

原子核高自旋态的半经典研究*

沈肖雁¹⁾ 胡济民

(北京大学技术物理系, 100871)

摘 要

用推广的汤马斯-费米近似和 Skyrme 势研究了原子核的高自旋态,应用推广模型给出了含转动的能量密度公式,并计算了 ^{116}Sn , ^{158}Yb 和 ^{240}Pu 这三个典型核在不同角动量下的核形变与转动能。计算结果定性地与液滴模型相似,在数值上则有一定差别。计算结果表明,对转动能的量子修正,即使不考虑壳修正,也不能忽略。

一、引 言

对于重离子碰撞产生的具有高角动量的核系统的行为,往往采用宏观模型作一般的探讨;而对具有高内部激发能的热核,壳效应消失^[1-3],可以用考虑了核温度的宏观模型来描述;对晕转态,则可用宏观-微观模型计算其能量。

S. Cohen 等人为研究转动核的性质和平衡组态,于1974年提出了转动核液滴模型 (RLDM)^[4],将核看作是有常数电荷密度和中子密度的不可压缩的液滴,并象刚体一样旋转。1986年, A. J. Sierk 用改进了的液滴模型——有限程模型 (FRM)^[5] 重复了 S. Cohen 的工作。计算的结果定性地与 RLDM 一致,但在具体数值上有些差别。

虽然 FRM 比 RLDM 有所改进,但它们均没有考虑形变与转动引起的核密度变化。陈信义、胡济民等人^[6]曾利用包含密度变化的核连续介质模型^[7],计算了转动核的一些性质,得到核密度随转动和形变变化的结果。由于裂变位垒较低,没有得到稳定的三轴形变。

这些模型的共同缺点是缺乏可靠的微观基础,没有考虑粒子运动与转动的相互影响和量子效应。M. Brack^[8] 等人曾指出,采用 Skyrme 势和推广的汤马斯-费米近似 (ETF),可在宏观与微观模型之间架一座桥梁。在本文中,我们采用 Skyrme 势和 ETF 方法,对原子核的高自旋态进行了半经典研究,讨论了核 ^{116}Sn , ^{158}Yb 和 ^{240}Pu 的转动性质。研究的目的在于阐明哪些因素偏离了经典理论,其中哪些因素影响较大。由于还未确定出最佳势参数,目前还不能象 RLDM 那样对转动态进行系统全面的分析,但可以看出,

本文1991年1月8日收到。

* 国家教委博士点基金资助项目。

1) 现在高能物理所四室。

量子效应不仅引起壳修正,而且对平均转动能也有一定的影响。在第二节中,对所用理论进行了简单介绍,着重说明应用于转动体系所引起的变化及与经典转动模型的差别;第三节是计算及结果的分析讨论。

二、转动态的 ETF 近似

对于转动体系,根据推转模型,约束的 Hartree-Fock 方程由式

$$I = \int \cdots \int \Psi^* (H_T - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}) \Psi d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_A \quad (1)$$

变分推得。其中, H_T 为体系的哈密顿量, $\boldsymbol{\omega}$ 为转动角速率, $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}$ 为体系总角动量。体系的能量则由

$$E = \int \cdots \int \Psi^* H_T \Psi d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_A \quad (2)$$

给出。如 Ψ 是由单粒子波函数组成的 Slater 行列式,并取 Skyrme 势的一般形式为:

$$\begin{aligned} V_{ij} = & t_0(1 + x_0 p_\sigma) \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{6} t_3(1 + x_3 p_\sigma) [\rho(\mathbf{R})]^a \delta(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} t_1(1 + x_1 p_\sigma) [\delta(\mathbf{r}) \mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2 \delta(\mathbf{r})] \\ & + t_2(1 + x_2 p_\sigma) \mathbf{k}' \cdot \delta(\mathbf{r}) \mathbf{k} + iW_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k}' \times \delta(\mathbf{r}) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)$, p_σ 为自旋交换算符, $\mathbf{k} = \frac{1}{2i}(\nabla_1 - \nabla_2)$, $\mathbf{k}' = -\frac{1}{2i}(\nabla_1' - \nabla_2')$, ∇ 表示算子作用于右边, ∇' 表示算子作用于左边, $t_0, t_1, t_2, t_3, x_0, x_1, x_2, x_3, a$ 和 W_0 等均为势参数,则式(1)可写成^[9]:

