第15卷 第9期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 9
1991年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1991

Liouville 理论的闭链条件及其在2维诱导引力中的运用(I)*

王仲华 吴 可 郭汉英

(中国科学院理论物理研究所,北京 100080) (CCAST 成员)

摘 要

本文讨论 Liouville 理论作用量所满足的闭链条件,以及这些复合条件和 Polyakou 在光锥规范中2维诱导引力的复合公式的联系,类似的方法讨论了 Alekseev 和 Shatashivilli 提出的 $\widehat{\mathrm{Diffs}^1}$ 轨道空间中的几何作用量的复合公式.

引 言

目前,有关2维诱导引力的研究引起了人们越来越大的兴趣. 除了运用离散格点的方法而导致矩阵模型的理论和 Witten 提出的拓扑引力方法之外,在通常的连续2维诱导引力方面也有了一系列新的进展.

一方面,基于在光锥规范下 Polyakov 得到的2维诱导引力的有效作用量[1],Alekseev 和 Shatashivili 运用几何的方法,提出了在 $\widehat{\mathrm{Diffs}^1}$ 群上的余伴随轨道空间中的几何作用量,并研究了它和 Polyakov 有效作用量之间的关系,从而更清楚地揭示了有效作用量中隐藏的 $SL(2,R)$的对称性[1,13],还指出了它和 $SL(2,R)$的 WZWN 模型的联系[2]. 值得注意的是,最近 Polyakov[3], Bershadsky 和 Ooguri[4]对此重新进行了讨论,分别提出了有效作用量和几何作用量满足的复合公式. 这样复合公式高度概括了相应作用量在经典水平上的对称性,而且和它们的量子理论有密切关系,在文献[16]中将利用我们所得到的 Beltrami-Liouville 诱导引力作用量的复合公式,导出相应的 Ward 恒等式. 目前有关复合公式的讨论已经引起了人们的注意[5].

另一方面,David, Distler 和 Kawai,以及其他人都发现了,在共形规范下2维诱导引力的讨论,相当于要讨论一个标量场的 Liouville 场论,并得到了和光锥规范下一样的,如临界指数 γ_{str} 等的所有结果[6]. 其实诱导引力所表明的非临界维数上的弦理论和 Liouville 理论的联系,早在1981年 Polyakov 中指出了[7]. 与此同时,如不取定任何规范,即在任意度量中的2维诱导引力的研究,也取得了一定进展[8],尤其是运用 Beltrami

本文1990年9月13日收到.

* 国家自然科学基金资助.

对称性[9]提出的用 Beltrami-Liouville 理论来讨论 2 维任意度量中的诱导引力[10].

本文将继续[10]中的 Beltrami-Liouville 理论的研究，进一步讨论它的对称性，即复合公式．在文献[4]中，所有这类复合公式被称为闭链条件，但严格来讲，WZWN 模型的作用量，几何作用量的复合公式并不是某一上同调算子的闭链条件．然而 Liouville 理论，或者说 Beltrami 度量下的 Liouville 理论，即 Beltrami-Liouville 理论的确满足某上同调算子的闭链条件，本文拟从 Liouville 理论满足的闭链条件入手，导出已有的各种复合公式．注意本文的讨论仅限于 2 维空间的一个局部坐标系，如一个 2 维圆盘，但由文献[12]中的讨论知道，它是 $g>1$ 的 2 维紧 Riemann 面的万有覆盖．因此把局部的讨论推广到整个 2 维空间是可行的．

首先让我们回忆一下[10]中主要结果．在任意的 2 维度量

$$ds^2 = e^{\varphi}|dz + \mu d\bar{z}|^2 \tag{1}$$

下的两维诱导引力作用量是[8,10]

$$S_{引力} = S_L(\varphi, |dz+\mu dz|^2) + S[f] + S[\bar{f}] + S[f,\bar{f}] \tag{2}$$

其中 $S_L(\varphi, |dz+\mu dz|^2)$ 是以 φ 为 Liouville 模，$\widehat{ds^2} = |dz+\mu d\bar{z}|^2$ 为背景度量的 Liouville 理论作用量，$S[f]$ 和 $S[\bar{f}]$ 分别以 f 和 $\bar{f}$ 为场的 Polyakov 的光锥引力作用量，$S[f,\bar{f}]$ 是一些交叉项，f 和 $\bar{f}$ 分别满足以 μ 和 $\bar{\mu}$ 为 Beltrami 微分的 Beltrami 方程．这个作用量也可以写成一个统一的 Liouville 作用量[10]，此时的 Liouville 模

$$\Phi = \ln \frac{e^{\varphi}}{\partial f\, \overline{\partial f}}$$

而背景度量

$$\widehat{ds^2} = df d\bar{f}$$

也就是利用 Beltrami 场 f，$\bar{f}$ 把度量(1)改写成

$$ds^2 = \frac{e^{\varphi}}{\partial f\, \overline{\partial f}} df d\bar{f} \tag{3}$$

于是引力作用量写成

$$S_{引力} = \int df \Lambda d\bar{f} \{\partial_f \Phi \partial_{\bar{f}} \Phi + \wedge(e^{\Phi} - 1)\} \tag{4}$$

也就是

$$S_{引力} = \int dz \Lambda d\bar{z} \left\{\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_z - \bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\Phi \cdot (\partial_{\bar{z}} - \mu\partial_z)\Phi \right.$$
$$\left. + \Lambda(\partial f \bar{\partial} \bar{f} - \partial \bar{f} \bar{\partial} f)(e^{\Phi} - 1)\right\} \tag{5}$$

