第16卷 第10期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 10
1992年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1992

量子群 $GL(3)_q$ 的 Verma 模, q-boson 实现和 Cyclic 表示*

付洪忱[1)] 葛墨林
(南开数学所理论物理研究室,天津 300071)

摘 要

本文利用类似研究半单李代数的结构和 Verma 模的方法研究了量子群 $GL(3)_q$ 的矩阵元代数 $A(3)_q$ 的结构和 Verma 模. 然后利用 $A(3)_q$ 的 Verma 表示构造了 $A(3)_q$ 的 q-boson 实现, 并借助于此实现研究了当 $q^p=1$ 时的 $A(3)_q$ 的 Cyclic 表示.

一、引 言

量子群[1]与量子代数[2]及其表示理论在许多非线性可积物理模型中的 Yang-Baxter 方程解的构造中起着重要作用[3]. 量子群是由满足 Yang-Baxter 方程的量子 R-矩阵中抽象出的数学结构[4]. Florator[5], Weyers[6] 和 Chakrabarti 等人[7]利用 Heisenberg-Weyl 关系研究了量子群 $GL(n)_q$ 的矩阵元代数 $A(n)_q$ 的表示,特别是当 q 是单位根时的表示. 文[8]给出了 $A(2)_q$ 的不可约表示的一个分类.

本文提出一种类似于研究半单李代数的结构和 Verma 模的方法研究 $A(3)_q$ 的结构和 Verma 模,给出 Cartan 子代数,上升下降矩阵元以及他们的对等概念. 并在此基础上研究了 $A(3)_q$ 的 q-boson 实现和它的 Cyclic 表示. 本文中使用的方法是一般的并可推广到 $A(n)_q$ 情况.

本文中 $\mathbf{Z}^+$ 是全体非负整数集合, $\mathbf{C}$ 是复数域, $\mathbf{C}^\times\equiv\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

二、$A(3)_q$ 的结构与 Verma 模

量子群 $GL(3)_q\equiv\{M=(m_{ij}),\ 1\leqslant i,j\leqslant 3\}$, 其中矩阵元 m_{ij} 是不可交换的, 它们满足

$$m_{ij}m_{ik}=q^{-1}m_{ik}m_{ij}\quad j<k, \tag{2.1a}$$

$$m_{ij}m_{kj}=q^{-1}m_{kj}m_{ij}\quad i<k, \tag{2.1.b}$$

本文 1991 年 12 月 2 日收到.
* 国家自然科学基金资助. 付洪忱还得到吉林省青年科学技术研究基金资助.

1) 东北师范大学物理系.

$$m_{ij}m_{kl} = m_{kl}m_{ij} \quad i < k \text{ 且 } j > l, \tag{2.1.c}$$

$$m_{ij}m_{kl} = m_{kl}m_{ij} + (q^{-1} - q)m_{il}m_{kj}, \quad i < k \text{ 且 } j < l. \tag{2.1.d}$$

而且M的量子行列式 $D_q(M)$

$$D_q(M) = m_{11}(m_{22}m_{33} - q^{-1}m_{23}m_{32}) - q^{-1}m_{12}(m_{21}m_{33} - q^{-1}m_{23}m_{31}) + q^{-2}m_{13}(m_{21}m_{32} - q^{-1}m_{22}m_{31}) \tag{2.2}$$

不为零．注意 $D_q(M)$ 与任一矩阵元 m_{ij} 可交换．

定义量子矩阵元代数 $A(3)_q$ 为由满足(2.1)(2.2)的全体矩阵元 $\{m_{ij}|1 \leqslant i, j \leqslant 3\}$ 生成的结合代数．本文的目的就是研究 $A(3)_q$ 的结构与表示．

注意到M的反对角线元素 $\{m_{i4-i}|i = 1, 2, 3\}$ 是最大的互相可对易组，它们生成 $A(3)_q$ 的一个极大可交换子代数 $H(3)_q$．类似于半单李代数，我们称之为 Cartan 子代数，且 m_{i4-i} 称为 Cartan 元．这样，在代数闭域 $\mathbf{C}$ 上存在 m_{i4-i} 的共同本征矢 v_0:

$$m_{i4-i}v_0 = \lambda_i v_0, \quad \lambda_i \in \mathbf{C}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{2.3}$$