$$\begin{aligned} I = & \int \mathcal{H}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}) = & \frac{\hbar^2}{2m} \tau + \frac{1}{2} t_0 \left[\left(1 + \frac{1}{2} x_0\right) \rho^2 + \frac{1}{2} x_0 \mathbf{S}^2 - \left(\frac{1}{2} + x_0\right) (\rho_n^2 + \rho_p^2) - \frac{1}{2} \right. \\ & \left. \times (\mathbf{S}_n^2 + \mathbf{S}_p^2) \right] + \frac{1}{12} t_3 \rho^a \left[\rho^2 - \frac{1}{2} (\rho_n^2 + \rho_p^2) - \frac{1}{2} (\mathbf{S}_n^2 + \mathbf{S}_p^2) \right] \\ & + \frac{1}{4} (t_1 + t_2) (\rho \tau - \mathbf{j}^2) + \frac{1}{16} (t_2 - 3t_1) \rho \nabla^2 \rho + \frac{1}{32} (3t_1 + t_2) \\ & \times \sum_q (\rho_q \nabla^2 \rho_q + \mathbf{S}_q \nabla^2 \mathbf{S}_q) + \frac{1}{8} (t_2 - t_1) \sum_q (\rho_q \tau_q - \mathbf{j}_q^2 + \mathbf{S}_q \cdot \mathbf{T}_q \\ & - \mathbf{J}_q^2) + \hbar \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{j} - \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - \frac{1}{2} W_0 \sum_{qq'} (1 + \delta_{qq'}) [\mathbf{S}_q \cdot (\nabla \times \mathbf{j}_{q'}) \\ & + \rho_q \nabla \cdot \mathbf{J}_{q'}] + H_{\text{res}}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中 ∇ 的分量 $\nabla_{\mu\nu}$ 定义为 $\nabla_{\mu\nu} C = \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda\mu\nu} \nabla_{\lambda} C$, 其中, $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, \epsilon_{\lambda\mu\nu} = (-1)^p$, 为三阶反对称张量 p 为 λ, μ, ν 的轮换次数。 $\mathbf{J}_{\mu\nu}$ 为二阶张量 \mathbf{J} 的分量, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\mu\nu} \times$

$A_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$, $\alpha_0 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$, 足标 $q = n$, p 表示粒子的电荷态.

$$\rho_q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \mathbf{r}_1 | \hat{\rho}_q | \mathbf{r}_2 \rangle = \sum_{i=1}^f \phi_{iq}^*(\mathbf{r}_1) \phi_{iq}(\mathbf{r}_2), \quad (5a)$$

$$\mathbf{S}_q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\sigma}) = \langle \mathbf{r}_1 | \hat{\rho}_q \boldsymbol{\sigma} | \mathbf{r}_2 \rangle = \sum_{i=1}^f \phi_{iq}^*(\mathbf{r}_1) \boldsymbol{\sigma} \phi_{iq}(\mathbf{r}_2), \quad (5b)$$

$$\tau_q(\mathbf{r}) = [\nabla_1 \cdot \nabla_2 \rho_q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}, \quad (5c)$$

$$\mathbf{T}_q(\mathbf{r}) = [\nabla_1 \cdot \nabla_2 \mathbf{S}_q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\sigma})]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}, \quad (5d)$$

$$\mathbf{j}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2i} [(\nabla_1 - \nabla_2) \rho_q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}, \quad (5e)$$

$$\mathbf{J}_{\mu\nu q}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2i} [(\nabla_{1\mu} - \nabla_{2\mu}) S_{\nu q}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}. \quad (5f)$$