与此同时，我们也知道，在非临界维数的弦理论中，经过对物质场即弦场和鬼场的路径积分之后而得到的配分函数，它不是 Weyl 变换下不变的，其改变量正比于由 Weyl 因子为 Liouville 模的 Liouville 作用量，最一般形式可以写为[11]

$$\ln Z_x[e^{\varphi}, g] - \ln Z_x[g] = \frac{d-26}{48\pi} S_L(\varphi, g) \tag{6}$$

其中 g 表示背景度量，φ 是 Liouville 模，

$$S_{\mathrm{L}}(\varphi, g)=\int d^2x\sqrt{g}\left(\frac{1}{2} g^{ab}\partial_a\varphi\partial_b\varphi+R\varphi+\Lambda(e^{\varphi}-1)\right) \tag{7}$$

此时 Weyl 变换是可交换的,这一点不难由(6)式得到，于是由群的乘法可以推出如下关系式

$$S_{\mathrm{L}}(\varphi_1+\varphi_2,g)=S_{\mathrm{L}}(\varphi_2,e^{\varphi_1}\cdot g)+S_{\mathrm{L}}(\varphi_1,g) \tag{8}$$

注意此式右端第一项的 Liouville 模是 φ_2，而背景度量是 $e^{\varphi_1}\cdot g_{ab}$.

但由于(8)式左端的配分函数,原则上写成一个局域的表达式是很困难的，我们还需要直接验证(8)式的正确性．比如，我们可以取由 Beltrami 微分参数化的 2 维空间的度量(1)或者(3),一般的 Liouville 作用量(7)式变成

$$\begin{aligned}
&S_{\mathrm{L}}\left(\varphi, \frac{e^{\varphi_0}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\,df d\bar{f}\right)\\
&=\int dz\wedge d\bar{z}\left[\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_z-\bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\varphi\cdot(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)\varphi\right.\\
&\quad+2\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)\varphi\cdot(\partial_z-\bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\cdot\ln\frac{e^{\varphi_0}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\\
&\quad\left.+\Lambda(1-\mu\bar{\mu})e^{\varphi_0}\cdot(e^{\varphi}-1)\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

其中右边第二项来自背景度量(3)曲率的贡献．于是我们有

$$\begin{aligned}
&S_{\mathrm{L}}\left(\varphi_2+\varphi_1, \frac{e^{\varphi_0}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\,df d\bar{f}\right)\\
&=\int dz\wedge d\bar{z}\left[\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_z-\bar{\mu}\partial_{\bar{z}})(\varphi_1+\varphi_2)\cdot(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)(\varphi_1+\varphi_2)\right.\\
&\quad+2\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)(\varphi_1+\varphi_2)\cdot(\partial_z-\bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\ln\frac{e^{\varphi_0}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\\
&\quad\left.+\Lambda(1-\mu\bar{\mu})e^{\varphi_0}(e^{\varphi_1+\varphi_2}-1)\right]
\end{aligned} \tag{10a}$$

以及

$$\begin{aligned}
&S_{\mathrm{L}}\left(\varphi_2, \frac{e^{\varphi_0+\varphi_1}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\,df d\bar{f}\right)\\
&=\int dz\wedge d\bar{z}\left[\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_z-\bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\varphi_2\cdot(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)\varphi_2\right.\\
&\quad+2\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)\varphi_2\cdot(\partial_z-\bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\left(\ln\frac{e^{\varphi_0}}{\partial f\,\overline{\partial f}}+\varphi_1\right)\\
&\quad\left.+\Lambda(1-\mu\bar{\mu})e^{\varphi_0+\varphi_1}(e^{\varphi_2}-1)\right]
\end{aligned} \tag{10b}$$

把以上表达式直接代入(8),不难直接验证其正确性.

如果改变一下记号,可以把(8)式写成更紧凑的形式,如取

$$\varphi_2'=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2,\quad \varphi_1'=\varphi_0+\varphi_1,\quad \varphi_0'=\varphi_0 \tag{11}$$

定义

$$S_{\mathrm{w}}(\varphi_1',\varphi_0')=S_{\mathrm{L}}\left(\varphi_1'-\varphi_0', \frac{e^{\varphi_0'}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\,df d\bar{f}\right)$$

$$= S_L\left(\varphi_1,\ \frac{e^{\varphi_0}}{\partial f\ \overline{\partial f}}\, df d\bar{f}\right) \tag{12}$$

那末(8)式可以写成

$$S_w(\varphi_2', \varphi_0') = S_w(\varphi_2', \varphi_1') + S_w(\varphi_1', \varphi_0') \tag{13}$$

因而可以写成一个上同调算了作用在闭链上的形式，即

$$(\Delta S_w)(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0) = S_w(\varphi_2, \varphi_1) - S_w(\varphi_2, \varphi_0) + S_w(\varphi_1, \varphi_0) \tag{14}$$

