第15卷 第9期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 9
1991年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1991

XXZ 模型及其对称代数的结构

马中骐
(中国科学院高能物理研究所,北京 100039)

侯伯元
(中国科学院研究生院,北京 100039)

侯伯宇
(西北大学现代物理所,西安 710069)

摘　　要

本文以具量子代数 $SL_q(2)$ 对称性的 XXZ Heisenberg 自旋链为例,利用 Temperley-Lieb 代数结构,深入分析 $q^p=\pm 1$ 时 $SL_q(2)$ 量子代数的有限维表示,讨论了可约而不可分解表示 (I 型表示)出现的条件及其性质,并采用取极限办法得到新的状态,从而得到对应确定能量状态的完全集合.

一. XXZ 模型[1]及其量子代数的对称性

首先我们简单分析各向同性 Heisenberg 自旋开链——XXX 模型,其哈密顿量为

$$H_0'=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\boldsymbol{\sigma}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}_{j+1}, \tag{1}$$

它描写位于线性点阵上的N个自旋 1/2 粒子体系,具近邻交换互作用. 利用两位置间置换算子

$$P_j=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\sigma}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}_{j+1}), \tag{2}$$

可将(1)式哈密顿量加上适当常数项,写成

$$H_0=\sum_{j=1}^{N-1}P_j', \quad (P_j'=1-P_j), \tag{3}$$

此哈密顿量与 $SL(2)$ 代数的张量积对易. 因此 XXX 模型具有 $SL(2)$ 代数对称性,其本征态可按 $SL(2)$ 代数不可约表示分解.

下面我们分析各向异性 Heisenberg 链,其哈密顿量可写为

$$H'=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x+\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y+\delta\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z), \tag{4}$$

本文 1991 年3月6日收到.

当 $\sigma \neq 1$ 时，称 XXZ 模型[1,2]，此自旋链不再具有 $SL(2)$ 对称性。令

$$\delta = \frac{1}{2}(q + q^{-1}), \tag{5}$$

讨论 $q \neq 1$ 时相应各代数的畸变。Hecke 代数 $\mathscr{H}_N$ 是置换群代数 $\mathscr{S}_N$ 的 q 畸变，对应于 $SL(2)$ 的基本表示，置换算子 P 的 q 畸变得到 $\check{R}$ 矩阵

$$\check{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & q & 1-q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

利用 $\check{R}$ 矩阵可如下组成辫子群 $\mathscr{B}_N$ 的 Hecke 代数表示：

$$b_j = 1^{(1)} \otimes \cdots \otimes 1^{(j-1)} \otimes \check{R} \otimes 1^{(j+2)} \otimes \cdots \otimes 1^{(N)}, \tag{7}$$

其中 $1^{(i)}$ 为在第 i 个位置的 2×2 单位矩阵，b_j 间满足如下关系式：

$$b_j b_{j+1} b_j = b_{j+1} b_j b_{j+1}; \tag{8a}$$

$$b_i b_j = b_j b_i \ (\text{当 } |i-j| \geqslant 2); \tag{8b}$$

$$(b_j - 1)(b_j + q^2) = 0, \tag{8c}$$

当 $q = 1$ 时以上各式简化为通常置换群代数 $\mathscr{S}_N$ 的元素乘法关系。

与(3)式类似，相当于 $P'_j = 1 - P_j$，可引入

$$E = q^{-1}(1 - \check{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$e_j = 1^{(1)} \otimes \cdots \otimes 1^{(j-1)} \otimes E \otimes 1^{(j+2)} \otimes \cdots \otimes 1^{(N)}, \tag{10}$$

满足如下代数关系：

$$e_j e_{j\pm 1} e_j = e_j; \tag{11a}$$

$$e_i e_j = e_j e_i, \ |i-j| \geqslant 2; \tag{11b}$$

$$e_j^2 = (q + q^{-1}) e_j, \tag{11c}$$

此即在统计可解模型中得到的 Temperley-Lieb 代数[3]，与它相对易的是 q 畸变李代数，称为量子代数。量子代数 $SL_q(2)$[4,5]的各生成元 S^z、$S^\pm$间满足如下关系：

