第16卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 3
1992年3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1992

自发对称性破缺与量子电动力学中有效势的积分表示式

李富斌
（中国矿业大学数力系，徐州 221008）

摘　　要

本文首先在标量场论的情形下，用最速下降法对有效势的泛函形式作了简要的评论。然后，又将该形式应用于量子电动力学，并采用单圈近似公式，导出了有效势的积分表示式。由于在单维空间和单维时间中，量子电动力学不存在自发对称性破缺，从而证明本文所导出的有效势的积分表示式是正确的。

一、引　　言

本文所研究的是量子电动力学中的有效势，即在单圈近似下，导出的是有效势的显式。由于在单维时-空的量子电动力学中，并不存在自发对称性破缺的情形，从而证明该显式便是所希望的结果。

本文将有效势的泛函形式的上述想法推广到标量场论中及量子电动力学的更有意义的情形中去[1]。

二、适用于量子电动力学的有效势

（一）路径积分

适用于量子电动力学的真空-真空振幅是由如下的路径积分表示式：

$$\langle 0^+|0^-\rangle_{\eta,\bar{\eta},J}=\frac{\int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\bar{\phi}][\mathrm{d}A_\mu]\exp\left(i\hbar^{-1}\int\mathscr{L}\,\mathrm{d}^4x\right)}{\int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\bar{\phi}][\mathrm{d}A_\mu]\exp\left(i\hbar^{-1}\int\mathscr{L}_f\mathrm{d}^4x\right)}\tag{1}$$

给出的，其中，

$$\mathscr{L}_f=\bar{\phi}(i\partial\!\!\!/-u)\phi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-(\partial\cdot A)^2/2\xi,\tag{2}$$

上式含有一个标准固定项，且有

本文1991年5月5日收到。
中国高科技中心（世界实验室），北京 100080

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_f + \mathscr{L}', \tag{3}$$

其中，

$$\mathscr{L}' = -e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu, \tag{4}$$

此式中的 η，$\bar{\eta}$，J_μ 分别为耦合于旋转场 $\bar{\psi}$，ψ 与光子场的源项。

在路径积分表示式(1)式的右边的分子中，其指数展开式是在 $\psi_0[\bar{\eta}]$，$\bar{\psi}_0[\eta]$，$A^0_\mu[J]$ 诸稳定点展开的，在此展开式中包含着最速降线法。这些点必须满足服从 Lagrangian 密度(3)式的运动方程；由此便可导出如下的三个耦合方程：

$$i(\partial\!\!\!/ - u)\psi_0 + \eta = eA\!\!\!/_0\psi_0, \tag{5}$$

$$\bar{\psi}_0(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - u) + \bar{\eta} = e\bar{\psi}_0A\!\!\!/_0, \tag{6}$$

$$\partial_\beta(F^0_{\beta\alpha}) + J_\alpha + \partial_\alpha(\partial\cdot A_0)/\xi = e\bar{\psi}_0\gamma_\alpha\psi_0, \tag{7}$$

展开式可通过如下的代换

$$\psi = \psi_0 + \tilde{\psi},\quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + \tilde{\bar{\psi}},\quad A_\mu = A^0_\mu + \tilde{A}_\mu, \tag{8}$$

导出。$\mathscr{L}$ 的结果表示式为：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_0 + \tilde{\bar{\psi}}(i\partial\!\!\!/ - u)\varphi - e\tilde{\bar{\psi}}\tilde{A\!\!\!/}\tilde{\psi} - \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - (\partial\cdot\tilde{A})^2/2\xi \\ &\quad - e\bar{\psi}_0\hat{A}\tilde{\psi} - e\tilde{\bar{\psi}}A\!\!\!/_0\tilde{\psi} - e\tilde{\bar{\psi}}\tilde{A}\psi_0,\end{aligned} \tag{9}$$

其中，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 &= \bar{\psi}_0(i\partial\!\!\!/ - u)\psi_0 - e\bar{\psi}_0A\!\!\!/\psi_0 - \frac{1}{4}F^0_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_0 - (\partial\cdot A)^2/2\xi \\ &\quad + \bar{\eta}\psi_0 + \bar{\psi}_0\eta + J_\mu A^\mu_0,\end{aligned} \tag{10}$$