前面已经提到，由于(6)式的左边没有明显的表达式，不能用它来判断满足(13)或(14)式的闭链 $S_w(\varphi_1, \varphi_0)$ 是不是相同的上同调算子的上边缘。问题在这里并不复杂，直接的计算可以把 $S_w(\varphi_1, \varphi_0)$ 改写成

$$\begin{aligned}
S_w(\varphi_1, \varphi_0) = \int dz\Lambda d\bar{z}\ \Big[&\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_z - \bar{\mu}\partial_{\bar{z}})(\varphi_1 - \varphi_0)\cdot(\partial_{\bar{z}} - \mu\partial_z)(\varphi_1 - \varphi_0) \\
&+ 2\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_{\bar{z}} - \mu\partial_z)(\varphi_f - \varphi_0)\cdot(\partial_z - \bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\ln\frac{e^{\varphi_0}}{\partial f\ \overline{\partial f}} \\
&+ \Lambda(1-\mu\bar{\mu})(e^{\varphi_1} - e^{\varphi_0})\Big] \\
= \int dz\Lambda d\bar{z}\ \Big[&\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_z - \bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\varphi_1\cdot(\partial_{\bar{z}} - \mu\partial_z)\varphi_1 \\
&+ 2\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_{\bar{z}} - \mu\partial_z)\varphi_1\cdot(\partial_z - \bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\ln\frac{1}{\partial f\ \overline{\partial f}} \\
&+ \Lambda(1-\mu\bar{\mu})(e^{\varphi_1} - 1)\Big] \\
- \int dz\Lambda d\bar{z}\ \Big[&\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_z - \bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\varphi_0\cdot(\partial_{\bar{z}} - \mu\partial_z)\varphi_0 \\
&+ 2\frac{1}{1-\mu\bar{\mu}}(\partial_{\bar{z}} - \mu\partial_z)\varphi_0\cdot(\partial_z - \bar{\mu}\partial_{\bar{z}})\ln\frac{1}{\partial f\ \overline{\partial f}} \\
&+ \Lambda(1-\mu\bar{\mu})(e^{\varphi_0} - 1)\Big] \\
= S_L\left(\varphi_1,\ \frac{1}{\partial f\ \overline{\partial f}}\, df d\bar{f}\right) &- S_L\left(\varphi_0,\ \frac{1}{\partial f\ \overline{\partial f}}\, df d\bar{f}\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

它表明

$$S_w(\varphi_1, \varphi_0) = (\Delta S_L)(\varphi_0, \varphi_1) \tag{16}$$

是一个上边缘．它的 0 链就是只带一个 Liouville 模的 Liouville 作用量，而 1 链 $S_w(\varphi_1, \varphi_0)$ 可以当成具有一个 Liouville 模和一个 Weyl 因子的背景度量下的 Liouville 作用量，相当于具有两个因子的作用量。此时的闭链条件(13)或(14)相当于一种相容性条件，虽然 Liouville 作用量 $S_w(\varphi_1, \varphi_0)$ 在上同调分析中满足平庸的 1 闭链条件，在引力理论，它可以导出一系列有意义的结果。

这里所得到的闭链条件，仅仅是由 Weyl 变换引起的，尽管三个 Liouville 作用量的 Liouville 模不一样，但背景度量是一样的或者在共形等价类意义下是一样的，其中没有更复杂的变换。如果我们在 2 维空间中做一任意的变换

$$f: M^2 \to M^2$$

坐标从 $(z,\bar{z})$ 变到 $(f(z,\bar{z}),\bar{f}(z,\bar{z}))$，或者更复杂一些

$$(z,\bar{z})\xrightarrow{g}(g(z,\bar{z}),\ \bar{g}(z,\bar{z}))\xrightarrow{f}(f(g(z,\bar{z}),\bar{g}(z,\bar{z})),\ \bar{f}(g(z,\bar{z}),\ \bar{g}(z,\bar{z})))$$

或者把变换看成坐标的变换，也可以当成是函数的复合，即 $(f,\bar{f})$ 经过 $(g,\ \bar{g})$ 的复合是 $(z,\ \bar{z})$ 的函数．这种任意变换，除了诱导出一个 Weyl 变换之外，也引起了度规本身的变换．如果在以 $(f,\bar{f})$ 为坐标的空间中取一个共形平度量

$$ds^2=\frac{e^{\varphi}}{\partial f\ \overline{\partial f}}df d\bar{f} \tag{17}$$

其中 f，$\bar{f}$ 和 φ 都是经 $(g\ \bar{g})$ 复合以后的 $(z,\bar{z})$ 的函数，对此度量我们有两种看法，也就是说，我们可以分别在坐标系 $(z,\bar{z})$ 和坐标系 $(g,\ \bar{g})$ 中看成两种完全不同的度量．如在 $(z,\bar{z})$ 坐标系中

$$ds^2=e^{\varphi(z\bar{z})}(dz+\mu_z^f d\bar{z})\cdot(dz+\bar{\mu}_z^f d\bar{z}) \tag{18}$$

或者就记成(17)式，其中 μ_z^f，$\bar{\mu}_z^f$ 是 $(f,\bar{f})$ 对 $(z,\bar{z})$ 的 Beltrami 微分

$$\mu_z^f=\frac{\bar{\partial}_z f}{\partial_z f}\quad \bar{\mu}_z^f=\frac{\partial_z\bar{f}}{\partial_{\bar{z}}\bar{f}} \tag{19}$$

也可以把它写到 $(g,\ \bar{g})$ 坐标中

$$ds^2=e^{\varphi*}\{e^{\varphi(g,\bar{g})}\cdot(dg+\mu_g^f d\bar{g})(d\bar{g}+\bar{\mu}_g^f dg)\} \tag{20}$$

其中

$$e^{\varphi*}=\frac{(\partial-\bar{\mu}_z^f\bar{\partial})g\cdot(\bar{\partial}-\mu_z^f\partial)\bar{g}}{(\partial g\overline{\partial g}-\partial\bar{g}\bar{\partial}g)^2} \tag{21}$$

