第16卷 第3期　　高能物理与核物理　　Vol. 16, No. 3
1992年3月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1992

Heisenberg 自旋模型的有效拓扑作用量与 Berry 相位相关的高级绝热近似方法*

孙昌璞
(东北师范大学物理系,长春 130024)(南开数学研究所理论物理研究室,天津 300071)

庞霖
(兰州铁道学院基础部,兰州 730070)

葛墨林
(南开数学研究所理论物理研究室,天津 300071)

摘　要

本文由平均场有效场论方法出发,应用高级绝热近似的计算技术,一般地研究了 Heisenberg 自旋模型的有效作用量及其高阶修正. 在低温情况下,附加的拓扑作用量可等效地理解为单自旋在多粒子平均场中的等效 Berry 相位的叠加.

一、引　　言

目前,低维 Heisenberg 反铁磁模型有效拉氏量中拓扑项的出现已引起人们的重视[1]. 由于它类似于规范场理论中的 Wess-Zumino 项,人们希望这个模型的连续化,将得到带有反常项的低维场论模型. 人们已经从不同的角度推导出并分析了这种拓扑项,其中包括相干态路径积分[2]有效场论方法[3]以及半经典运动方程的正则变换[4]. 然而这些讨论并未给出这种拓扑项起源以显然的物理解释.

本文将在比较一般的前提下,基于有效场论的表述[3],利用高级绝热近似方法[5]研究这种拓扑项的物理起源,并在低温情况下得到这种作用量的高阶修正. 值得指出的是,本文的讨论适用于仅具有自旋耦合的一般多粒子体系,而无须要求自旋固定在特定的格点上;本文对任意自旋 $l=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2\cdots$ 情况进行讨论且设 $\hbar=1$.

二、演化矩阵与配分函数

设 Heisenberg 自旋模型的哈密顿量为

本文1991年3月25日收到.
* 国家自然科学基金资助.

$$\hat{H} = -(1/2)\sum_{K\neq j=1}^{N}{}' J_{Kj}\boldsymbol{S}_K\cdot\boldsymbol{S}_j, \tag{1}$$

其中 $\hat{H}$ 的厄米性要求实系数矩阵 $J=(J_{Kj})$ 为对称的，且 $\det J \neq 0$。当 $J_{Kj}=$ 固定常数 J 且 K,j 固定于一维均匀格点上时，(1)给出通常的一维反铁磁链模型。

考虑演化算子 $U(t)=\exp[-it\hat{H}]$ 的迹

$$Z(t) = \mathrm{Tr}\exp[-it\hat{H}].$$

经过 Wick 转动，$t=-i\beta=\dfrac{-i}{kT}$（T 为绝对温度，k 为玻尔兹曼常数）$Z(t)$ 变成体系的配分函数 $\tilde{Z}(T)=\mathrm{Tr}\exp[-\beta\hat{H}]$。 因此量子动力学问题通过 Wick 转动与统计热力学问题相联系。

引入辅助场 $\boldsymbol{B}_K=(B_K^1(t),\ B_K^2(t),\ B_K^3(t))$ 并分割时间间隔$[0,t]$ 为均匀的M段，$\varepsilon=\dfrac{t}{M}$，且令 $t_\alpha=\alpha\epsilon\,(\alpha=1,2,\cdots)$。于是根据[3]的讨论有：

$$U(t)=\lim_{\varepsilon\to\infty}[e^{-i\varepsilon\hat{H}}]^M=\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{\alpha=1}^{M}\left\{\frac{1}{\sqrt{C}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{K=1}^{N}(d\boldsymbol{B}_K(t_\alpha))\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}i\epsilon\boldsymbol{B}_K(t_\alpha)\cdot J_{Kj}^{-1}\boldsymbol{B}_j(t_\alpha)-i\epsilon\boldsymbol{B}_K(t_\alpha)\cdot\boldsymbol{S}_K\right\}\right\}, \tag{2}$$