方程(9)式是通过对上述运动方程采用消项与降低两个散度项的方法导出的。

方程(9)式中的一些项可以组合成形式为 $\bar{\phi}k\phi$ 的项：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_0 + \bar{\phi}k\phi - \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - e^2(\bar{\varphi}_0\tilde{A\!\!\!/})k^{-1}(\tilde{A\!\!\!/}\psi_0) - (\partial\cdot\tilde{A})^2/2\xi \\ &\quad - e(\bar{\phi} + \bar{x})A\!\!\!/_0(\phi + x) - e(\bar{\phi} + \bar{x})\tilde{A\!\!\!/}(\phi + x),\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$\tilde{\psi}$ 可写成下式：

$$\tilde{\psi} = \phi + x, \tag{12}$$

且 k 和 x 是通过选择下式：

$$kx = e\tilde{A\!\!\!/}\psi_0 \tag{13}$$

来连接。规范的自由度可采用令 $A\!\!\!/_0 = 0$ 而求得；且在方程(11)中不考虑其中最后一项；因为，当$\mathscr{L}$随 $\phi\to\hbar^{1/2}\phi$ 等而改变其比例时，这一项 $\hbar$ 的幂次就变为 $\hbar^3$。

通过如下的三个方程[2]

$$-\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \int d^4y\,\frac{1}{2}\tilde{A}_\mu(x)k^{\mu\nu}(x,y)\bar{A}_\nu(y). \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}&k^{\mu\nu}(x,y) = -(\partial^2g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)\delta^4(x-y), \\ &-\frac{1}{2\xi}(\partial,\tilde{A})^2 = -\frac{1}{2\xi}\int d^4y\tilde{A}_\mu(x)\partial^\mu\partial^\nu A_\nu(y)\delta^4(x-y).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}e^2(\bar{\psi}_0\tilde{A\!\!\!/})k^{-1}(\tilde{A\!\!\!/}\psi_0) = e^2\int &d^4y\tilde{A}_\mu(x)(\bar{\psi}_0(x)r^\mu k^{-1} \\ &\cdot r^\nu\psi_0(y))\tilde{A}_\nu(y)\delta^4(x-y),\end{aligned} \tag{16}$$

便可使得方程(11)写得更为对称一些。

现在，路径积分表示式(11)可写作下式：

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W[\eta,\bar{\eta},J]\right)=\frac{\int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\bar{\phi}][\mathrm{d}A_\mu]\exp\left(i\hbar^{-1}\int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x\right)}{\int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\bar{\phi}][\mathrm{d}A_\mu]\exp\left(i\hbar^{-1}\int\mathscr{L}_5\mathrm{d}^4x\right)},\tag{17}$$

其中，

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\phi k\bar{\phi}-\int\mathrm{d}^4y\tilde{A}_\mu(x)M^{\mu\nu}(x,y)\hat{A}_\nu(y),\tag{18}$$

$$\mathscr{L}_0=\bar{\phi}_0(i\partial\!\!\!/-u)\phi_0+\bar{\eta}\phi_0+\bar{\phi}_0\eta,\tag{19}$$

$$M^{\mu\nu}(x,y)=\left\{-\frac{1}{2}[\partial^2g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu(1+\xi^{-1})]+e^2\bar{\phi}_0(x)\gamma^\mu k^{-1}r^\nu\phi_0(y)\right\}\delta^4(x,y),\tag{20}$$

（二）$\hbar$ 展开式

1. 适用于连通生成泛函的 $\hbar$ 级数为：

$$W[\eta,\bar{\eta},J]=W_0[\eta,\bar{\eta},J]+\hbar W_1[\phi_0,\bar{\phi}_0]+\hbar^2W_2[\phi_0,\bar{\phi}_0]+\cdots,\tag{21}$$

其中，

$$W_0[\eta,\bar{\eta},J]=\int\mathrm{d}^4x[\bar{\phi}_0(i\partial\!\!\!/-u)\phi_0+\bar{\eta}\phi_0+\bar{\phi}_0\eta]\tag{22}$$

路径积分表示式(17)变为：

$$\exp[i\hbar^{-1}(W-W_0)]$$
$$=\frac{\int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\bar{\phi}][\mathrm{d}A_\mu]\exp\left[i\hbar^{-1}\int\mathrm{d}^4x\left(\bar{\phi}(x)k\phi(x)-\int\mathrm{d}^4yA_\mu(x)M^{\mu\nu}(x,y)A_\nu(y)\right)\right]}{\int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\bar{\phi}][\mathrm{d}A_\mu]\exp\left\{i\hbar^{-1}\int\mathrm{d}^4x\left[\bar{\phi}(i\partial\!\!\!/-u)\phi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-(\partial\cdot A)^2/2\xi\right]\right\}},\tag{23}$$