其实，度量(20)并不是真正在 $(g,\bar{g})$ 坐标上写的度量，因为 $f,\bar{f}$ 本质上是 $(z,\bar{z})$ 的函数，因此(20)本质上也是 $(z,\bar{z})$ 的函数，尤其是 e^{φ_0} 中，形式上无法写成是 $(g,\bar{g})$ 的函数，只是分出一部份，形式上只是 $(g,\bar{g})$ 的函数

$$\widehat{ds^2}=e^{\varphi(g,\bar{g})}(dg+\mu_g^f d\bar{g})(d\bar{g}+\bar{\mu}_g^f dg) \tag{22}$$

或写成

$$\widehat{ds^2}=\frac{e^{\varphi(g,\bar{g})}}{\partial_g f\overline{\partial_g f}}df d\bar{f} \tag{23}$$

于是(21)式度量就写成

$$ds^2=e^{\varphi*}\widehat{ds^2} \tag{24}$$

那末，类似于前面关于 Weyl 变换成交换群而导致的闭链条件，这里也有一个闭链条件．在 ds^2 度量 ds^2 中有一个以 $\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\ \overline{\partial f}}$ 为 Liouville 模而 $dfd\bar{f}$ 为背景度量的 Liouville 作用量；在 $\widehat{ds^2}$ 度量中有一个以 $\ln\frac{\partial^{\varphi}}{\partial_g f\overline{\partial_g f}}$ 为 Liouville 模，而 $dfd\bar{f}$ 为背景度量的 Liouville 作用量，两者之间的联系通过以 φ_0 为 Liouville 模，而 $\widehat{ds^2}$ 为背景度量的 Liouville 作用量联系起来。也就是说在(13)或(14)式中，取

$$\varphi_0=0,\ \varphi_1=\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial_g f\overline{\partial_g f}},\ \varphi_2=\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\ \overline{\partial f}} \tag{25}$$

以及度量 g 就取 $\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}$，于是

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{w}}(\varphi_2,\varphi_0) &= S_{\mathrm{L}}\left(\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}},\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right)\\
&= \int \mathrm{d}f\Lambda\mathrm{d}\bar{f}\left(\partial_f\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\cdot\partial_{\bar{f}}\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}}+\Lambda\left(\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}}-1\right)\right)\\
&= \int \mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}\bar{z}\left\{\frac{1}{1-\mu_z^f\bar{\mu}_z^f}(\partial_z-\bar{\mu}_z^f\partial_{\bar{z}})\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}}\right.\\
&\quad\cdot(\partial_{\bar{z}}-\mu_z^f\partial_z)\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}}+\Lambda(\partial f\,\overline{\partial f}-\bar{\partial}f\,\partial\bar{f})\\
&\quad\left.\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}}-1\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{w}}(\varphi_1,\varphi_0) &= \int \mathrm{d}g\Lambda\mathrm{d}\bar{g}\left\{\frac{1}{1-\mu_g^f\bar{\mu}_g^f}(\partial g-\bar{\mu}_g^f\partial_{\bar{g}})\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}\right.\\
&\quad\cdot(\partial_{\bar{g}}-\mu_g^f\partial_g)\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}\\
&\quad\left.+\Lambda(\partial_g f\,\overline{\partial_g f}-\bar{\partial}_g f\cdot\partial_g\bar{f})\left(\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}-1\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{w}}(\varphi_2,\varphi_1) &= S_{\mathrm{L}}\left(\varphi_*,\ \frac{\mathrm{e}^{\varphi(g\bar{g})}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right)\\
&= \int \mathrm{d}g\Lambda\mathrm{d}\bar{g}\left\{\frac{1}{1-\mu_g^f\bar{\mu}_g^f}(\partial_g-\bar{\mu}_g^f\partial_{\bar{g}})\varphi_*\cdot(\partial_{\bar{g}}-\mu_g^f\partial_g)\varphi_*\right.\\
&\quad+2\frac{1}{1-\mu_g^f\bar{\mu}_g^f}(\partial_{\bar{g}}-\mu_g^f\partial_g)\varphi_*\cdot(\partial_g-\bar{\mu}_g^f\partial_{\bar{g}})\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}\\
&\quad\left.+\Lambda(\partial_g f\,\overline{\partial_g f}-\bar{\partial}_g f\cdot\partial_g\bar{f})\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}(\mathrm{e}^{\varphi_*}-1)\right\}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

最后，我们得到了一个新的等式

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{L}}\left(\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}},\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right) &= S_{\mathrm{L}}\left(\varphi_*,\ \frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right)\\
&\quad+S_{\mathrm{L}}\left(\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}},\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

虽然此式是把条件(25)代入闭链条件(13)或(14)而得，但这仅仅是形式上的类同，在(13)或(14)中背景度量是共形等价的，而(29)式的背景度量形式上写成 $\partial f\partial\bar{f}$，而其中微分意义不同，右端第二项的 $\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}$ 是对 $(g,\bar{g})$ 做微分，而其它是对 $(z,\bar{z})$ 做微分，如果 $(g,\bar{g})$ 和 $(z,\bar{z})$ 不是共形等价的，也就是说，对应的 Beltrami 微分 μ_z^g 和 $\bar{\mu}_z^g$ 在抹去 Fuchsian 群之后不等价于 0，那末这两个度量之间是不等价的。因而和(13)、(14)式中含义有本质的区别。在一定意义上(29)式不能归结到(13)式中去。有必要从复结构的角度来加深对(29)式的理解。为此让我们来分析一下(29)式中出现的非平庸或者不等价的

Beltrami 微分，这里最多可能有三个不等价的 Beltrami 微分 μ_z^f, μ_g^f 和 μ_z^g, 以及它们的复共轭. 但由于 f,g,z 是函数的复合关系，它们满足关系式[12]

$$\mu_z^f = \frac{\mu_z^g + \mu_g^f \dfrac{\overline{\partial g}}{\partial g}}{1 + \mu_g^f \cdot \bar{\mu}_z^g \dfrac{\overline{\partial g}}{\partial g}} \tag{30}$$

因此真正无关的不等价的 Beltrami 微分只有两个. 即两个不等价的复结构.