为了定义 Verma 模，必须首先定义上升下降生成元和极大向量．什么是上升生成元？事实上，注意到 $D_q(M)$ 与任一矩阵元可交换，故 $D_q(M)$ 在 Verma 模中为非零常数倍的要求变成：

$$D_q(M)v_0 = \Gamma v_0, \quad \Gamma \in \mathbf{C}. \tag{2.4}$$

若令

$$m_{ij}v_0 = 0 \quad (j > 4 - i) \tag{2.5}$$

则显然(2.4)成立且 $\Gamma = -q^{-3}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$．因此，我们定义 $m_{ij}(j > 4 - i)$ 和 $m_{ij}(j < 4-i)$ 分别为上升和下降生成元．这样在(2.3)和(2.5)的意义下 v_0 为极大向量．

注意到

$$[m_{ij}, m_{4-j,4-i}] = (q^{-1} - q)m_{i4-i}m_{4-jj} \in H(3)_q. \quad (j < 4 - i)$$

我们说 $\{m_{ij}, m_{4-j,4-i}\}$ $(j < 4 - i)$ 是一个下降上升生成元对 (Pair)．这一概念类似于半单李代数中对应于同一个正根 α 的上升下降生成元对 $\{x_\alpha, y_\alpha\}$．显然 $A(3)_q$ 有三个对：

$$\{m_{11}, m_{33}\}, \quad \{m_{12}, m_{32}\}, \quad \{m_{21}, m_{23}\}.$$

分析完 $A(3)_q$ 的结构后，我们来研究 $A(3)_q$ 的 Verma 模 $V(\lambda_i) \equiv V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = A(3)_q \cdot v_0$．显然 $V(\lambda_i)$ 是由

$$\{\tilde{X}(m, n, r) \equiv m_{12}^m m_{21}^n m_{11}^r v_0 | m, n, r \in \mathbf{Z}^+\} \tag{2.6}$$

张成．但是，m_{22} 作用在(2.6)上并不是对角的：

$$m_{22}\tilde{X}(m, n, r) = q^{m+n}\lambda_2\tilde{X}(m, n, r) - (1 - q^{2r})q^{m+n-2r-1}\tilde{X}(m + 1, n + 1, r).$$

我们自然希望象李代数中一样能选择一组基，使得 $m_{i4-i}(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 作用在该基上是对角的．为此目的，我们选择一组新变量：

$$\{X(m, n, r) \equiv m_{12}^m m_{21}^n \Delta^r | \Delta = m_{11}m_{22} - q^{-1}m_{12}m_{21}, m, n, r \in \mathbf{Z}^+\}, \tag{2.7}$$

我们证明：当 $q^p \neq 1$ 时，(2.7)形成 $V(\lambda_i)$ 的一组基．事实上，利用如下的递推公式：

$$\tilde{X}(m, n, r) = \lambda_2^{-1}\Delta\tilde{X}(m, n, r - 1) - \lambda_2^{-1}q^{-2r+1}\tilde{X}(m + 1, n + 1, r - 1),$$

可以把 $\tilde{X}(m, n, r)$ 写成有限多个 $X(m, n, r)$ 的线性组合形式，即(2.7)是完备的．注意如下的本征方程

$$(m_{13} + m_{22} + m_{31}) \times (m, n, r) = (\lambda_1 q^{m+r} + \lambda_2 q^{m+n} + \lambda_3 q^{n+r}) \times (m, n, r)$$