其中 $C=(2\pi/\varepsilon)^N\det J$。引入积分测度

$$\mathscr{D}[\boldsymbol{B}]=\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{\alpha=1}^{M}\left(\frac{1}{\sqrt{C}}\prod_{K=1}^{N}d\boldsymbol{B}_K(t_\alpha)\right),$$

则有

$$Z(t)=\int\mathscr{D}[\boldsymbol{B}]\exp\left[-\frac{i}{2}\int_0^t\boldsymbol{B}_K(\tau)J_{Kj}^{-1}\boldsymbol{B}_j(\tau)d\tau\right]\mathrm{Tr}\prod_{i=1}^{N}W_i(t), \tag{3}$$

其中 $W_K(t)$ 为编序积分：

$$W_K(t)=\mathscr{T}\exp\left[\int_0^t[-i\boldsymbol{B}_K(t')\cdot\boldsymbol{S}_K]\right]dt'. \tag{4}$$

由(3)可给出满足 $Z(t)=\int\mathscr{D}[\boldsymbol{B}]\exp[-iS_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{B})]$ 的有效作用量。

$$S_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\boldsymbol{B}_K(\tau)J_{Kj}^{-1}\boldsymbol{B}_j(\tau)+i\sum_{K=1}^{N}\ln\mathrm{Tr}W_K(t). \tag{5}$$

现在我们需要计算 $W_K(t)$。

三、有效 Schrödinger 方程的高级绝热近似

由(4)给出的 $W_K(t)$ 满足有效的 Schrödinger 方程。

$$i\frac{\partial}{\partial t}W_K(t)=\hat{h}_K(t)W_K(t),\hat{h}_K(t)=\boldsymbol{B}_K(t)\cdot\boldsymbol{S}_K, \tag{6}$$

其中辅助场 $\boldsymbol{B}_i(t)$ 可理解为作用于第K个单自旋上的系统多粒子平均场[6]，它代表一种集体运动变量。现在把高级绝热近似方法和其等价表达[7]应用于方程(6)。

设 $|m(t)\rangle \equiv |m(t)\rangle_K = |m[\boldsymbol{B}_K(t)]\rangle_K$ 是 $\hat{h}_K(t)$ 对应于本征值 $E^K_m(t)(m=-S, -S+1,\cdots,S-1,S)$ 的归一化本征函数，则

$$|\psi(t)\rangle = W_K(t)|\psi(0)\rangle = \sum_{m=-S}^{S} C_m(t) e^{-i\int_0^t E_m^K(t')dt'} |m(t)\rangle \tag{7}$$

满足 Schrödinger 方程 $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{h}_K(t)|\psi(t)\rangle$。于是有

$$\dot{C}_m(t) + \langle m(t)|\dot{m}(t)\rangle C_m(t) = -\sum_{n\neq m} e^{i\omega^K_{mn}(t)} \cdot \langle m(t)|\dot{n}(t)\rangle C_n(t),$$
$$m = S, S-1, \cdots, -S, \tag{8}$$

其中 $\omega^K_{mn}(t) = \int_0^t (E^K_m(t') - E^K_n(t'))dt'$。视 (7) 右端为小量，高级绝热近似方法给出 $C_m(t)$ 的级数解：

$$C_m(t) = \sum_{l=0}^{\infty} C_m^{[l]}(t);$$
$$C_m^{[0]}(t) = e^{i\gamma^K_m(t)} \cdot \langle m(0)|\psi(0)\rangle; \tag{9a}$$
$$\begin{aligned} C^{[l]}_{m0}(t) = (-1)^l e^{i\gamma^K_{m_0}(t)} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{l-1}} dt_l \sum_{m_1\neq m_0}\sum_{m_2\neq m_1}\cdots \\ \sum_{m_l\neq m_{l-1}} \prod_{j=1}^{l} \Big[\exp\{i\omega^K_{m_{j-1},m_j}(t_j) + i\gamma^K_{m_j}(t_j) \\ - i\gamma^K_{m_{j-1}}(t_j)\}\langle m_{j-1}(t_j)\Big|\frac{d}{dt_j} m_j(t_j)\rangle\Big] \\ \times\langle m_l(0)|\psi(0)\rangle, \\ l = 1,2,\cdots. \end{aligned} \tag{9b}$$