另外，让我们具体分析一下(29)式各项中所用的度量，右端第一项的度量由于多了一个 $\dfrac{1}{\partial_g f \overline{\partial_g f}}$ 的因子，因此在 $(g,\bar{g})$ 坐标邻域中做坐标变换是形式不变的，相反其它两项中的度量在相应坐标邻域的变换中形式要做一定的改变.

综上所述，与其把(29)式中三项看成是形式完全相同的，而满足闭链条件，不如把它们做一点区别把(29)式改写成

$$S_L\left(\varphi_*, \frac{e^\varphi}{\partial_g f \overline{\partial_g f}} df d\bar{f}\right) = S_L\left(\ln \frac{e^\varphi}{\partial f \overline{\partial f}}, df d\bar{f}\right) - S_L\left(\ln \frac{e^\varphi}{\partial_g f \overline{\partial_g f}}, df d\bar{f}\right) \tag{31}$$

更加合理，也就是说把(31)右边写成一个上同调算子的作用

$$(\Delta S_L)\ (\varphi, f; g, z) = S_L(\varphi, f; z) - S_L(\varphi, f; g) \tag{32}$$

因此

$$S_L\left(\varphi_*, \frac{e^\varphi}{\partial_g f \overline{\partial_g f}} df d\bar{f}\right) = (\Delta S_L)(f; g, z) \tag{33}$$

由于 φ_* 由其表达式(21)可知含有 f, g, z 以及它们的复共轭，把它全部依赖关系体现出来，不妨记成 $\varphi_*(f; g, z)$, 由此分析不难得到新的结论，即 $S_L\left(\varphi_*(f; g, z), \dfrac{e^\varphi}{\partial_g f \overline{\partial_g f}} df\, d\bar{f}\right)$ 所满足的相容性条件，或者说 1 闭链条件

$$(\Delta S_L)(f; h, g, z) = 0 \tag{34}$$

详细写出来就是

$$\begin{aligned} & S_L\left[\varphi_*(f; g, z), \frac{e^\varphi}{\partial_g f \overline{\partial_g f}} df d\bar{f}\right] \\ & - S_L\left[\varphi_*(f; h, z), \frac{e^\varphi}{\partial_h f \overline{\partial_h f}} df d\bar{f}\right] \\ & + S_L\left[\varphi_*(f; h, g), \frac{e^\varphi}{\partial_h f \overline{\partial_h f}} df d\bar{f}\right] = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

其实，直接验证此式也并不困难，只要注意到

$$\varphi_*(f; h, z) = \varphi_*(f; h, g) + \varphi_*(f; g, z) \tag{36}$$

即可以了.

在(31′)中比起(29)式增加了一个坐标系变换，或者把 $(f,\bar{f})$ 当成复合函数. 也多了一重复合关系. 即

$$(z,\bar{z})\to(g,\bar{g})\to(h,\bar{h})\to(f,\bar{f})$$

或者说 $(f,\bar{f})$ 经过 h,g 的复合是 $(z,\bar{z})$ 的函数。比起(29)式中涉及的复结构变换，多了一个复结构。因而这里也就增加了不等价的 Beltrami 微分，这里有了三个完全独立的不等价的 Beltrami 微分，我们可以把 μ_z^g，μ_g^h，μ_h^f 以及它们的复共轭为独立的 Beltrami 参数，也可以取 μ_z^f，μ_g^f，μ_h^f 及它们的复共轭作为独立的 Beltrami 参数。如果采用后一种取法，可以定义

$$S_{\mathrm{L}}(\mu_g^f,\ \mu_z^f)=S_{\mathrm{L}}\left[\varphi_*(f;g,z),\ \frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial_g f\,\overline{\partial_g f}}\,\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right] \tag{37}$$

于是 1 闭链条件(34)中的宗量也可以由独立的 Beltrami 参数给出

$$(\Delta S_{\mathrm{L}})\,(\mu_h^f,\mu_g^f,\mu_z^f)=0 \tag{38}$$

因此闭链条件(38)和 Riemann 的上复结构的形变有着密切的关系。我们打算在今后的文章中对此做进一步的研究。

下面我们转入本文第二部份内容，即讨论这些 Liouville 作用量的闭链条件在 2 维诱导引力理论中的应用。为此我们来讨论在光锥规范下的诱导引力的有效作用量和 Liouville 作用量的关系。

前面(29)式讨论的是变换或者函数复合

$$(z,\bar{z})\to(g,\bar{g})\to(f,\bar{f})$$

下的 Liouville 作用量的相容性条件，其中 z 和 $\bar{z}$ 以及其它的坐标都理解为是复共轭关系。为了把这些讨论运用到光锥规范中去，则要求 z,g,f 和 $\bar{z},\bar{g},\bar{f}$ 不再是复共轭，而是互相独立的实参数，此时相应的函数的复合变成

$$(z,\bar{z})\to(g(z,\bar{z}),\bar{z})\to(f(g(z,\bar{z}),\bar{z}),\bar{z}) \tag{39}$$

也就是取

$$\bar{z}=\bar{g}=\bar{f}$$

为了和光锥规范下有效作用量相对应，我们在 Liouville 作用量

$$S_{\mathrm{L}}\left(\ln\frac{\mathrm{e}^{\varphi}}{\partial f\,\overline{\partial f}},\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right)$$