$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm; \tag{12a}$$

$$[S^+, S^-] = [2S^z]_q, \tag{12b}$$

其中

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \tag{13}$$

为简化符号，常忽略 $[x]_q$ 的下标 q，记为 $[x]$。对整数 m，可记

$$[m]! = [m][m-1]\cdots[2][1]. \tag{14}$$

与普通李代数的张量积对应，在量子代数中存在余乘积 (Co-product)Δ^2：

$$\Delta^2(S^z) = S^z \otimes 1 + 1 \otimes S^z; \tag{15a}$$

$$\Delta^2(S^\pm) = S^\pm \otimes q^{-t^z} + q^{t^z} \otimes S^\pm, \tag{15b}$$

它们仍满足(12)式代数关系，且

$$[E,\ \Delta^2(S^\alpha)]=0,\ \alpha=z,\pm, \tag{16}$$

即 Temperley-Lieb 代数与量子代数对易。注意到:

$$E=-\frac{1}{2}\left(\sigma^x\otimes\sigma^x+\sigma^y\otimes\sigma^y+\frac{1}{2}[2]\sigma^z\otimes\sigma^z\right)$$
$$+\frac{1}{4}[2]I-\frac{1}{4}(q-q^{-1})(\sigma^z\otimes 1-1\otimes\sigma^z)$$

与(3)式相当，可将(4)式哈密顿量加上常数项及边界项，得到具有量子代数 $SL_q(2)$ 对称性的 XXZ 模型:

$$H=\sum_{j=1}^{N-1}e_j=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x+\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y+\frac{1}{2}[2]\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right)$$
$$+\frac{1}{4}[2](N-1)I-\frac{1}{4}(q-q^{-1})(\sigma_1^z-\sigma_N^z). \tag{17}$$

下面以此模型为例，对其对称代数 $SL_q(2)$ 的结构进行深入分析。

二. 量子 Young 算子及哈密顿量的本征态.

通常利用 Young 算子将李代数张量积的不可约表示进行分解，它是置换群代数 $\mathscr{S}_N$ 的素理想幂等元。现在哈密顿体系(17)具有 $SL_q(2)$ 对称性，可利用量子 Young 算子来找 H，$\Delta^N(S^z)$，和体系总自旋的共同本征态[6]。对由N个自旋 1/2 粒子组成的链，仅需讨论两行N格 Young 图 $(N-n,n)$ 其中 $n\leqslant N/2$，为第二排格子数，在 $\Delta^N(S^z)$ 最高权状态，n 代表自旋向下的粒子数，第一排格子数 $N-n$ 代表自旋向上粒子数。相对每一个二行 Young 图，可找下列正则 Young 表相应的量子 Young 算子 Y_n 的明显形式

1	3	·····	$2n-1$	$2n+1$	·····	N
2	4	·····	$2n$			

$$Y_n=e_1e_3\cdots\cdots e_{2n-1}Z_n^N, \tag{18}$$

其中 Z_n^N 含有 $e_{2n+1},\cdots,e_{N-1}$，具有性质

$$e_jZ_n^N=Z_n^Ne_j=0,\ 当\ j>2n. \tag{19}$$

可利用带谱参数的辫子群元

$$g_j(u)=[1+u]-[u]e_j, \tag{20}$$

令 u 取某些整数时的表达式来组成 Z_n^N，即

$$Z_n^{2n+1}=1,\ Z_n^{2n+2}=g_{2n+1}(1),$$
$$Z_n^{2n+3}=Z_n^{2n+2}g_{2n+2}(2)Z_n^{2n+2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$Z_n^N=Z_n^{N-1}g_{N-1}(N-2n-1)Z_n^{N-1}. \tag{21}$$

易证由(18)式引入的算子 Y_n 为素幂等元，是投影算子。

由满足 (11) 式的 $e_i(i=1,2,\cdots,N-1)$ 及单位元 I 生成的 Temperley-Lieb 代数 $\mathscr{A}_N$，其中若干个 e_i 的乘积称为字，当利用 (11a, c) 而不能再缩短的字称已约字，利用 (11b) 相等的字称等价。$\mathscr{A}_N$ 中非等价已约字数，即代数 $\mathscr{A}_N$ 的维数为：

$$\dim(\mathscr{A}_N)=\frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}. \tag{22}$$