由 $\delta I = 0$ 可得单粒子哈密顿为:

$$\begin{aligned} H_q = & -\frac{1}{2} \hbar^2 \nabla^2 \nabla_q \nabla + \frac{1}{2i} (\nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_q + \mathbf{B}_q \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}) \\ & + \frac{1}{2i} (\nabla \cdot \mathbf{I}_q + \mathbf{I}_q \cdot \nabla) - \nabla (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{G}_q) \nabla + \boldsymbol{\Sigma}_q \cdot \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\frac{1}{2} \hbar^2 \nabla_q^2 = \frac{\hbar^2}{2m} + \frac{1}{8} (t_1 + 3t_2) \rho_q + \frac{1}{4} (t_1 + t_2) \rho_{q'}, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_q = & t_0 \left[\left(1 + \frac{1}{2} x_0\right) \rho - \left(\frac{1}{2} + x_0\right) \rho_q \right] \\ & + \frac{1}{12} t_3 \left[\frac{13}{6} \rho^{7/6} - \frac{1}{6} \rho_q^2 \rho^{-5/6} + 2 \rho^{1/6} \rho_q - \frac{1}{12} \rho^{-5/6} \mathbf{S}_q^2 \right] \\ & + \frac{1}{4} (t_1 + t_2) \tau + \frac{1}{8} (t_2 - t_1) \tau_q + \frac{1}{8} (t_2 - 3t_1) \nabla^2 \rho \\ & + \frac{1}{16} (3t_1 + t_2) \nabla^2 \rho_q - \frac{1}{2} W_0 \nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_q), \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\mathbf{B}_q = -\frac{1}{4} (t_2 - t_1) \mathbf{J}_q + \frac{1}{2} \nabla (2\rho_q + \rho_{q'}), \quad (7c)$$

$$\mathbf{I}_q = -\frac{1}{4} (t_1 + 3t_2) \mathbf{j}_q - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \mathbf{j}_{q'} - \frac{1}{2} W_0 \nabla x (2\mathbf{S}_q + \mathbf{S}_{q'}) + \hbar \boldsymbol{\alpha}_0, \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_q = & \left[\frac{1}{2} t_0 (x_0 - 1) - \frac{1}{12} t_3 \rho^{1/6} \right] \mathbf{S}_q + \frac{1}{2} t_0 x_0 \mathbf{S}_{q'} \\ & - \frac{1}{8} (t_1 - t_2) \mathbf{T}_q - W_0 \nabla \times \left(\mathbf{j}_q + \frac{1}{2} \mathbf{j}_{q'} \right) - \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (7e)$$

$$\mathbf{G}_q = \frac{1}{8} (t_2 - t_1) \mathbf{S}_q. \quad (7f)$$

对于不转动体系, $\mathbf{S} = \mathbf{T} = \mathbf{j} = 0$, (4)式变为通常的能量密度公式^[10], 这是单粒子波函数满足时间反演不变性要求时的结果. 对于转动体系, 时间反演不变性不成立, 因此我们得到(4).

采用 ETF 近似^[8], 可将式(4)中的能量密度化为完全以密度 ρ_n , ρ_p 及其微分表示的泛函。

ETF 的特点是将单粒子算符 $\langle r_1 | \hat{A} | r_2 \rangle$ 进行 Wigner 变换, 变换为:

$$A_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{R} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \left\langle \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \left| \hat{A} \right| \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \right\rangle. \quad (8)$$

算符乘积的 Wigner 变换为:

$$(AB)_W = A_W e^{\frac{i\hbar}{2} \hat{\Lambda}} B_W. \quad (9)$$

其中, $\mathbf{V} = \hat{\nabla}_r \hat{\nabla}_p - \hat{\nabla}_p \hat{\nabla}_r$, 箭头的方向表明算符作用的方向。按 \hbar 的幂次展开 $e^{\frac{i\hbar}{2} \hat{\Lambda}}$ 为 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{i\hbar}{2} \hat{\Lambda} \right)^m$, 这就是对 $(AB)_W$ 的逐级近似, \hbar 的零次为经典近似, 以后的幂次为半经典近似。

任意一个函数 $f(\hat{H})$ 均可展开为:

$$f(\hat{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(H(\mathbf{r}, \mathbf{p})) [\hat{H} - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})]^n,$$

$$\text{其 Wigner 变换 } f(\hat{H})_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(H(\mathbf{r}, \mathbf{p})) G_n(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (10)$$

式中, $G_n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \{[\hat{H} - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})]^n\}_W(\mathbf{r}', \mathbf{p})|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}$.