中取

$$\varphi=0 \tag{40}$$

首先，我们分析一下光锥度量之间的关系，由 $(f,\ \bar{z})$ 坐标邻域中共形平度量诱导到 $(z,\bar{z})$ 中光锥度量：$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}z+\mu\mathrm{d}\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}$，则要求在 $(f,\ \bar{z})$ 中取度量

$$\mathrm{d}s^2=\frac{1}{\partial f}\,\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{z} \tag{41}$$

且 f 满足 Beltrami 型的方程

$$\bar{\partial}f-\mu\partial f=0$$

在变换(39)下的不同度量之间的关系变成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\frac{1}{\partial g}\,\widehat{\mathrm{d}s^2}\\ \widehat{\mathrm{d}s^2}&=\frac{1}{\partial_g f}\,\mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{z}\end{aligned} \tag{42}$$

于是(29)式左边第一项变成

$$
\begin{aligned}
&S_L\left(\ln\frac{e^{\varphi}}{\partial f\ \overline{\partial f}},\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{f}\right)\\
&=S_L\left(\ln\frac{1}{\partial f},\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{z}\right)\\
&=\int \mathrm{d}z\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\left\{\partial_z\ln\frac{1}{\partial f}\cdot(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)\ln\frac{1}{\partial f}+\Lambda(1-\partial f)\right\}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

当 $\Lambda=0$ 时,即得 Polyakov 的有效作用量

$$
\begin{aligned}
&S_L\left(\ln\frac{1}{\partial f},\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{z}\right)\Big|_{\Lambda=0}\\
&=\int \mathrm{d}z\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\ \partial_z\ln\partial f\cdot(\partial_{\bar{z}}-\mu\partial_z)\ln\partial f\\
&=\int \mathrm{d}z\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\left\{\frac{\partial^2 f\partial\bar{\partial}f}{(\partial f)^2}-\frac{\bar{\partial}f(\partial^2 f)^2}{(\partial f)^3}\right\}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

类似地可以写出另外两项如下

$$
\begin{aligned}
&S_L\left(\ln\frac{1}{\partial g},\ \frac{1}{\partial_g f}\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{z}\right)\\
&=\int \mathrm{d}g\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\ \{(\partial_{\bar{z}}-\mu_g^f\partial_g)\ln\partial g\cdot\partial_g\ln\partial g\\
&\quad+2(\partial_{\bar{z}}-\mu_g^f\partial_g)\ln\partial g\cdot\partial_g\ln\partial_g f+\Lambda\left(\frac{1}{\partial g}-1\right)\}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

经过简单地计算可得

$$
\begin{aligned}
&S_L\left(\ln\frac{1}{\partial g},\ \frac{1}{\partial_g f}\ \mathrm{d}f\mathrm{d}\bar{z}\right)\\
&=\int \mathrm{d}g\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\ \left[(\partial_{\bar{z}}\ln\partial g\ \partial_g\ln\partial g)+\Lambda\left(\frac{1}{\partial g}-1\right)\right]\\
&\quad-2\int \mathrm{d}z\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\ \frac{\mu_g^f}{\partial g}\cdot(\partial g)^2\left(\partial_g^2\ln\partial g+\frac{1}{2}(\partial_g\ln\partial g)^2\right)
\end{aligned}
\tag{46}
$$

当 $\Lambda=0$ 时上式第一项就是在光锥坐标下 g 对 $(z,\bar{z})$ 的有效作用量. 而第二项就是

$$
\int \mathrm{d}z\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\ \frac{\mu_g^f}{\partial g}\ \{g,z\}
$$

其中 $\{g,z\}$ 表示 g 对 z 的 Schwarz 导数.

把上述讨论代入(29)式,在 $\Lambda=0$ 时,我们得到了 Polyakov 的复合公式[3]

$$
S_P(f,z)=S_P(g,z)+S_P(f,g)-2\int \mathrm{d}z\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\ \frac{\mu_g^f}{\partial g}\{g,z\}
\tag{47}
$$

其中 $S_P(f,z)$ 表示在 $(z,\bar{z})$ 坐标下的 f 的有效作用量.

完全类似地可以用 Liouville 作用量的相容性条件推出 A-S 的几何作用量的复合公式. 不难发现 A-S 的几何作用量

$$
S_{A-S}(F,z)=\int \mathrm{d}z\Lambda \mathrm{d}\bar{z}\ \frac{\bar{\partial}F}{\partial F}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial F}-2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial F}\right)^2\right)
\tag{48}
$$

可以由以 $\ln\partial F$ 为 Liouville 模，共形规范 $ds^2 = dzd\bar{z}$ 为背景度量的 Liouville 作用量

$$S_L(\ln\partial F, dzd\bar{z}) = \int dz\Lambda d\bar{z}\ \partial\ln\partial F\bar{\partial}\ln\partial F \tag{49}$$

得到.