利用量子 Young 算子 Y_n 及字 $w\in\mathscr{A}_N$，可组成 $\mathscr{A}_N$ 的素左理想 wY_N。左理想的独立基可表为：

$$^nC_{(m)}Z_n^N\equiv C_1^{m_1}C_3^{m_2}\cdots C_{2n-1}^{m_n}Z_n^N, \tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned}&1\leqslant m_1<m_2<\cdots\cdots<m_n\leqslant N-1,\\&m_i\geqslant 2i-1,\\&C_i^m=e_me_{m-1}\cdots\cdots e_i.\end{aligned} \tag{24}$$

不同 Young 图描写不等价不可约表示，对给定 Young 图$(N-n,n)$，相应左理想基 $^nC_{(m)}Z_n^N$ 的数目 M_n，即相应不等价不可约表示的维数为

$$M_n=\binom{N-1}{n}-\binom{N-1}{n-2}. \tag{25}$$

本节假定 q 不是单位根，分析 XXZ 模型哈密顿量(17)与 $\Delta^N(S^z)$ 的本征态。n 个自旋向下的本征态可记为

$$|x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\rangle,\ 1\leqslant x_1<\cdots\cdots<x_n\leqslant N, \tag{26}$$

其中 x_i 标志向下自旋在链上位置。为确定起见，具 n 个向下自旋的表示最高权态可记为

$$^n\chi_m={}^nC_{(m)}|1,3,5,\cdots\cdots,2n-1\rangle, \tag{27}$$

其中 Z_n^N 作用在态 $|1,3,\cdots,2n-1\rangle$ 上所得常数因子被忽略。哈密顿量H的本征态为具有相同 n 的各 $^n\chi_m$ 的线性组合，即

$$\begin{aligned}&H^n\Phi_\kappa={}^nE_\kappa{}^n\Phi_\kappa,\ \kappa=1,2,\cdots\cdots,M_n,\\&^n\Phi_\kappa=\sum_{(m)}a_{(m)}^\kappa{}^n\chi_{(m)}.\end{aligned} \tag{28}$$

例如，$n=0$，所有粒子自旋向上，仅有的一个本征态为

$$\begin{aligned}&^0\Phi\equiv|\rangle_0,\\&^0E=0.\end{aligned} \tag{29}$$

当 $n=1$ 时，由本征方程

$$\begin{aligned}&H^1\Phi_\kappa={}^1E_\kappa{}^1\Phi_\kappa,\\&^1\Phi_\kappa=\sum_m a_m^\kappa{}^1C_m|\rangle\end{aligned} \tag{30}$$

得

$$\begin{aligned}&([2]-{}^1E_\kappa)a_m^\kappa+a_{m+1}^\kappa+a_{m-1}^\kappa=0,\ (1\leqslant m\leqslant N-1),\\&a_0^\kappa=a_N^\kappa=0.\end{aligned} \tag{31}$$

利用数学归纳法易证

$$\frac{a_m^\kappa}{a_1^\kappa}=(-1)^{m-1}\frac{\sin\frac{m\kappa\pi}{N}}{\sin\frac{\kappa\pi}{N}}=(-1)^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}e^{i(2k-m+1)\kappa\pi/N},\tag{32}$$

为简单起见,可令 $a_1^\kappa=1$, 再由 $a_N^\kappa=0$ 条件,可得能量本征值

$$^1E_\kappa=[2]-2\cos(\kappa\pi/N),\ \kappa=1,2,\cdots\cdots,N-1.\tag{33}$$

当 $n=2$ 时,由本征方程

$$H^2\Phi_\kappa={}^2E_\kappa{}^2\Phi_\kappa,$$

$$^2\Phi_\kappa=\sum_{m_1,m_2}a_{m_1,m_2}^\kappa{}^2C_{m_1,m_2}|1,3\rangle\tag{34}$$