以及 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 的任意性，我们知道当 $q^p \neq 1$ 时，$X(m,n,r)$ 是 $(m_{13}+m_{22}+m_{31})$ 的属于不同本征值的本征向量，即 $X(m,n,r)$ 是线性无关的. 这样就证明了我们的结论. 此时，在 $V(\lambda_i)$ 上的表示可以显然地写为:

$$
\begin{aligned}
m_{22}X(m,n,r) &= q^{m+n}\lambda_2 X(m,n,r),\\
m_{13}X(m,n,r) &= q^{m+r}\lambda_1 X(m,n,r),\\
m_{31}X(m,n,r) &= q^{n+r}\lambda_3 X(m,n,r),\\
m_{12}X(m,n,r) &= X(m+1,n,r),\\
m_{21}X(m,n,r) &= X(m,n+1,r),\\
m_{11}X(m,n,r) &= q^{-(m+n)}\lambda_2^{-1}X(m,n,r+1) + q^{-(m+n+1)}\lambda_2^{-1}X(m+1,n+1,r),\\
m_{23}X(m,n,r) &= -q^{n+r-1}\lambda_1\lambda_2(1-q^{2m})X(m-1,n,r),\\
m_{32}X(m,n,r) &= -q^{m+r-1}\lambda_2\lambda_3(1-q^{2n})X(m,n-1,r),\\
m_{33}X(m,n,r) &= q^{-3}\lambda_1\lambda_2\lambda_3(1-q^{2r})X(m,n,r-1)\\
&\quad + q^{2r-2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3(1-q^{2m})(1-q^{2n})X(m-1,n-1,r). \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

我们证明当 $q^p \neq 1$ 时表示(2.8)是无限维不可约表示. 设 $\tilde{V}$ 为 $V(\lambda_i)$ 的任一非零不变子空间，则在 $\tilde{V}$ 中存在一个非零向量

$$0 \neq v = \sum_{m,n,r} C_{mnr}X(m,n,r) \in \tilde{V}, \quad 0 \neq C_{mnr} \in \mathbb{C}.$$

设 $\tilde{m}$ 是 m 中最大的一个，则

$$m_{23}^{\tilde{m}}v = \sum_{n\,r}(-q^{(n+r-1)\tilde{m}})(\lambda_1\lambda_2)^{\tilde{m}}(1-q^{2\tilde{m}})\cdots(1-q^2)C_{\tilde{m}nr}X(0,n,r) \in \tilde{V}.$$

利用相同的方法，用 $m_{32}^{\tilde{n}}$ 和 $R^{\tilde{r}}$ 作用 $m_{23}^{\tilde{m}}v$, 其中 $\tilde{n}$ 和 $\tilde{r}$ 分别是 v 中 n,r 的最大值，

$$
\begin{aligned}
R &= m_{33} - q m_{23}m_{32}m_{22}^{-1},\\
RX(m,n,r) &= q^{-3}\lambda_1\lambda_2\lambda_3(1-q^{2r})X(m,n,r-1),
\end{aligned}
$$

并注意到当 $q^p \neq 1$ 时所有系数不为零，我们得到 $X(0,0,0) \in \tilde{V}$. 再利用 m_{12}^m, m_{21}^n 和 $(m_{11}-q^{-1}m_{12}m_{21}m_{22}^{-1})^r$ 作用到 $X(0,0,0)$ 上，注意到

$$(m_{11}-q^{-1}m_{12}m_{21}m_{22}^{-1})X(m,n,r) = q^{-(m+n)}\lambda_2^{-1}X(m,n,r+1),$$

我们有 $X(m,n,r) \in \tilde{V}$ $(m,n,r \in \mathbf{Z}^+)$. 因此 $\tilde{V} \equiv V(\lambda_i)$. 这意味着(2.8)当 $q^p \neq 1$ 时为无穷维不可约表示.

下面我们讨论当 q 是 1 的根，即 $q^p = 1$ 的情况. 此时，$V(\lambda_i)$ 不再是一个不可约模了. 事实上，注意到在 $V(\lambda_i)$ 中 m_{12}^p, m_{21}^p 和 Δ^p 与任意元可交换，故 $\{m_{12}^p-\mu_1, m_{21}^p-\mu_2, \Delta^p-\mu_3 | \mu_i \in \mathbb{C}\}$ 生成 $V(\lambda_i)$ 的一个真子模 $I(\mu_i)$、显然商模 $W(\lambda_i,\mu_i) \equiv V(\lambda_i)/I(\mu_i)$ 的基可以取为

$$
\begin{aligned}
\{Y(m,n,r) \equiv X(m,n,r)\,\mathrm{Mod}\,I(\mu_i) \,|\, 1 \leqslant m,n,r \leqslant p-1\},\\
\dim W(\lambda_i,\mu_i) = p^3. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