利用阶跃函数 $\Theta(x)$, 可将 $\hat{\rho}$ 及 \hat{S} 写成:

$$\hat{\rho} = \Theta(\varepsilon_f - \hat{H}), \quad (11a)$$

$$\hat{S} = \Theta(\varepsilon_f - \hat{H}) \sigma. \quad (11b)$$

将(11a), (11b)式按(10)式展开并进行 Wigner 变换, 得

$$\rho_W = \Theta(\varepsilon_f - H) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{n!} \delta^{(n-1)}(H - \varepsilon_f). \quad (12)$$

如令 $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{a}/f$, 将单粒子哈密顿进行 Wigner 变换, 可以得到(略去了表示电荷态的足标):

$$H_W = \frac{1}{2} f q^2 + V + \mathbf{A} \cdot \sigma. \quad (13)$$

式中,

$$\mathbf{a} = I/\hbar, \quad (14a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{\hbar} - \frac{\alpha}{f} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{q}) + \mathbf{C} q^2 + \frac{1}{32} (t_1 + t_2) \nabla^2 \mathbf{S}, \quad (14b)$$

$$\mathbf{B}_0 = \Sigma - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}}{\hbar} + \frac{1}{f^2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}, \quad (14c)$$

$$\mathbf{C} = \frac{(t_2 - t_1)}{8\hbar^2} \mathbf{S}, \quad (14d)$$

$$V = u - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{f} + \frac{\hbar^2}{8} \nabla^2 f. \quad (14e)$$

从式(12)出发, 通过复杂的推导, 当准确到 \hbar^2 项时, 可以得到 ρ , τ , \mathbf{j} , \mathbf{J} 等量对于 k_F ,

V 的函数关系, 其中 $k_F = q_F/\hbar$, q_F 由 $\frac{1}{2}fq_F^2 + V = \epsilon_f$ 定出. 在求得的 τ, j, J 等表示式中, 将 k_F, V 等量表示成 ρ 的函数, 便可得到 τ, j, J 等量的密度泛函表示.

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} \rho^{5/3} + \frac{\alpha^2 \rho}{\hbar^2 f^2} + \frac{1}{3} \nabla^2 \rho + \frac{1}{36} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} + \frac{1}{6} \frac{\nabla f \cdot \nabla \rho}{f} \\ & - \frac{1}{12} \rho \frac{(\nabla f)^2}{f^2} + \frac{1}{6} \rho \frac{\nabla^2 f}{f} + \frac{(3\pi^2)^{-2/3}}{\hbar^2 f^2} \rho^{1/3} \left\{ \frac{1}{4} \nabla^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{8} \nabla^2 (\alpha^2) \right. \\ & - \frac{1}{4} \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \nabla) (\nabla \mathbf{a}) + \frac{1}{2f} [-2\mathbf{a} (\nabla f \cdot \nabla) \mathbf{a} - \alpha^2 \nabla^2 f \\ & + (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 f + (\mathbf{a} \cdot \nabla f) \nabla \mathbf{a} - \nabla f (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}] + \frac{3}{4f^2} [(\mathbf{a} \times \nabla f)]^2 \\ & + \frac{1}{6\rho} (\nabla \rho \times \mathbf{a}) \cdot \left[\nabla \times \mathbf{a} - \frac{1}{f} (\nabla f \times \mathbf{a}) \right] \left. \right\} + 3(3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar \mathbf{C}^2}{f^2} \rho^{5/3} \\ & + \frac{2}{f^2 \hbar^2} \rho \left[\frac{\mathbf{B}^2}{\hbar^2} + 3\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{C} - \frac{7\mathbf{a} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})}{\hbar f} + 12 \frac{\mathbf{C}^2 \alpha^2}{f^2} \right] \\ & + \frac{3(3\pi^2)^{-2/3}}{\hbar^4 f^2} \rho^{1/3} \left[\mathbf{B}_0^2 - \frac{2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B})}{\hbar f} + \frac{4(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{C}) \alpha^2}{f^2} \right], \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\mathbf{S} = -\frac{3\mathbf{C}}{f} \rho - 3(3\pi^2)^{-2/3} \frac{\mathbf{B}_0}{\hbar^2 f} \rho^{1/3}, \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{1}{4} \nabla^2 \mathbf{S} - 3(3\pi^2)^{2/3} \frac{\mathbf{C}}{f} \rho^{5/3} - \frac{\rho}{\hbar^2} \left(3\mathbf{B}_0 - \frac{2\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}}{\hbar f} + \frac{7\alpha^2}{f^2} \mathbf{C} \right) \\ & - 3(3\pi^2)^{-2/3} \frac{\alpha^2 \mathbf{B}_0}{\hbar^4 f^3} \rho^{1/3}, \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & -\frac{\alpha \rho}{\hbar f} + \frac{(3\pi^2)^{-2/3}}{4\hbar f} \rho^{1/3} \left\{ \nabla (\nabla \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} + \frac{1}{f} [(\nabla^2 f + \nabla f \cdot \nabla) \mathbf{a} \right. \\ & - (\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla) \nabla f] + \frac{1}{f^2} (\nabla f \times (\nabla f \times \mathbf{a})) \\ & + \frac{1}{3\rho} \nabla \rho \times \left[\nabla \times \mathbf{a} - \frac{1}{f} (\nabla f \times \mathbf{a}) \right] \left. \right\} + \frac{5}{\hbar f^2} \left(\frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}}{\hbar} - \frac{2\mathbf{C}^2 \alpha}{f} \right) \rho \\ & + \frac{3(3\pi^2)^{-2/3}}{\hbar^3 f^2} \rho^{1/3} \left(\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}}{\hbar} - \frac{2\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{C}}{f} \mathbf{a} \right), \end{aligned} \quad (15d)$$