得 a_{m_1,m_2}^κ 满足下列循环方程:

$$\begin{aligned}&(2[2]-{}^2E_\kappa)a_{m,m+2}^\kappa+a_{m-1,m+2}^\kappa+a_{m,m+1}^\kappa\\&\quad+2a_{m+1,m+2}^\kappa+a_{m,m+3}^\kappa+a_{m+2,m+3}^\kappa=0,\\&([2]-{}^2E_\kappa)a_{m,m+1}^\kappa+a_{m-1,m+1}^\kappa+a_{m,m+2}^\kappa=0,\\&(2[2]-{}^2E_\kappa)a_{m_1m_2}^\kappa+a_{m_1-1,m_2}^\kappa+a_{m_1,m_2-1}^\kappa\\&\quad+a_{m_1+1,m_2}^\kappa+a_{m_1,m_2+1}^\kappa=0,\ 当\ m_1+2<m_2,\end{aligned}\tag{35}$$

在以上各式中，如条件(24)被破坏时，$a_{m_1m_2}^\kappa=0$. 可令 $a_{1,3}^\kappa=1$，由上列代数方程组可解得能量本征值$^2E_\kappa$，同时可得本征态系数 $^\kappa a_{m_1,m_2}$. 例如当$N=4$时,由条件(24)知(35)式化为

$$\begin{aligned}&(2[2]-{}^2E_\kappa)a_{13}^\kappa+2a_{23}^\kappa=0,\\&([2]-{}^2E_\kappa)a_{23}^\kappa+a_{13}^\kappa=0,\end{aligned}\tag{36}$$

可解得

$$\begin{aligned}&{}^2E_\kappa=\frac{3}{2}[2]\pm\frac{1}{2}\sqrt{[2]^2+8},\\&{}^\kappa a_{13}=1,\ {}^\kappa a_{23}=\frac{1}{4}(-[2]\pm\sqrt{[2]^2+8}).\end{aligned}\tag{37}$$

三. $q^p=\pm1$ 时态的简并[7]及新态的产生.

上节利用量子 Young 算子所得哈密顿量H的本征态 $^n\phi_\kappa$，为具n个自旋向下的最高权态,具能量本征值 $^nE_\kappa$，及总角动量

$$j=\frac{1}{2}(N-2n),\tag{38}$$

用 $\Delta^N(S^+)$ 作用其上为零.由于H与 $\Delta^N(S^\pm)$ 对易,当进一步用 $\Delta^N(S^-)$ 作用，可得具相同能量 $^nE_\kappa$，而 $\Delta^N(S^z)$ 本征值$\alpha<j$的本征态 $^n\Phi_{\kappa\alpha}$.

$$^n\Phi_{\kappa\alpha}=[j-\alpha]^{-1}\Delta^N(S^-)^n\Phi_{\kappa,\alpha+1}.\tag{39}$$

上式 $^n\Phi_{\kappa\alpha}$ 中最后指标α为 $\Delta^N(S^z)$ 的本征值,当 $\alpha=\frac{1}{2}(N-2n)\equiv j$ 时，$^n\phi_{\kappa j}$ 为最高权态,为简化记号,对最高权态常忽略下标j而记为 $^n\Phi_\kappa$.

对一般的 q 值，能量为正则简并，具有不同能量或不同角动量的本征态相互正交：

$$\langle {}^{n'}\Phi_{\kappa'\alpha'}, {}^{n}\Phi_{\kappa\alpha}\rangle = \delta_{nn'}\delta_{\kappa\kappa'}\delta_{\alpha\alpha'}C, \tag{40}$$