则表示(2.8)在 $W(\lambda_i\mu_i)$ 上诱导一个 p^3 维表示:

$$
\begin{aligned}
m_{22}Y(m,n,r) &= q^{m+n}\lambda_2 Y(m,n,r),\\
m_{13}Y(m,n,r) &= q^{m+r}\lambda_1 Y(m,n,r),\\
m_{31}Y(m,n,r) &= q^{n+r}\lambda_3 Y(m,n,r),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& m_{12}Y(m,n,r) = Y(m+1,n,r), \quad (m \neq p-1) \\
& m_{12}Y(p-1,n,r) = \mu_1 Y(0,n,r), \\
& m_{21}Y(m,n,r) = Y(m,n+1,r), \quad (n \neq p-1) \\
& m_{21}Y(m,p-1,r) = \mu_2 Y(m,0,r), \\
& m_{11}Y(m,n,r) = q^{-(m+n)}\lambda_2^{-1}Y(m,n,r+1) + q^{-(m+n+1)}\lambda_2^{-1}Y(m+1,n+1,r), \\
& \qquad\qquad (m,n,r \neq p-1) \\
& m_{11}Y(p-1,n,r) = q^{-n+1}\lambda_2^{-1}Y(p-1,n,r+1) + q^{-n}\lambda_2^{-1}\mu_1 Y(0,n+1,r), \\
& m_{11}Y(m,p-1,r) = q^{-m+1}\lambda_2^{-1}Y(m,p-1,r+1) + q^{-m}\lambda_2^{-1}\mu_2 Y(m+1,0,r), \\
& m_{11}Y(m,n,p-1) = q^{-(m+n)}\lambda_2^{-1}\mu_3 Y(m,n,0) \\
& \qquad\qquad + q^{-(m+n-1)}\lambda_2^{-1}Y(m+1,n+1,p-1).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

利用相同的方法并注意到 $q^t \neq 1(1 \leqslant t \leqslant p-1)$，可以证明(2.10)为 p^3 维不可约表示.

不难验证在(2.10)中

$$m_{12}^p = \mu_1,\ m_{21}^p = \mu_2,\ \Delta^p = \mu_3,\ m_{32}^p = m_{23}^p = m_{33}^p = 0,$$

故(2.10)并不是一个真正的 Cyclic 表示。为了构造真正的 Cyclic 表示，我们首先构造其 q-boson 实现。

三、$A(3)_q$ 的 q-boson 实现

为了构造 $A(3)_q$ 的 q-boson 实现，我们定义 3 个 q-boson 的 q-Fock 空间 $\mathscr{F}_q(3)$:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_q(3):\{|m,n,r\rangle \equiv (b_1^+)^m(b_2^+)^n(b_3^+)^r|0\rangle \mid b_i|0\rangle = 0,\ q^{N_i}|0\rangle = |0\rangle \\
i = 1,2,3;\ m,n,r \in \mathbf{Z}^+\}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

则映射 $\varphi: V(\lambda_i) \to \mathscr{F}_q(3)$

$$\varphi: X(m,n,r) \longmapsto |m,n,r\rangle \tag{3.2}$$

为一个线性空间同构. 定义

$$\Gamma \equiv \varphi\rho\varphi^{-1}, \tag{3.3}$$

其中 ρ 为表示(2.8)，则 Γ 为 $A(3)_q$ 在 $\mathscr{F}_q(3)$ 上的一个表示。不难证明:

$$\Gamma(x)|m,n,r\rangle = \sum_{m',n',r'} \rho(x)_{m,n,r}^{m',n',r'}|m',n',r'\rangle,\ \forall x \in A(3)_q. \tag{3.4}$$