其中

$$\gamma^K_m(t) = i\int_0^t \Big\langle m(\tau)\Big|\frac{d}{d\tau} m(\tau)\Big\rangle d\tau = i\int_{\{\boldsymbol{B}_K(\tau)\}} \langle m[\boldsymbol{B}_K]|\nabla_{\boldsymbol{B}_K} m[\boldsymbol{B}_K]\rangle d\boldsymbol{B}_K \tag{10}$$

就是 Berry 几何相位。由 (9-a,b) 可明显地得到各级近似的 $W_K(t)$

$$W_K^{[0]}(t) = \sum_m \exp\Big[i\gamma^K_m(t) - i\int_0^t E^K_m(t')dt'\Big]|m(t)\rangle\langle m(0)|, \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} W_K^{[1]}(t) = -\sum_m\sum_{n\neq m}\int_0^t dt'\exp[i\omega_{mn}(t') + i\gamma^K_n(t') - i\gamma^K_m(t')] \\ \cdot|m(t)\rangle\langle n(0)|, \end{aligned} \tag{11b}$$

$$\begin{aligned} W_K^{[2]}(t) = \sum_m\sum_{n\neq m}\sum_{l\neq n}\Big\{\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\cdot\exp[i\omega_{mn}(t') + i\omega_{nl}(t'') \\ + i\gamma^K_n(t') - i\gamma^K_m(t') + i\gamma^K_l(t'') - \gamma^K_n(t'')] \\ \cdot\Big\langle m(t')\Big|\frac{d}{dt'} n(t')\Big\rangle\Big\langle n(t'')\Big|\frac{d}{dt''} l(t'')\Big\rangle|m(t)\rangle\langle l(0)|\Big\} \end{aligned} \tag{11c}$$

我们可以根据需要，依次得到更高阶近似。

四、拓扑作用量与 Berry 相位

当绝热条件

$$|\langle m(\tau)|\dot{n}(\tau)\rangle/(E_m^K(\tau)-E_n^K(\tau))|\ll 1,(m\neq n,\tau\in[0,t]) \tag{12}$$

满足，(5)中 $W_K(t)$ 只取到 $W_K^{[0]}(t)$ 项，这时

$$\mathrm{Tr}W_K(t)=\sum_m\langle m(t)|W_K^{[0]}(t)|m(0)\rangle=\sum_{m=-S}^{S}\mathrm{e}^{i\gamma_m^K(t)-i\int_0^t E_m^K(t')\mathrm{d}t'}. \tag{13}$$

把 $\boldsymbol{B}_K(t)$ 参数化为：$\boldsymbol{B}_K(t)=B_K(t)(\sin\theta^K(t)\cos\phi^K(t),\ \sin\theta^K(t)\cdot\sin\varphi^K(t),\ \cos\theta^K(t))$：

$$B_K(t)=|\boldsymbol{B}_K(t)|,\varphi^K(t)=\mathrm{tg}^{-1}(B_K^2(t)/B_K^1(t))=\varphi^K[\boldsymbol{B}_K],$$
$$\theta^K(t)=\mathrm{tg}^{-1}[(B_K^1(t)^2+B_K^2(t)^2)^{\frac{1}{2}}/B_K^3(t)]=\theta^K[\boldsymbol{B}_K],$$

则得 $\gamma_m^K(t)=m\gamma^K(t)$：

$$\gamma^K(t)=-\int_{\{\boldsymbol{B}_K(\tau)\}}(1-\cos\varphi^K[\boldsymbol{B}_K])\nabla_{\boldsymbol{B}_i}\varphi^K[\boldsymbol{B}_K]\mathrm{d}\boldsymbol{B}_K. \tag{14}$$