而当 $q^p = \pm 1$ 时，发生偶然简并。例如，对于仅一个自旋向下的本征态，N 粒子链应有 N 个线性独立的态，其中 $N-1$ 个态 $\{{}^1\phi_\kappa\}$ 的能量 ${}^1E_\kappa$ 如(33)式

$${}^1E_\kappa = [2] - 2\cos(\kappa\pi/N),$$

另一个态属于能量本征值为零，是用 $\Delta^N(S^-)$ 作用在全部自旋均向上的态 $|\rangle_0$ 上所得态：

$$\Delta^N(S^-)|\rangle_0 = {}^0\Phi_{N/2-1} \equiv \Phi,\ {}^0E = 0. \tag{41}$$

集合 $\{\Phi, {}^1\Phi_\kappa; \kappa = 1, 2, \cdots, N-1\}$ 形成 N 个相互正交的本征态集合，但是当

$$q = q_\kappa \equiv e^{i\kappa\pi/N}\ (1 \leqslant \kappa \leqslant N), \tag{42}$$

${}^1\phi_\kappa$ 态的能量本征值

$${}^1E_\kappa = [2] - 2\cos(\kappa\pi/N) = 0\ (\text{当}\ q = q_\kappa). \tag{43}$$

Φ 与 ${}^1\Phi_\kappa$ 发生偶然简并，且变成零模态

$$\Phi = \lambda_\kappa {}^1\Phi_\kappa,\ (\text{当}\ q = q_\kappa) \tag{44}$$

独立态数减少，为得到本征态的完备集合，可如下利用取极限办法得到另一个独立的本征态

$$\Psi_\kappa = \lim_{q\to q_k} \frac{\Phi - \lambda_\kappa {}^1\Phi_\kappa}{q - q_\kappa}. \tag{45}$$

Ψ_κ 仍与其它 ${}^1\Phi_{\kappa'}(\kappa' \neq \kappa)$ 正交，Ψ_κ 与 Φ 相互线性独立，但不正交，而且

$$\Delta^N(S^+)\Psi_\kappa \propto |\rangle_0. \tag{46}$$

由 Φ 及 Ψ_κ 出发，用 $\Delta^N(S^-)^k/[k]!$ 作用，所得各态架设量子代数 $SL_q(2)$ 的可约但不可分解表示，称 I 型表示。

以上分析很易推广到自旋向下粒子数 $n > 1$ 时的一般情况。为了更清楚看出其特点，下节以 $N = 4$ 的自旋链为例来仔细分析。

四. 例：四自旋链的 XXZ 模型。

本节我们分析具有量子代数 $SL_q(2)$ 对称的四自旋链，哈密顿量如(17)式，其中 $N = 4$。通过此具体例子可看出量子代数 $SL_q(2)$ 的 I 型表示的一些特点。首先假定 q 非单位根。此体系有一个五重态，三个三重态，两个单态，共有 $2^4 = 16$ 个线性独立态：

(1) 五重态 ${}^0\Phi_\alpha(j = 2,\ {}^0E = 0)$

$${}^0\Phi \equiv |++++\rangle \equiv |\rangle_0,$$

$${}^0\Phi_1 = \Delta(S^-)|\rangle_0 = q^{-\frac{3}{2}}|1\rangle + q^{-\frac{1}{2}}|2\rangle + q^{\frac{1}{2}}|3\rangle + q^{\frac{3}{2}}|4\rangle,$$

$${}^0\Phi_0 = \frac{1}{[2]}\Delta(S^-){}^0\Phi_1 = q^{-2}|12\rangle + q^{-1}|13\rangle + |14\rangle + |23\rangle + q|24\rangle + q^2|34\rangle,$$

$${}^0\Phi_{\bar{1}} = \frac{1}{[3]}\Delta(S^-){}^0\Phi_0 = q^{-\frac{3}{2}}|123\rangle + q^{-\frac{1}{2}}|124\rangle + q^{\frac{1}{2}}|134\rangle + q^{\frac{3}{2}}|234\rangle,$$

$$^0\Phi_{\bar{2}} = \frac{1}{[4]}\Delta(S^-)^0\Phi_{\bar{1}} = |1234\rangle.$$

(2) 三个三重态 ($j=1$, $^1E_\kappa = [2] - 2\cos(\kappa\pi/4)$, $\kappa = 1,2,3$)

具有1个自旋向下的最高权态如(27)式

$$^1\chi_1 = e_1|1\rangle = q|1\rangle - |2\rangle,$$
$$^1\chi_2 = e_2e_1|1\rangle = -q|2\rangle + |3\rangle,$$
$$^1\chi_3 = e_3e_2e_1|1\rangle = q|3\rangle - |4\rangle.$$