利用 q-Heisenberg-Weyl 代数在 $\mathscr{F}_q(3)$ 上的表示

$$
\begin{aligned}
& q^{N_1}|m,n,r\rangle = q^m|m,n,r\rangle, q^{N_2}|m,n,r\rangle = q^n|m,n,r\rangle, \\
& q^{N_3}|m,n,r\rangle = q^r|m,n,r\rangle, b_1^+|m,n,r\rangle = |m+1,n,r\rangle, \\
& b_2^+|m,n,r\rangle = |m,n+1,r\rangle, b_3^+|m,n,r\rangle = |m,n,r+1\rangle, \\
& b_1|m,n,r\rangle = [m]|m-1,n,r\rangle = -\frac{1}{q-q^{-1}}q^{-m}(1-q^{2m})|m-1,n,r\rangle, \\
& b_2|m,n,r\rangle = -\frac{1}{q-q^{-1}}q^{-n}(1-q^{2n})|m,n-1,r\rangle, \\
& b_3|m,n,r\rangle = -\frac{1}{q-q^{-1}}q^{-r}(1-q^{2r})|m,n,r-1\rangle,
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

可把 $\Gamma(x)$ 写成 q-boson 算符的形式

$$m_{22}=\lambda_2 q^{N_1}q^{N_2},\quad m_{13}=\lambda_1 q^{N_1}q^{N_3},\quad m_{31}=\lambda_3 q^{N_2}q^{N_3},$$
$$m_{12}=b_1^+,\quad m_{21}=b_2^+,\quad m_{11}=\lambda_2^{-1}q^{-N_1}q^{-N_2}(b_3^+ + qb_1^+b_2^+),$$
$$m_{23}=(q-q^{-1})\lambda_1\lambda_2 q^{N_1}q^{N_2}q^{N_3}b_1,\quad m_{32}=(q-q^{-1})\lambda_2\lambda_3 q^{N_1}q^{N_2}q^{N_3}b_2,$$
$$m_{33}=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{-2}(q-q^{-1})q^N b_3+(q-q^{-1})^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{N_1}q^{N_2}q^{2N_3}b_1b_2. \tag{3.6}$$

这就是我们要得到的 $A(3)_q$ 的 q-boson 实现。上面所使用的方法是求量子通用包络代数的 q-boson 实现方法的推广[9]。

注意 q-boson 实现(3.6)在 $q^p \neq 1$ 和 $q^p=1$ 时均成立。利用 q-Heisenberg-Weyl 代数的基本定义关系可直接验证这一事实。

四、$A(3)_q$ 的 Cyclic 表示

在本小节中假定 q 为 1 的 p 次根,即 $q^p=1$。

我们的目的是利用 $A(3)_q$ 的 q-boson 实现来构造 $A(3)_q$ 的 Cyclic 表示。在文[9]中我们已经构造了 q-Heisenberg-Weyl 代数的 Cyclic 表示。对于三个 q-boson 情况,设 $V_p(3)$ 是由 $\{v(m,n,r)|1\leqslant m,n,\ r\leqslant p-1\}$ 张成的线性空间,则3态 q-Heisenberg-Weyl 代数的 Cyclic 表示定义为 ($\xi_i\in \mathrm{C}^X$, $\zeta_i^p \neq 1$):

$$q^{N_1}v(m,n,r)=q^{m+\zeta_1}v(m,n,r),\quad q^{N_2}v(m,n,r)=q^{n+\zeta_2}v(m,n,r),$$
$$q^{N_3}v(m,n,r)=q^{r+\zeta_3}v(m,n,r),\quad b_1^+v(m,n,r)=v(m+1,n,r)(m\neq p-1),$$
$$b_1^+v(p-1,n,r)=\xi_1 v(0,n,r),\quad b_2^+v(m,n,r)=v(m,n+1,r)(n\neq p-1),$$
$$b_2^+v(m,p-1,r)=\xi_2 v(m,0,r),\quad b_3^+v(m,n,r)=v(m,n,r+1)(r\neq p-1),$$
$$b_3^+v(m,n,p-1)=\xi_3 v(m,n,0),\quad b_1v(m,n,r)=[m+\zeta_1]v(m-1,n,r)(m\neq 0),$$
$$b_1v(0,n,r)=\xi_1^{-1}[\zeta_1]v(p-1,n,r),\quad b_2v(m,n,r)=[n+\zeta_2]v(m,n-1,r)(n\neq 0),$$
$$b_2v(m,0,r)=\xi_2^{-1}[\zeta_2]v(m,p-1,r),\quad b_3v(m,n,r)=[r+\zeta_3]v(m,n,r-1)\quad (r\neq 0),$$
$$b_3v(m,n,0)=\xi_3^{-1}[\zeta_3]v(m,n,p-1). \tag{4.1}$$