$$\mathbf{J}_{\mu\nu} = -\frac{\alpha_\mu \mathbf{S}_\nu}{f \hbar} - \frac{\rho}{\hbar^2 f} \left(\mathbf{B}_{\mu\nu} - \frac{2\hbar \alpha_\mu \mathbf{C}_\nu}{f} \right). \quad (15e)$$

忽略 $\nabla^2 \mathbf{S}, \nabla f/f$ 等小量, 将式(15a)–(15e)代入(4)式, 最后得到能量密度的表示为:

$$\begin{aligned} E' = I = & \int \mathcal{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ \mathcal{E}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \hbar^2 \sum_{\mathbf{q}} \left\{ f_{\mathbf{q}} \left[\frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} \rho_{\mathbf{q}}^{5/3} + \frac{1}{6} \frac{\nabla \rho_{\mathbf{q}} \cdot \nabla f_{\mathbf{q}}}{f_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{36} \frac{(\nabla \rho_{\mathbf{q}})^2}{\rho_{\mathbf{q}}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \rho_{\mathbf{q}} \frac{\nabla^2 f_{\mathbf{q}}}{f_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{12} \rho_{\mathbf{q}} \frac{(\nabla f_{\mathbf{q}})^2}{f_{\mathbf{q}}} \right] \right\} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\left(1 + \frac{1}{2} x_0 \right) \rho^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(x_0 + \frac{1}{2} \right) (\rho_n^2 + \rho_p^2) \left] + \frac{1}{12} t_3 \rho^a \left[\left(1 + \frac{1}{2} x_3 \right) \rho^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2} \right) (\rho_n^2 + \rho_p^2) \right] \\
& + \frac{1}{12} \left[3t_1 \left(1 + \frac{1}{2} x_1 \right) - t_2 \left(1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \right] (\nabla \rho)^2 \\
& - \frac{1}{16} \left[3t_1 \left(x_1 + \frac{1}{2} \right) + t_2 \left(x_2 + \frac{1}{2} \right) \right] [(\nabla \rho_n)^2 + (\nabla \rho_p)^2] \\
& - \sum_q \left\{ \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}_q - \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \mathbf{j}_q \right) + \frac{W_0^2 \rho_q}{\hbar^2 f_q + \frac{1}{4} (t_1 - t_2) \rho_q} \left[\nabla \left(\frac{\rho}{2} + \frac{\rho_q}{2} \right) \right]^2 \right. \\
& \left. - \frac{(3\pi^2)^{-2/3}}{2f_q} \rho_q^{1/3} m^2 f_q^2 \omega^2 - \frac{(3\pi^2)^{-2/3}}{24f_q} \rho_q^{-2/3} m^2 f_q^2 [(\nabla \rho \times \boldsymbol{\alpha}_0)(\nabla \times \boldsymbol{\alpha}_0)] \right\} + H_{\text{核}}. \quad (16)
\end{aligned}$$