由它们的线性组合如(30)—(33)式得哈密顿量本征态及本征值如下:

ⓐ $^1E_1 = [2] - \sqrt{2}$

$$^1\Phi_1 = {}^1\chi_1 - \sqrt{2}\,{}^1\chi_2 + {}^1\chi_3$$
$$= q|1\rangle + (\sqrt{2}q - 1)|2\rangle + (q - \sqrt{2})|3\rangle - |4\rangle,$$
$$^1\Phi_{10} = \Delta(S^-)^1\Phi_1$$
$$= \sqrt{2}q^{\frac{1}{2}}|12\rangle + (2q^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}q^{-\frac{1}{2}})|13\rangle$$
$$+ (q^{\frac{3}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})(|14\rangle + |23\rangle) + (\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}} - 2q^{\frac{1}{2}})|24\rangle - \sqrt{2}q^{\frac{1}{2}}|34\rangle,$$
$$^1\Phi_{1\bar{1}} = \frac{1}{[2]}\Delta(S^-)^1\phi_{10}$$
$$= q|123\rangle + (\sqrt{2}q - 1)|124\rangle + (q - \sqrt{2})|134\rangle - |234\rangle.$$

ⓑ $^1E_2 = [2]$

$$^1\Phi_2 = q|1\rangle - |2\rangle - q|3\rangle + |4\rangle,$$
$$^1\Phi_{20} = [2]q^{\frac{1}{2}}(|14\rangle - |23\rangle),$$
$$^1\Phi_{2\bar{1}} = -q|123\rangle + |124\rangle + q|134\rangle - |234\rangle.$$

ⓒ $^1E_3 = [2] + \sqrt{2}$

$$^1\Phi_3 = q|1\rangle - (\sqrt{2}q + 1)|2\rangle + (q + \sqrt{2})|3\rangle - |4\rangle,$$
$$^1\Phi_{30} = -\sqrt{2}q^{\frac{1}{2}}|12\rangle + (2q^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}q^{-\frac{1}{2}})|13\rangle + (q^{\frac{3}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})(|14\rangle + |23\rangle)$$
$$+ -(\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}} + 2q^{\frac{1}{2}})|24\rangle + \sqrt{2}q^{\frac{1}{2}}|34\rangle,$$
$$^1\Phi_{3\bar{1}} = q|123\rangle - (\sqrt{2}q + 1)|124\rangle + (q + \sqrt{2})|134\rangle - |234\rangle.$$

(3) 两个单态 $\left(j=0,\ ^2E_\kappa = \frac{3}{2}[2] \pm \frac{1}{2}\sqrt{[2]^2+8}\right)$

具有两个自旋向下的最高态如(34)式由下面两独立态组成

$$^2\chi_{13} = e_1e_3|13\rangle = q^2|13\rangle - q(|14\rangle + |23\rangle) + |24\rangle,$$
$$^2\chi_{23} = e_2e_1e_3|13\rangle = -q^2|12\rangle + q(|13\rangle + |24\rangle) - |34\rangle.$$

哈密顿量的本征值及本征态如(37)式:

$$^2E_\kappa = \frac{3}{2}[2] \pm \frac{1}{2}\sqrt{[2]^2+8},$$

$$
\begin{aligned}
{}^2\Phi_\kappa &= {}^2\chi_{13} + \frac{1}{4}(-[2]\pm\sqrt{[2]^2+8})^2\chi_{23} \\
&= \frac{q^2}{4}([2]\mp\sqrt{[2]^2+8})|12\rangle + \frac{1}{4}(3q^2-1\pm q\sqrt{[2]^2+8})|13\rangle \\
&\quad - q(|14\rangle + |23\rangle) + \frac{1}{4}(3-q^2\pm q\sqrt{[2]^2+8})|24\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4}([2]\mp\sqrt{[2]^2+8})|34\rangle.
\end{aligned}
$$