其中，由于 $A_\mu^0=0$，故去掉了 A_μ 上的否定号“～”。

在方程(23)式中，新的积分变量是由(12)式的变换而得到的，但并不改变其路径积分。这是由于泛函积分在(12)式变换下是一个变换不变式。 当场通过因子 $\hbar^{1/2}$ 而改变其尺度时，则在(23)式中右边的分子和分母的指数中的二次型便给出了 $W_1[\phi_0,\bar{\phi}_0]$. 此时 A_μ 场积分便类似于一个标量场积分。若 θ 是一个标量场，则有[3]

$$\int[\mathrm{d}\theta]\exp(i\hbar^{-1}\theta M\theta)=(\det M)^{-1/2}.\tag{24}$$

因为 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 等效于反交换对像 ϕ 和 $\bar{\phi}$，放在对 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 积分时，务要特别谨慎。对于这种反交换对像，其泛函积分的结果为[4]

$$\int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\bar{\phi}]\exp[i\hbar^{-1}\bar{\varphi}k\phi]=\det k,\tag{25}$$

由此便可导出：

$$iW[\phi_0,\bar{\phi}_0]=\ln\left(\frac{\det k(\det M)^{-1/2}}{\det k(\det M_0)^{-1/2}}\right),\tag{26}$$

其中，

$$M^{\mu\nu}(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{-k^2\left[g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\right]\right.$$
$$\left.+e^2\bar{\phi}_0\gamma^\mu\frac{1}{k-u}\gamma^\nu\phi_0\right\}e^{ik(x-y)},\tag{27}$$

$$M_0^{\mu\nu}(x,y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{-k^2\left[g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\right]\right\}e^{ik(x-y)},\tag{28}$$

于是有：

$$W_1=-i\ln\det(MM_0^{-1})^{-1/2}=\frac{1}{2}i\mathrm{Trln}(MM_0^{-1}),\tag{29}$$

其中，M_0^{-1} 必有如下形式：

$$(M_0^{-1})_{\nu\sigma}=-(ag_{\nu\sigma}-bk_\nu k_\sigma)/k^2,\tag{30}$$

要求：

$$(M_0M^{-1})=1.\tag{31}$$

则可导出：

$$a=1,\ b=\xi(1+\xi^{-1})/k^2.\tag{32}$$

2. 有效作用量由下式给出：

$$\Gamma[\phi_c,\bar{\phi}_c A_\mu^c]\equiv W[\eta,\bar{\eta},J]-\int d^4x(\bar{\eta}(x)\phi_c(x)+\bar{\phi}_c(x)\eta(x)+J_\mu(x)A^\mu(x)),\tag{33}$$

其中，经典场 $\phi_c(x)$，$\bar{\phi}_c(x)$ 及 $A_\mu^c(x)$ 是由下式：

$$\phi_c(x)=\delta W/\delta\bar{\eta}(x),\ \bar{\phi}_c(x)=\delta W/\delta\eta(x),\ A_\mu^c(x)=\delta W/\delta J_\mu(x),\tag{34}$$

来定义的。故由于 A_μ^0 是一个等于零的集合，所以由方程(21)和(22)式可导出：

$$\phi_c(x)=\frac{\delta W_c}{\delta\bar{\eta}(x)}+O(\hbar)=\phi_0(x)+O(\hbar),\tag{35}$$

同理也可以导出：

$$\bar{\phi}_c(x)=\bar{\phi}_0(x)+O(\hbar),\ A_\mu^c(x)=O(\hbar).\tag{36}$$

对于 Γ 的 $\hbar$ 展开式为：

$$\Gamma(\phi_c,\bar{\phi}_c,A_\mu^c)=\Gamma_0+\hbar\Gamma_1+\hbar^2\Gamma_2+\cdots,\tag{37}$$

上式中的 Γ_0 项可由方程(33)式给出：

$$\Gamma_0=\int d^4x\bar{\phi}(i\partial\!\!\!/-u)\phi_0,\tag{38}$$

同时，由方程(35)和(36)也给出：

$$\phi_c=\phi_0+\hbar\tilde{\phi}_c,\ \bar{\phi}_c=\bar{\phi}_0+\hbar\tilde{\bar{\phi}}_c,\ A_\mu^c=\hbar\tilde{A}_\mu^c.\tag{39}$$