由式(16)取极值, 所得的是 E' , 而总能量应由式(2)计算, 为:

$$E = E'_{\text{min}} + \int \left(\frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - \hbar \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \mathbf{j} \right) d\mathbf{r}. \quad (17)$$

这样所得的转动能密度为:

$$\begin{aligned}
& \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}_q - \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \mathbf{j}_q \right) \\
& = \frac{1}{2} \left[m \rho_q (r^2 \omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2) + \frac{1}{2} m W_0 \rho_q (2\xi_q + \xi_{q'}) \omega^2 \right] + \frac{\hbar^2 \omega^2}{8} \xi_q^2. \quad (18)
\end{aligned}$$

式中,

$$\xi_q = \frac{1}{u_q u_{q'} - v_q v_{q'}} (u_{q'} z_q - v_q z_{q'}), \quad (19a)$$

$$u_q = \frac{\hbar^2 f_q}{3} + (3\pi^2)^{-2/3} \left[\frac{1}{2} t_0 (x_0 - 1) - \frac{1}{12} t_3 \rho^{1/6} \right] \rho_q^{1/3} - \frac{1}{4} (t_1 - t_2) \rho_q, \quad (19b)$$

$$v_q = (3\pi^2)^{-2/3} \rho_q^{1/3} \frac{1}{2} t_0 x_0, \quad (19c)$$

$$z_q = (3\pi^2)^{-2/3} \rho_q^{1/3} \left[1 + \frac{4m}{\hbar^2} \omega_0 \left(\rho_q + \frac{1}{2} \rho_{q'} \right) \right]. \quad (19d)$$

和经典模型相比, 项 $\frac{1}{2} m \rho [r^2 \omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2]$ 从表观上看与经典力学的转动项完全相同。但是应该指出, 这一结果是由于在计算中充分考虑到时间反演受到转动破坏的结果。如果在计算中仅仅在单粒子哈密顿中加上转动项, 而不考虑能量密度的其它变化, 则将在 m 的地方得到有效质量 $m^{*[9]}$ 。转动能中的项 $\frac{1}{4} m W_0 \rho_q (2\xi_q + \xi_{q'}) \omega^2 + \frac{\hbar^2 \omega^2}{8} \xi_q^2$ 是考虑了自旋效应后的项。从式(16)还可看出, 自旋轨道耦合能也和通常的公式不同, 这是由于保留了 $\mathbf{J}_n^2 + \mathbf{J}_p^2$ 项的结果。最后还应指出, 式(16)中还有两项:

$$- \frac{(3\pi^2)^{-2/3}}{2f_q} \rho_q^{1/3} m^2 f_q^2 \omega^2 - \frac{(3\pi^2)^{-2/3}}{24f_q} \rho_q^{-2/3} m^2 f_q^2 [(\nabla \rho \times \boldsymbol{\alpha}_0)(\nabla \times \boldsymbol{\alpha}_0)].$$

这是由于考虑到对几率流 \mathbf{j} 的二次修正而引入的, 可称为对转动能的量子修正。

三、计算及结果的讨论

由于不能直接从哈密顿量的密度泛函变分得到能量和密度分布,我们先假定密度形式:

$$\rho_p = \frac{\rho_{0p}(1 + B_4 e^{-4r^2/(B_1^2 f_p^2)})}{\frac{r - B_1 f_p}{(1 + e^{\xi_p B_2})^{B_3}}},$$

$$\rho_n = \frac{\rho_{0n}(1 + B_8 e^{-4r^2/(B_5^2 f_n^2)})}{\frac{r - B_5 f_n}{(1 + e^{\xi_n B_6})^{B_7}}}.$$

其中,

$$f_q = 1 + a_{20q} Y_{20}(\theta, \varphi) + a_{22q} (Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)) + \dots,$$

$$\xi_q = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_q}{\partial \theta}\right)^2 / f_q^2 + \left(\frac{\partial f_q}{\partial \varphi}\right)^2 / (f_q^2 \sin^2 \theta)},$$

$$q = n, p.$$

B_1, B_2, \dots, B_8 为密度参数, a_{20}, a_{22}, \dots 为形变参数. 通常也可用 β, γ 来代替形变参数 a_{20}, a_{22} ,

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma.$$

选择一定的形变参数 β, γ , 变分哈密顿量 $E' = \int \mathcal{H}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, 根据 E' 取极小的条件, 可以定出八个密度参数 B_1, \dots, B_8 , 由此便可定出不同角动量时的能量 E 和密度分布 ρ_n, ρ_p . 对给定的角动量, 又可变更形变参数, 以求得对应于 E 极小时体系的稳定态能量和形变.