极易验证，对一般的 q 值，以上十六个态相互正交。但当 q 为单位根时，有些本征值及本征态会发生偶然简并，因而会出现 I 型表示。下面分别以 (1) $q=e^{i\pi/2}$，(2) $q=e^{i\pi/3}$，(3) $q=e^{i2\pi/3}$，(4) $q=e^{i\pi/4}$，(5) $q=e^{i3\pi/4}$ 等五种情况为例分别讨论，并将其结果如图 1—3 所示。

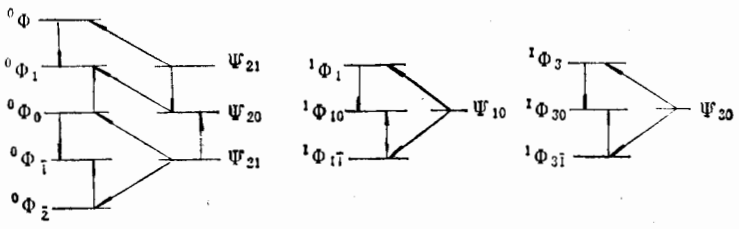

图 1　当 [2]=0 时的 I 型表示

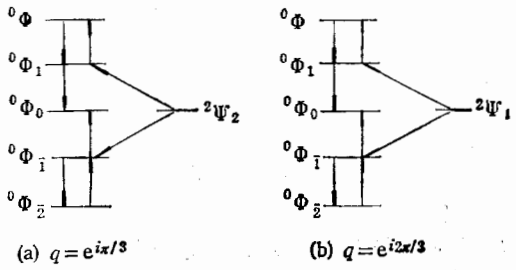

图 2　当 [3]=0 时的 I 型表示

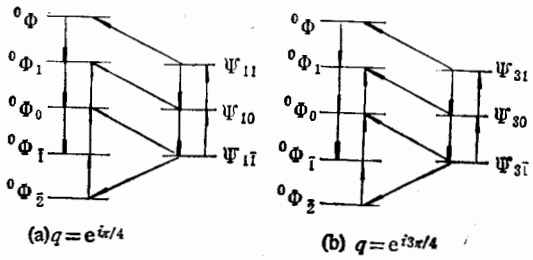

图 3　当 [4]=0 时的 I 型表示

(1) 当 $q=q_2\equiv e^{i\pi/2}$，$[2]=0$，这时

$$
{}^0E={}^1E_2=0,
$$

$$^1E_1 = {}^2E_2 = -\sqrt{2},$$
$$^1E_3 = {}^2E_1 = \sqrt{2},$$

发生偶然简并，可如下补充三个新态

$$\Psi_{21} = \lim_{q\to q_2} \frac{^0\Phi_1 - e^{i3\pi/4}\,{}^1\Phi_2}{q - q_2}$$
$$= \frac{1}{2} e^{-i\pi/4}(5|1\rangle + i|2\rangle - |3\rangle + 3i|4\rangle),$$
$$\Psi_{10} = \lim_{q\to q_2} \frac{^1\Phi_{10} + 2e^{i\pi/4}\,{}^2\Phi_2}{q - q_2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}\{-3|12\rangle - (3\sqrt{2} + i)|13\rangle$$
$$-(2 + i\sqrt{2})(|14\rangle + |23\rangle) - (\sqrt{2} + i)|24\rangle - |34\rangle\},$$
$$\Psi_{30} = \lim_{q\to q_2} \frac{^1\Phi_{30} + 2e^{i\pi/4}\,{}^2\Phi_1}{q - q_2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4}\{3|12\rangle - (3\sqrt{2} - i)|13\rangle$$
$$+ (2 - i\sqrt{2})(|14\rangle + |23\rangle) - (\sqrt{2} - i)|24\rangle + |34\rangle\}.$$

在 $\Delta(S^{\pm})$ 的作用下，可得到三个 I 型表示，它们的维数分别为 8,4,4，如图 1 所示.