利用 $A(3)_q$ 的 q-boson 实现(3.6)立即得到 $A(3)_q$ 的 p^3 维 Cyclic 表示:

$$m_{22}v(m,n,r)=\lambda_2 q^{m+n+\zeta_1+\zeta_2}v(m,n,r),$$
$$m_{13}v(m,n,r)=\lambda_1 q^{m+r+\zeta_1+\zeta_3}v(m,n,r),$$
$$m_{31}v(m,n,r)=\lambda_3 q^{n+r+\zeta_2+\zeta_3}v(m,n,r),$$
$$m_{12}v(m,n,r)=v(m+1,n,r)\ (m\neq p-1),$$
$$m_{12}v(p-1,n,r)=\xi_1 v(0,n,r),$$
$$m_{21}v(m,n,r)=v(m,n+1,r)\ (n\neq p-1),$$
$$m_{21}v(m,p-1,r)=\xi_2 v(m,0,r),$$
$$m_{11}v(m,n,r)=\lambda_2^{-1}q^{-(m+n+\zeta_1+\zeta_2)}v(m,n,r+1)+\lambda_2^{-1}q^{-(m+n+\zeta_1+\zeta_2+1)}v(m+1,n+1,r)\quad (m,n,r\neq p-1),$$
$$m_{11}v(p-1,n,r)=\lambda_2^{-1}q^{-(m+\zeta_1+\zeta_2-1)}v(p-1,n,r+1)+\lambda_2^{-1}q^{-(n+\zeta_1+\zeta_2)}\xi_1 v(0,n+1,r)\quad (n,r\neq p-1),$$

$$m_{11}v(m,p-1,r)=\lambda_2^{-1}q^{-(m+\zeta_1+\zeta_2-1)}v(m,p-1,r)+\lambda_2^{-1}q^{-(m+\zeta_1+\zeta_2)}\xi_2 v(m,0,r)$$
$$(m,r\neq p-1),$$
$$m_{11}v(m,n,p-1)=\lambda_2^{-1}q^{-(m+n+\zeta_1+\zeta_2)}\xi_3(m,n,0)+\lambda_2^{-1}q^{-(m+n+\zeta_1+\zeta_2+1)}v(m+1,\ n+1,\ p-1)\quad(m,n\neq p-1),$$
$$m_{23}v(m,n,r)=(q-q^{-1})\lambda_1\lambda_2 q^{m+n+r+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3-1}[m+\zeta_1]v(m-1,n,r)\ (m\neq 0),$$
$$m_{23}v(0,n,r)=(q-q^{-1})\lambda_1\lambda_2 q^{n+r+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3-1}\xi_1^{-1}[\zeta_1]v(p-1,n,r),$$
$$m_{32}v(m,n,r)=(q-q^{-1})\lambda_2\lambda_3 q^{m+n+r+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3-1}[n+\zeta_2]v(m,n-1,r)\ (n\neq 0),$$
$$m_{32}v(m,0,r)=(q-q^{-1})\lambda_2\lambda_3 q^{m+r+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3-1}\xi_2^{-1}[\zeta_2]v(m,p-1,r),$$
$$m_{33}v(m,n,r)=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{-3}(q-q^{-1})q^{r+\zeta_3}[r+\zeta_3]v(m,n,r-1)$$
$$+(q-q^{-1})^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{m+n+2r+\zeta_1+\zeta_2+2\zeta_3}[m+\zeta_1][n+\zeta_2]v(m-1,n-1,r),$$
$$(m,n,r\neq 0),$$
$$m_{33}v(0,n,r)=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{-3}(q-q^{-1})q^{r+\zeta_3}[r+\zeta_3]v(0,n,r-1)$$
$$+(q-q^{-1})^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{n+2r+\zeta_1+\zeta_2+2\zeta_3}\xi_1^{-1}[\zeta_1][n+\zeta_2]v(p-1,n,r),(n,r\neq 0),$$
$$m_{33}v(m,0,r)=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{-3}(q-q^{-1})q^{r+\zeta_3}[r+\zeta_3]v(m,0,r-1)$$
$$+(q-q^{-1})^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{m+2r+\zeta_1+\zeta_2+2\zeta_3}[m+\zeta_1]\xi_2^{-1}[\zeta_2]v(m,p-1,r),(m,r\neq 0),$$
$$m_{33}v(m,n,0)=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{-3}(q-q^{-1})q^{\zeta_3}\xi_3^{-1}[\zeta_3]v(m,n,p-1)$$
$$+(q-q^{-1})^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 q^{m+n+\zeta_1+\zeta_2+2\zeta_3}[m+\zeta_1][n+\zeta_2]v(m-1,n-1,0),$$
$$(m,n\neq 0)\tag{4.2}$$

