \bar{p}_T 的下降函数。作为例子, 我们取这一函数为

$$\alpha = (0.2/\bar{p}_T)^3. \quad (17)$$

这样, 我们的模型就定义好了。

对这一模型进行蒙特-卡洛模拟, 得到了一个 250000 事件的样本。利用它计算了整个样本的间歇指数和 $p_T < (>) p_T^{(cut)}$ 的样本的间歇指数。其中, $p_T^{(cut)} = 0.15$ 或 0.30 GeV/c。对于整个样本(多重数固定), 采用了按(2)式归一化的阶乘矩¹⁾; 对于有横动量截断的样本(多重数不固定), 采用了按(3)式归一化的阶乘矩。

计算结果画在图 1 (b) 上, 它可以和画在图 1(a) 上的实验结果进行比较。虽然计算结果和实验在数值上的符合依赖于所用的模型, 然而两者在定性上的高度一致却是令人印象深刻的。具体说来, $p_T < p_T^{(cut)}$ 样本的间歇指数全都比整个样本的大; 而 $p_T > p_T^{(cut)}$ 间歇指数则比整个样本的小。与此同时, 对于不同的横动量截断的样本, $p_T^{(cut)}$ 较大的样本总是有较小的间歇指数。这些定性的趋势与计算中所用的具体模型假设无关, 是直接来自间歇程度随单事件平均横动量的增大而减小。这表明, 实验上^[9]观察到的“低 p_T 间歇”有可能是来源于“低 \bar{p}_T 间歇”。

四、讨 论

在本文里, 我们对阶乘矩的两种不同归一化进行了仔细的分析比较。我们证明了, 在两种情况下:

- (i) 固定多重数的事件;
- (ii) 不固定多重数, 但间歇程度与多重数无关, 用两种不同归一化的阶乘矩, 得到相同的间歇指数。反过来说, 如果用两种不同归一化的阶乘矩得到的间歇指数不相等, 就表明间歇程度与多重数有关。

对于间歇程度与多重数有关的情况, 我们证明了用两种归一化的阶乘矩得到的间歇

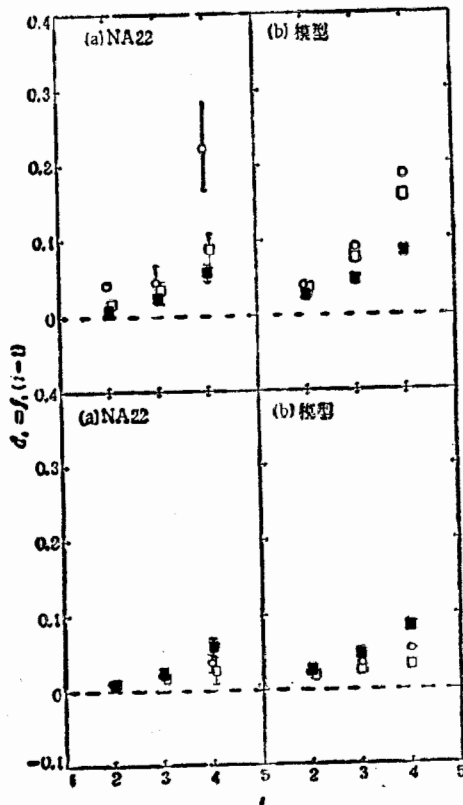


图 1 对于整个样本和有横动量截断的样本, 由实验和由模型的蒙特-卡洛模拟得到的反常维数 d_i 的比较。

(a) NA22 协作组的结果, 数据取自文献[9],
 (b) 本文模型蒙特-卡洛模拟的结果。 $\alpha = (0.2/\bar{p}_T)^3$ $N_{event} = 250000$
 ■ 整个样本, ○ $p_T < 0.15$ GeV/c, □ $p_T < 0.30$ GeV/c

1) 根据前面的讨论可知, 在这种固定多重数的情况下, 两种不同归一化得到的间歇指数是相等的。对于这一结论, 我们用现在这个例子进行过检验, 结果是满意的。

指数可以表示成动力学的间歇指数用不同的权重函数的平均。

在文章的后一部分,我们用蒙特-卡洛模拟研究了,在间歇程度随单事件平均横动量的增加而减小的情况下,有横动量截断的样本的间歇指数和完全样本的间歇指数的关系;成功地复现了实验上发现的: $p_T < p_T^{(cut)}$ 的间歇指数大, $p_T > p_T^{(cut)}$ 的间歇指数小; $p_T^{(cut)}$ 越大,间歇指数越小这两条规律。这证明了低平均横动量事件(超软事件^[11])对于间歇现象的出现有特别重要的意义。

参 考 文 献

- [1] T. H. Burnett et al. (JACEE), *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 2062.
- [2] M. Adamus et al. (NA22), *Phys. Lett.*, **B185**(1987), 200.
- [3] R. Holynski et al. (KLM), *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 733.
- [4] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273**(1986), 703; **B308**(1988), 857.
- [5] 例如见“Intermittency in High Energy Collisions”, Proc. Santa Fe Workshop, eds: F. Copper, R. C. Hwa and I. Sarcevic (World Scientific) (1990), and the papers cited therein.
- [6] B. Bushbeck and P. Lipa, A study of intermittency in $p\bar{p}$ collision at $\sqrt{s} = 630$ GeV, Priprint UA1/TN 89-06.
- [7] 吴元芳,刘连寿,高能物理与核物理,**15**(1991),822.
- [8] EHS/NA22 Collaboration, *Phys. Lett.*, **B209**(1988), 103.
- [9] EHS/NA22 Collaborations, University of Nijmegen preprint HEN-338/1991.
- [10] 吴元芳,张昆实,刘连寿,科学通报,**36**(1991),21.
- [11] L. Van Hove, CERN preprint CERN-TH 5885/90; *Ann. Phys.*, **192**(1989), 66; W. Kittel, University of Nijmegen preprint HEN-339/91.

The two Normalization schemes of Factorial Moments in High Energy Collisions and the Dependence Intermittency Degree on Average Transverse Momentum

WU YUANFANG

LIU LIANSHOU

(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070)

ABSTRACT

The two different normalization schemes of factorial moments are analyzed carefully. It is found that in both the cases of fixed multiplicity and of intermittency independent of multiplicity, the intermittency indexes obtained from these two normalization schemes are equal to each other. In the case of non-fixed multiplicity and intermittency depending on multiplicity, the formulae expressing the intermittency indexes from the two different normalization schemes in terms of the dynamical index are given. The experimentally observed dependency of intermittency degree on transverse momentum cut is fully recovered by means of the assumption that intermittency degree depends on average transverse momentum per event. It confirms importance of the dependency of intermittency on average momentum.