从而由此可导出：

$$W[\eta,\bar{\eta},J]-W_0[\eta,\bar{\eta},J]=\hbar W_1[\phi_c-\hbar\tilde{\phi}_c,\ \bar{\phi}_c-\hbar\tilde{\bar{\phi}}_c]+\cdots\tag{40}$$

$$\Gamma_1=W_1=\frac{1}{2}i\mathrm{Trln}(MM_0^{-1}),\tag{41}$$

有效作用量 $\Gamma[\phi_c]$ 也可以按照 ϕ_c 的导数的幂在 $\phi_c=$ 常数点的附近作如下展

开:

$$\Gamma[\phi_c]=\int d^4x\left[-V(\phi_c)+\frac{1}{2}(\partial u\phi_c)^2Z(\phi_c)+\cdots\right] \tag{42}$$

其中,函数 $V(\phi_c)$ 便是有效势。

3. 对于由(42)式所定义的有效势:

$$\Gamma[\phi_c,\bar{\phi}_c,A_\mu^c]=\int d^4x(-V(\phi_c,\bar{\phi}_c,A_\mu^c)+\cdots) \tag{43}$$

与 V 的 $\hbar$ 展开式:

$$V=V_0+\hbar V_1+\hbar^2V_2+\cdots, \tag{44}$$

V 的级数中的每一项,均可通过令 $\phi_c,\bar{\phi}_c,A_\mu^c$ 全部为常数并降低 $\int d^4x$ 因子而由 Γ 级数求得。由方程(38)式可求得第一项 V_0 为:

$$V_0=u\bar{\varphi}_0\phi_0, \tag{45}$$

由 Γ_1 和方程(41)式可导出第二项 V_1 为:

$$\begin{aligned}V_1=-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\int d^4k\ln\Bigg(\Bigg\{&-k^2\left[g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\right]\\&+e^2\bar{\phi}_0\gamma^\mu\frac{(\not{k}+u)}{k^2-u^2}\gamma^\nu\phi_0\Bigg\}\times\left[-\frac{g_{\nu\sigma}}{k^2}+\frac{k_\nu k_\sigma\xi}{k^4}\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\right]\Bigg),\end{aligned} \tag{46}$$

下一步就是要计算出 V_1 来。但方程(46)中的四维积分计算并不容易。V_1 的计算最好是通过研究单维时空中量子电动力学的简单情形而用图解方法而完成。

三、单维时空中的量子电动力学

在单维时空中,方程(46)式中的积分在形式上是不变的。所求得迹如下:

$$\bar{\phi}_0\gamma^\mu(\not{k}+u)\gamma^\nu\phi_0=-(\phi_0)_\beta(\bar{\phi}_0)_\alpha[\gamma^\mu(\not{k}+u)\gamma^\nu]_{\alpha\beta}. \tag{47}$$

对于旋量,则为:

$$(\bar{\phi}_0)_\alpha(\phi_0)_\beta=-(\phi_0)_\beta(\bar{\phi}_0)_\alpha, \tag{48}$$

对于上述 $\phi\bar{\phi}$ 的这样的表示式可用 4 个线性独立的 2×2 矩阵的一组矩阵来表示,这组矩阵可由单维时空中的 Dirac 方程导出标准 γ 矩阵的方法来构成:

$$(\not{P}-u)\phi=0, \tag{49}$$

其中,

$$\not{P}=\gamma^\mu P_\mu=\gamma^\mu i(\partial/\partial x^4),\ \hbar=C=1; \tag{50}$$

而 γ 满足下式:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}1,\ \mu,\nu=0,1;\ g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}; \tag{51}$$

若限于其单维时-空中,用标准迹定理的计算而求得[5]。则方程(47)为:

$$\bar{\phi}_0\gamma^\mu(\not{k}+u)\gamma^\nu\phi_0=-2uag^{\mu\nu}-2(b^\mu k^\nu+b^\nu k^\mu-bkg^{\mu\nu})-2uc\varepsilon^{\mu\nu}, \tag{52}$$

其中,

$$b^{\mu}=g^{\mu\sigma}b_{\sigma},\ b_0k=b^0k^0-b^1k^1,\ \varepsilon^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}; \tag{53}$$

若利用方程(52)式并选择 $\xi=1$，则方程(46)式中的 V_1 就变为:

$$V_1=-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\ln\left[\left(1+\frac{2e^2(ua-b\cdot k)}{k^2(k^2-u^2)}\right)\delta_{\mu\sigma}+\frac{2e^2}{k^2(k^2-u^2)}(b^{\mu}k_{\sigma}+b_{\sigma}k^{\mu}+uc\varepsilon^{\mu\nu}g_{\nu\sigma})\right], \tag{54}$$