不难验证当 $\zeta_i(i=1,2,3)$ 是 generic, 即 $\zeta_i^p\neq 1$ 时此表示是一个真正的 Cyclic 表示，中心元素 m_{ii}^p 均为单位矩阵的非零常数倍。

值得注意的是当 ζ_i 满足 $\zeta_i^p=1$ 时，表示(4.2)退化为表示(2.10)。因此表示(2.10)是一般的 Cyclic 表示(4.2)的特殊情况。

五、小　结

本文利用研究半单李代数的结构和 Verma 模的方法研究了 $A(3)_q$ 的结构和 Verma 模，并从 Verma 模出发构造了 $A(3)_q$ 的 q-boson 实现，进而求出了当 $q^p=1$ 时的 Cyclic 表示。本文中所使用的方法可以推广到任意量子群 $GL(n)_q$ 的矩阵元代数 $A(n)_q$ 的结构与 Verma 模的研究，特别是讨论 $A(n)_q$ 的所有有限维不可约表示的分类。这些问题是作者进一步的工作。

参　考　文　献

[1] S. L. Woronowicz, *Commun. Math. Phys.*, **111**(1987), 613; *Publ. RIMS*, **23**(1987), 117;
Yu. I. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, Centre des Recherches Mathematiciques, Montreal University report.

[2] V. Drinfeld, Proc. ICM (Berkely, 1986) 793;
M. Jimbo. *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63; **11** (1986), 247.

[3] V. Drinfeld, *Sov. Math. Dokl.*, **32**(1985), 254;
M. Jimbo, *Commun. Math. Phys.*, **102**(1987), 537

[4] L. A. Takhtajan, *Lectures on quantum groups*, in *Introduction To Quantum Groups And Integrable Massive*

Models of Quantum Field Theory (ed. by M. L. Ge and B. H. Zhao), World Scientific (1990).
[5] E. G. Floratos, *Phys. Lett.*, **B233**(1990), 395.
[6] J. Weyers, *Phys. Lett.*, **B240**(1990), 396.
[7] R. Chakrabarti and R. Jagannathan, *J. Phys.*, **A24**(1991), 1709.
[8] M. L. Ge, C. P. Sun and X. F. Liu, *Phys. Lett.*, **A160**(1991), 433.
[9] H. C. Fu and M. L. Ge, *The q-boson realization of parametrized cyclic representations of quantum algebras at* $q^p=1$, J. Math. Phys. **33**(1992), 427.

Verma Module of Quantum Group $GL(3)_q$, Its q-Boson Realization and Cyclic Representations

Fu Hongchen Ge Molin

(Theoretical Physics Division, Nankai Institute of Mathematics Tianjin 300071)

Abstract

The structure and Verma module of matrix element algebra $A(3)_q$ of quantum group $GL(3)_q$ are studied using a similar method for studying the structure and Verma module of semi-simple Lie algebras. The q-boson realization of $A(3)_q$ is constructed from its verma representation and the cyclic representation of $A(3)_q$ is obtained in terms of the q-boson realization.