类似地，讨论一下度量在复合函数之下的关系. 我们取 F 是 $(z, \bar{z})$ 的函数，经过 f 的复合如下：$F(f,(z,\bar{z}),\bar{z})$，于是有度量关系式如下：

$$\begin{aligned} ds^2 &= \partial F dzd\bar{z} \\ &= \partial_f F\widehat{ds^2} \\ \widehat{ds^2} &= \partial f\cdot dzd\bar{z} \end{aligned} \tag{50}$$

代入(29)式，自然有如下 Liouville 作用量所满足的关系式

$$S_L(\ln\partial F, dzd\bar{z}) = S_L(\ln\partial_f F, \partial f dzd\bar{z}) + S_L(\ln\partial f, dzd\bar{z}) \tag{51}$$

具体写出来，左端是 F 的几何作用量，右端第二项是 f 的几何作用量，第一项可以写成

$$\begin{aligned} &S_L(\ln\partial_f F, \partial f dzd\bar{z}) \\ &= \int dz\Lambda d\bar{z}[\partial\ln\partial_f F\cdot\bar{\partial}\ln\partial_f F - 2\ln\partial_f F\cdot\partial\bar{\partial}\ln\partial f] \\ &= \int df\Lambda d\bar{z}[\partial_f\ln\partial_f F\cdot(\partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}f\cdot\partial_f)\ln\partial_f F] \\ &\quad - 2\int dz\Lambda d\bar{z}\ln\partial_f F\cdot\partial\bar{\partial}\ln\partial f \end{aligned} \tag{52}$$

其中第一项中的 $\bar{\partial}\ln\partial_f F$ 在把坐标 $(z,\bar{z})$ 变成 $(f,\bar{z})$ 时，由于 F 是通 $f(z, \bar{z})$ 复合之后的 $(z,\bar{z})$ 的函数，它两次依赖于 $\bar{z}$，因而写成了 $(\partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}f\partial_f)\ln\partial_f F$，于是 $S_L(\ln\partial_f F, \partial f dzd\bar{z})$ 可以进一步写成

$$\begin{aligned} &S_L(\ln\partial_f F, \partial f dzd\bar{z}) \\ &\quad = S_{A-S}(F,f) - 2\int dz\Lambda d\bar{z}\ \partial f\bar{\partial}f\{F,f\} \end{aligned} \tag{53}$$

代入(51)式并取 $\Lambda = 0$，便得到 A-S 的几何作用量所满足的复合公式[4]

$$S_{A-S}(F,z) = S_{A-S}(F,f) + S_{A-S}(f,z) - 2\int dz\Lambda d\bar{z}\partial f\bar{\partial}f\cdot\{F,f\} \tag{54}$$

前面我们已经分析了(29)式起源于 Liouville 作用量的闭链条件(14)式，但我们也提及该式与其说是闭链条件，不如说成是一个上边缘定义，因为三个 Liouville 作用量的背景度量不属于同一种类型. 类似的考虑也可以在这里讨论 Polyakov 有效作用量的复合公式和 A-S 的几何作用量的复合公式.

让我们来考虑(47)式，Polyakov 的这一复合公式可以写成

$$(\Delta S_P)(f,g,z) = 2\int dz\Lambda d\bar{z}\ \frac{\mu_g^f}{\partial g}\{g,z\} \tag{55}$$

类似地把(54)式改成

$$(\Delta S_{A-S})(F,f,z) = 2\int dz\Lambda d\bar{z}\partial f\bar{\partial}f\{F,f\} \tag{56}$$

因而(55)和(56)式右端包含有 Schwartz 导数的积分式是一个 1 上边缘，自然它们有一个新的自洽性条件.

如果我们记

$$S_P^{(2)}(f,g,z)=\int dz\Lambda d\bar{z}\,\frac{\mu_g^f}{\partial g}\{g,z\} \tag{57}$$

那末就有

$$\begin{aligned}&(\Delta S_P^{(2)})(f,h,g,z)\\&\quad=S_P^{(2)}(f,h,g)-S_P^{(2)}(f,h,z)+S_P^{(2)}(f,g,z)-S_P^{(2)}(h,g,z)\\&\quad=0\end{aligned} \tag{58}$$

写全了就是

$$\begin{aligned}&\int dg\Lambda d\bar{z}\,\frac{\mu_h^f}{\partial_g h}\{h,g\}-\int dz\Lambda d\bar{z}\,\frac{\mu_h^f}{\partial_z h}\{h,z\}\\&\quad+\int dz\Lambda d\bar{z}\,\frac{\mu_g^f}{\partial_z g}\{g,z\}-\int dz\Lambda d\bar{z}\,\frac{\mu_g^h}{\partial_z g}\{g,z\}=0\end{aligned} \tag{59}$$

其中复合函数的关系如下

$$(z,\bar{z})\to(g(z,\bar{z}),\bar{z})\to(h(g(z,\bar{z}),\bar{z}),\bar{z})\to(f(h(g(z,\bar{z}),\bar{z}),\bar{z}),\bar{z}) \tag{60}$$

其实此式可以直接验证,只要用到 μ_h^f 和 $\{h,z\}$ 在坐标变换,或函数复合关系(60)之后的复合公式

$$\mu_g^f=\mu_g^h+\mu_h^f\,\frac{1}{\partial_g h} \tag{61}$$

以及

$$\{h,z\}=(\partial g)^2\{h,g\}+\{g,z\} \tag{62}$$

其中(61)式可直接由(30)式,令 $\overline{\partial g}=1$ 和 $\partial\bar{g}=0$ 得到;而(62)式就是 Schwartz 导数在坐标变换下的变换性质[14].