而 $E_m^K(t)=mB_K(t)$。代入(13)则

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}W_K^{(0)}(t)=&\exp[iS\Omega_K(t)][1-\exp[-(2S+1)i\Omega_K(t)]]\\&\cdot[1-\exp[-i\Omega_K(t)]]^{-1},\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\Omega_K(t)=\gamma^K(t)-\int_0^t B^K(t')dt'$。于是零级有效作用量是

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{eff}}^{[0]}(\boldsymbol{B})=&\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}t'\boldsymbol{B}_K(t')J_{Kj}^{-1}\boldsymbol{B}_j(t')-S\sum_{K=1}^{N}\Omega_K(t)\\&+i\sum_{K=1}^{N}\ln\{[1-\mathrm{e}^{-(2S+1)i\Omega_K(t)}][1-\mathrm{e}^{-i\Omega_K(t)}]^{-1}\},\end{aligned} \tag{16}$$

(16)便是绝热条件(12)下的有效作用量.

现在引入无量纲时间标度[5] $s=\tau/t(\tau\in[0,t])$ 并对函数 $f(\tau)$ 设 $\tilde{f}(s)\to f(ts)$. 这时，绝热条件(12)表达为

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{\varphi}^K(s)\sin\theta^K(s)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{\theta}^K(s)\right|\Big/|t\tilde{B}^K(s)|\ll 1. \tag{17}$$

在 $T=\dfrac{1}{k\beta}\to 0$ 的低温极限下，Wick 转动意味着 $|t|=|\beta|\to\infty$，因此(17)满足. 而在这个极限下，

$$\mathrm{e}^{-i\Omega_K(t)}\to\mathrm{e}^{-\int_0^\beta B^K(t')\mathrm{d}t'}\mathrm{e}^{i\gamma_K(t)}\to 0. \tag{18}$$

这意味着(16)左端第三项消失，于是，我们有低温有效作用量

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\mathrm{eff}}^{[0]}=&\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}\tau\boldsymbol{B}_K(\tau)\cdot J_{Kj}^{-1}\boldsymbol{B}_j(\tau)+\int_0^t\mathrm{d}\tau\sum_K B_K(\tau)\mathrm{d}\tau\\&-S\sum_K\gamma^K(t),\end{aligned} \tag{19}$$

最后一项作为 Berry 相因子的叠加恰是一个拓扑作用量. 低温极限 $T=\frac{1}{k\beta}\to 0$ 在 Wick 转动下是绝热近似的充分条件，即足够小的T总能使(12)和(18)满足. 这个事实在物理上可能意味着：在低温情况下，集体运动模式 $\boldsymbol{B}_K(t)$ 激发很小，因此它变化很慢，从而使得单自旋 S_i 的演化伴随着一个 Berry 相位，并有拓作用量 $-S\sum\limits_K \gamma^K(t)$ 出现于有效作用量中.

五、有效作用量的高级修正

在温度升高时，$|t|=|\beta|$ 变小，这时绝热条件不再满足，我们需要考虑更高阶的近似. 由（11b）看出，$\mathrm{Tr}W_K^{[1]}(t)=0$，因此最低级非绝热修正来自 $W_K^{[2]}(t)$.

在上节给出的 $\boldsymbol{B}_K(t)$ 参数化方式下，$|m(t)\rangle_K$ 可由标准角动量态$|S,m\rangle$构造，即

$$|m(t)\rangle_K=\mathrm{e}^{-i\hat{S}_z^K\phi^K(t)}\cdot\mathrm{e}^{-i\hat{S}_y^K\theta^K(t)}|S,m\rangle. \tag{20}$$