上式积分中的第二项也可通过找出其本征值后对角化的方法而求得。

$$\lambda=b\cdot k\pm(b^2k^2+u^2c^2)^{1/2}, \tag{55}$$

其中，

$$b^2=(b^0)^2-(b^1)^2,\ k^2=(k^0)^2-(k^1)^2; \tag{56}$$

方程(54)式的迹也可写为:

$$V_1=-\frac{i}{2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\ln\left(1+\frac{2e^2}{k^2(k^2-u^2)}[ua\pm(b^2k^2+u^2\cdot c^2)^{1/2}]\right) \tag{57}$$

在上式中采用了紧标记法。 V_1 为两项的和，其中，第一项相应于 ua 与平方根项的和，第二项则相应于一个差分。

方程(57)式中的积分可用一个可变的 Euelidean 矩阵来计算。k^0 可连续解析到 ik^0，这相应于复 k^0 平面中的一个旋度，由于 k^0 与方程(57)式中被积函数的奇点并不相交，故该旋度是容许的。

为使其平方根项保持不变，特定义:

$$d^0=ib^0,\ d^1=b^1; \tag{58}$$

则:

$$V_1=-\frac{1}{2}\int\frac{dk^0dk^1}{(2\pi)^2}\ln\left(1+\frac{2e^2}{k^2(k^2+u^2)}\times[ua\pm(d^2k^2+u^2c^2)^{1/2}]\right), \tag{59}$$

其中，

$$k^2=(k^0)^2+(k^1)^2,\ d^2=(d^0)^2+(d^1)^2; \tag{60}$$

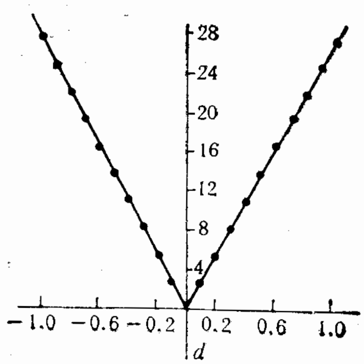

图 1　单维时-空中的有效势

若改用极坐标，则可求出其角积分:

$$V_1=-\frac{1}{4\pi}\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^{\Lambda}dkk\ln\left(1+\frac{2e^2}{k^2(k^2+u^2)}[ua\pm(d^2k^2+u^2c^2)^{1/2}]\right), \tag{61}$$

在此可引入动量的极限。

为简化上述积分计算，我们在此将只考虑无泛量的情形，即令其质量 $u=0$，则可由(45)式导出:

$$V_0=0, \tag{62}$$

从而，方程(61)式便可简化为:

$$V_1=-\frac{1}{4\pi}\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\int_0^{\Lambda}dkk\ln[(k^3+2e^2d)(k^3-2e^2d)]-2\int_0^{\Lambda}dkk\ln k^3\right), \tag{63}$$

若将上式积分中所有与 λ 有关的项消去,则可有按求得上式的结果为:

$$V_1 = \frac{1}{16\sqrt{3}}(4e^4d^2)^{1/3}, \tag{64}$$

其中, d^2 是由方程(58)和(60)式来定义的.

到此,由方程(62)和(63)式便可划出有效势的图解图,如图1中曲线所示,该图数轴按照以 $2e$ 为单位进行标度.

当 $d=0$ 时,有效势会出现其最小值,此时不存在自发对称性破缺. 这当然也是我们期望得到的结果.

参考文献

[1] J. Iliopoulus, C. Itzykson, and A. Martin, *Phys. Rev.*, **47**, 1(1975), 346.

[2] E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Rep.*, **9**, 1(1973), 411.

[3] S. Colemon, Proc. Summer School on Theoretical Physics, Erice 1973, ed. A. Zichichi, New York, Academic.

[4] F. A. Berezin, The Method of Second Quantization, New York, Academic, (1966), Chap. 1, 3.

[5] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, New York, McGraw-Hill, (1964) Chap. 7.

Spontaneous symmetry Breakdown and an Integral Expression of the Effective Potential in Quantum Electrodynamics

Li Fubin

(*CCAST*(*World Laboratory*), *P. O. Box*. 8730, *Beijing* 100080)

(*The Mathematical-Mechanical Department, China University of Mining Technology, Xuzhou*, 221008)

Abstract

The functional formalism for the effective potential is briefly reviewed for the case of a scalar field theory by using the method of steepest descents. This formalism is then applied to quantum electrodynamics and an integral expression is derived for the effective potential in the one-loop approximation. This expression is used to verify the absence of spontaneous symmetry breakdown for quantum electrodynamics in one space and one time dimension.