类似地也有,若令

$$S_{A\text{-}S}^{(2)}(F、f、z)=\int dz\Lambda d\bar{z}\partial f\bar{\partial}f\{F,f\} \tag{63}$$

它就满足

$$\begin{aligned}(\Delta S_{A\text{-}S}^{(2)})(F,f,g,z)&=S_{A\text{-}S}^{(2)}(F,f,g)-S_{A\text{-}S}^{(2)}(F,f,z)\\&\quad+S_{A\text{-}S}^{(2)}(F,g,z)-S_{A\text{-}S}^{(2)}(f,g,z)=0\end{aligned} \tag{64}$$

由此可见, Polyakov 的有效作用量和 A-S 的几何作用量所满足的复合公式,严格来说是一个 1 上边缘的定义式. 因而就赋于了

$$S_P^{(2)}(f,g,z)=\int dz\Lambda d\bar{z}\,\frac{\mu_g^f}{\partial g}\{g,z\}$$

和

$$S_{A\text{-}S}^{(2)}(F,f,z)=\int dz\Lambda d\bar{z}\,\partial f\bar{\partial}f\{F,f\}$$

拓扑起源,它们就是具有拓扑意义的项. 为此,我们用一个最简单的例子加以说明. 在本文一开始我们有一个关系式(8),

$$S_L(\varphi_1+\varphi_2,g)=S_L(\varphi_2,\ e^{\varphi_1}g)+S_L(\varphi_1,\ g)$$

为简单起见,取度量 g 为平度量 $ds^2=dzd\bar{z}$, 由于右端第二项的度量变成 $ds^2=e^{\varphi_1}dzd\bar{z}$,

相应的 Liouville 作用量在 $\Lambda=0$ 的条件下变成

$$
\begin{aligned}
&S_L(\varphi_2, e^{\varphi_1}g)\\
&= \int dz\Lambda d\bar{z}[\partial_z\varphi_2\partial_{\bar{z}}\varphi_2 + 2\partial_z\varphi_2\partial_{\bar{z}}\varphi_1]\\
&= S_L(\varphi_2, g) + 2\int dz\Lambda d\bar{z}\ \partial_z\varphi_2\partial_{\bar{z}}\varphi_1
\end{aligned}
\tag{65}
$$

代入(8)式，也得到一个 1 上边缘的定义式

$$
\int dz\Lambda d\bar{z}\partial_z\varphi_2\partial_{\bar{z}}\varphi_1 = \frac{1}{2}(\Delta S_L)(\varphi_1+\varphi_2, \varphi_2, 0) \tag{66}
$$

左端是 1 上边缘，它具有一定拓扑起源. 这正是目前 2 维拓扑引力讨论中由 Verlindez, Verlindez 提出的一种作用量[15]. 有关(57)，(63)式定义的上边缘的拓扑含义及其应用，我们将另文讨论.

参　考　文　献

[1] A. M. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A2**(1987), 893. V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(1988), 819.

[2] A. Alekseev and S. Shatashivili, *Nucl. Phys.*, **B323**(1989), 719.

[3] A. M. Polyakov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A5**(1990), 833.

[4] M. Bershadshy and H. Ooguri, *Commun. Math. Phys.*, **126**(1989), 49.

[5] See for example: S. Aoyama, J. Julve, *Phys. Lett.* **B243**(1990), 57.

[6] See for example: F. David, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(1988), 1651. J. Distler and H. Kawai, *Nucl. Phys.*, **B321**(1989), 509. N. Mavromatos and J. Miramontes, *Mod. Phys. Lett.*, **A4**(1989), 1849. E. D'Hoker, P. S. Kurzepa *2-d quantum gravity and Liouville theory.* UCLA/90/TEP/15

[7] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **103B**(1981), 207.

[8] H. Verlinde, Preprint PUPT-89/1140, Sep. 1989. H. Verlinde and E. Verlinde, Preprint PUPT-89/1149, Oct. 1989.

[9] H. Y. Guo, J. M. Shen, S. K. Wang and K. W. Xu, *Beltrami algebra and its operator formalism.* Talk presented at the Beijing workshop on string theories, July 6-september 5, 1987, in proceedings ed. by X. C. Song; H. Y. Guo, J. M. Shen, S. K. Wang and K. W. Xu, *Chinese Phys. Lett.*, **6**(1989), 53; *Beltrami algebra and symmetry of Beltrami equation on Riemann surfaces* to appear in J. Math. Phys.

[10] S. K. Wang, Z. H. Wang, K. Wu and H. Y. Guo, *nonlinear connectioc, Beltami connection and two dimensional gravity,* to appear in *Acta of Physics,* H. Y. Guo, S. K. Wang, Z. H. Wang and K. Wu, *Commun. Theore. Phys.*, **14**(1990), 99.

[11] D. Friedan, *On recent advances in field theory and statistical mechanics,* Les Houches, 1982, ed by J. Zuber, R. Stora, (North-Holland) 839; H. Sonoda, *Nucl. Phys.*, **B284**(1987), 157; E. D'Hoker and D. H. Phong, *Rev. Mod. Phys.*, **60**(1988), 917—1065.

[12] S. Nag and A. Verjovsky, *the coadjoint orbit spaces of* $\widehat{Diffs}^1$ *and teichmüller space* IC/89/290.

[13] K. W. Xu and C. J. Zhu, *Symmetry in two dimensional gravity,* CTD-TAMU-56/90.

[14] A. Belavin, A. M. Polyakov and A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B241**(1984), 333.

[15] H. Verlinde and E. Verlinde, *A Solution of Two Dimension Topological Quantum Gravity,* Preprint PUPT-89/1176.

[16] Z. H. Wang, K. Wu and H. Y. Guo, *The cocycle condition of Liouville Theory and its application in 2-d induced gravity* (II).

The Cocycle Condition of Liouville Theory and Its Application to the 2-D Induced Gravity (I)

WANG ZHONGHUA WU KE GUO HANYING

(CCAST (World Laboratory), Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

ABSTRACT

The cocycle condition of the action in the Liouville theory has been proposed. Several composition laws could be deduced from the cocycle condition, such as the composition law of the action in 2-D induced gravity in light-cone gauge, and that of the geometric action in coadjoint Diffs[1] orbits proposed by Alekseev and Shatashivilli.