由此我们经过一些计算得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}W_K^{[2]}(t)=&-\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^{t'}\mathrm{d}t''\left\{\exp\left[i\int_{t''}^{t'}\alpha^K(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\cdot\frac{1}{4}(S+m)\right.\\&\cdot(S-m+1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\varphi^K(t')\cdot\sin\theta^K(t')+i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\theta^K(t')\right)\\&\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t''}\varphi^K(t'')\cdot\sin\theta^K(t'')-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t''}\theta^K(t'')\right)+\exp\left[-i\int_{t''}^{t'}\alpha^K(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\\&\cdot\frac{1}{4}(S-m)(S+m+1)\left(\sin\theta^K(t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\varphi^K(t')-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\theta^K(t')\right)\\&\left.\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t''}\varphi^K(t'')\cdot\sin\theta^K(t'')+i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t''}\theta^K(t'')\right)\right\}.\end{aligned} \tag{21}$$

代入(5)

$$S_{\mathrm{eff}}^{[2]}\cong S_{\mathrm{eff}}^{[0]}+\sum_{K=1}^{N}\{\mathrm{Tr}W_K^{[2]}(t)/\mathrm{Tr}W_K^{[0]}(t)\}. \tag{22}$$

特别是当 $\theta^K(t)=$ 常数 $\theta^K,\varphi^K(\tau)=2\pi\tau/t$ 且 $B^K(t)=$ 常数 B^K 时，保留到$\frac{1}{t}$的一阶项有

$$\mathrm{Tr}W_K^{[2]}\cong-iS\cdot\sin\theta^K\cdot 2\pi^2/(B^K t). \tag{23}$$

由此得

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{eff}}=&\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}\tau\boldsymbol{B}_K(\tau)J_{Kj}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}_j(\tau)-S\sum_{K=1}^{N}\{-B_K t-2\pi i(1-\cos\theta^K)\\&+2\pi^2\sin^2\theta^K/(B_K t)\},\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\Delta S=-S\sum_{K=1}^{N}\frac{2\pi^2}{B_K t}\sin^2\vartheta^K$$

就是非绝热修正项，当 $t \to \infty$ 它可以忽略，由于这一项与 t 有关，它不是纯几何的，它只是描述了由 $|m(0)\rangle$ 到 $|m(t)\rangle$ 的二级跃迁，即 $|m(0)\rangle \to |n(t')\rangle \to |m(t)\rangle (m \neq n, t' \in [0,t])$ 这种类型的跃迁.

作者们非常感谢与 Drexel 大学的冯达璇教授的讨论，使我们受益匪浅. 作者们还感谢与王磊同志的讨论.

参 考 文 献

[1] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1153; **57**(1985), 3359;
P. B. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 821.
[2] E. Fradkin and M. Stone, *Phys. Rev.*, **B38**(1988), 7215.
I. Affleck, *Nucl. Phys.*, **B265**(1985), 409.
[3] A. Angelucci and G. Jug, *Intern. J. Mod. Phys.*, **B3**(1989), 1069.
[4] M. L. Ge and Y. Niu, *J. Phys.*, **A22**(1989), L457.
葛墨林，牛云，科学通报，**34**(1989)，1131.
[5] C. P. Sun, *J. Phys.*, **A21**(1988), 1595.
孙昌璞，高能物理与核物理，**12**(1988)，351；**14**(1990)，692.
C. P. Sun, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2908; **D41**(1990), 1318.
[6] G. Busch and H. Schade, Theory of Solid State, (Pergnon, 1985).
[7] Z. Y. Wu, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 2184.

Effective topological action in Heisenberg spin model as Berry's phase

SUN CHANGPU

(*Physics Department, Northeast Normal University, Changchun* 300071 *and Nankai Institute of Mathematics, Tianjin* 300071)

PAN LIN

(*Lanzhou College of Railway, Lanzhou* 730070)

GE MOLIN

(*Nankai Institute of Mathematics, Tianjin* 300071)

ABSTRACT

In this paper it is shown that the topologically additional action appearing in the Heisenberg spin model can be understood as a superposition of Berry's phases for the single spins in an average fields of many particles. In the case of low temperature, using the high order adiabatic approximation method, we obtain higher order corrections for this action.