(2) 当 $q = q_3 \equiv e^{i\pi/3}$, $[3] = 0$, 这时

$$^0E = {}^2E_2 = 0,$$

发生偶然简并，可补充新态

$$^2\Psi_2 = \lim_{q\to q_3} \frac{^0\Phi_0 + e^{-i\pi/32}\Phi_2}{q - q_3}$$
$$= \frac{1}{6}\{(24 + i2\sqrt{3})|12\rangle + (9 + i5\sqrt{3})|13\rangle - (3 - i3\sqrt{3})(|14\rangle$$
$$+ |23\rangle) + i2\sqrt{3}|34\rangle + (9 + i5\sqrt{3})|34\rangle\},$$

此态与原五重态混合，得 6 维 I 型表示如图 2(a) 所示.

(3) 当 $q = q_{3/2} = e^{i2\pi/3}$, $[3] = 0$, 这时

$$^0E = {}^2E_1 = 0,$$

发生偶然简并，可补充新态

$$^2\Psi_1 = \lim_{q\to q_{3/2}} \frac{^0\Phi_0 + e^{-i2\pi/32}\Phi_1}{q - q_{3/2}}$$
$$= \frac{1}{6}\{(-24 + i2\sqrt{3})|12\rangle + (9 - i5\sqrt{3})|13\rangle$$
$$+ (3 + i3\sqrt{3})(|14\rangle + |23\rangle) - i2\sqrt{3}|24\rangle - (9 - i5\sqrt{3})|34\rangle\},$$

此态与原五重态混合，得 6 维 I 型表示如图 2(b) 所示.

(4) 当 $q = q_4 \equiv e^{i\pi/4}$, $[4] = 0$, 这时

$$^0E = {}^1E_1 = 0,$$

发生偶然简并，可补充新态

$$\Psi_{11}=\lim_{q\to q_4}\frac{{}^0\Phi_1-e^{i5\pi/8}\,{}^1\Phi_1}{q-q_4}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-i\pi/8}\{10i|1\rangle-\sqrt{2}(1-5i)|2\rangle+(2+4i)|3\rangle+3\sqrt{2}(1+i)|4\rangle\},$$

此态与原五重态混合，得 8 维 I 型表示如图 3(a) 所示。

(5) 当 $q=q_{4/3}\equiv e^{i3\pi/4}$，$[4]=0$，这时

$${}^0E={}^1E_3=0,$$

发生偶然简并，可组成新态

$$\Psi_{31}=\lim_{q\to q_{4/3}}\frac{{}^0\Phi_1-e^{i\pi/8}\,{}^1\Phi_3}{q-q_{4/3}}$$

$$=\frac{1}{4}e^{i\pi/8}\{-10|1\rangle+\sqrt{2}(5-i)|2\rangle-(4+2i)|3\rangle+3\sqrt{2}(1+i)|4)\},$$

此态与原五重态混合得 8 维 I 型表示，如图 3(b) 所示。

参　考　文　献

[1] Alcaraz F C, Barber M N, Batchelor M T, Baxter R J and Quispel G R W, *J. Phys.*, **A20**(1987), 6397.
[2] Yang C. N. and Yang C. P. *Phys. Rev.* **150**(1966), 321.
[3] H. N. V. Temperley, E. H. Lieb, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A**, **322**(1971), 25.
[4] Drinfel'd V G, Quantum Group, Vol. 1, 798, Proc. I. C. M. Berkeley 1986.
[5] Jimbo M, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63.
[6] Levy D, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 499.
[7] Pasquier V and Saleur H, *Nucl. Phys.*, **B330**(1990), 523.

XXZ Model and the Structure of the Symmetric Algebra

MA ZHONGQI

(Institute of High Energy Physics Academia Sinica, Beijing 100039)

HOU BOYUAN

(Graduate School, Academia Sinica Beijing 100039)

HOU BOYU

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian 710069)

ABSTRACT

In this paper, an XXZ model of the Heisenberg spin chain with the symmetry of the quantum $SL_q(2)$ enveloping algebra is discussed. In terms of the structure of the Temperley-Lieb algebra, in this model we analyse the finite-dimensional representations of the quantum $SL_q(2)$ with $q^p=\pm1$ in some detail, including the condition of appearance of the reducible but indecomposable representations (type I representation), their properties, and the complete set of the states related to a definite energy where the new states are obtained by an appropriate limit process.