本文分别利用 ETF 半经典理论(应用的 Skm* 势参量见表 1) 和 S. Cohen 的转动核液滴模型 (RLDM) 以及 A. J. Sierk 的有限力程理论 (FRM) 计算了核 ^{116}Sn 、 ^{158}Yb 和 ^{240}Pu 的转动性质, 并对三种模型的计算结果进行了比较.

表 1 Skm* 势参量

	i_0 (MeV · fm ³)	i_1 (MeV · fm ⁵)	i_2 (MeV · fm ⁷)	i_3 (MeV · fm ^{2+3\alpha})	x_0	x_1	x_2	x_3	α	W_0 (MeV · fm ²)
Skm*	-2645.00	410.00	-135.00	15595.00	0.09	0.0	0.0	0.0	1/6	130.0

首先, 我们计算了这三个核在不同角动量时的稳定点. 图 1 在通常的 β - γ 平面画出了三个核的平衡形状随角动量的变化曲线. 可以看出, 三种模型的定性结果是一致的. 对 ^{116}Sn 和 ^{158}Yb , 当 $I < I_1$ (对 ^{116}Sn , $I_1 \approx 62.0$, 对 ^{158}Yb , $I_1 \approx 68.0$) 时, 有稳定的基态, 稳定点位于 $\gamma = 60^\circ$ 的线上 (Z 轴对称, 扁椭球); 当 $I > I_1$ 时, 发生三轴形变, 并有稳定

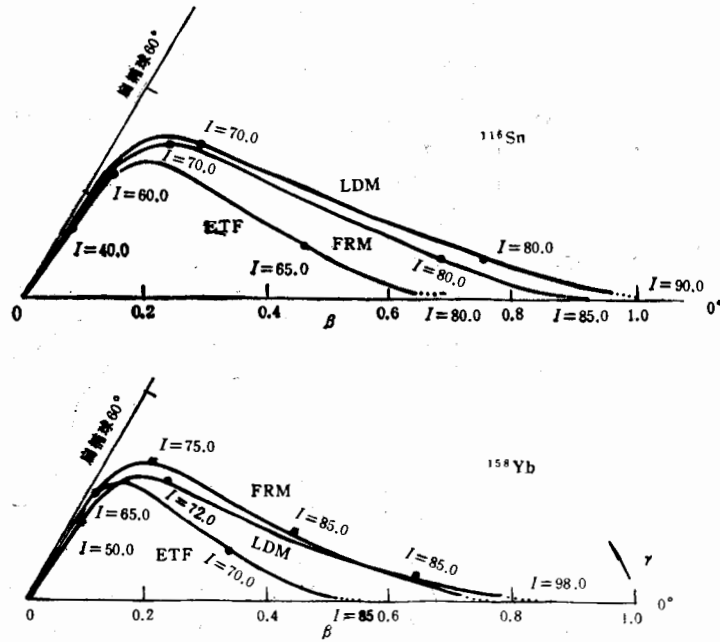


图 1 平衡形状随角动量的变化曲线

ETF: 本工作, LDM: 液滴模型; FRM: 有限力程模型

的三轴形变点, 直到 $I = I_2$ 时(对 ^{116}Sn , $I_2 \approx 80.0$, 对 ^{158}Yb , $I_2 \approx 85.0$), 发生裂变。对重核 ^{240}Pu , $I_1 \approx 60.0$, 并当 $I > I_1$ 时直接发生裂变。

为了便于比较三种模型之间的差异, 我们计算了三个核稳定态的形变、激发能和转动能随角动量的变化。在图 2—4 中, 我们画出了核 ^{158}Yb 稳定态形变、激发能和转动能随 I 的变化曲线。从图中可以看出, 与 RLDM 和 FRM 相比, ETF 模型使核更早发生三轴形变和裂变, 稳定态的激发能和转动能更高一些。我们比较了不同 Skyrme 势时的稳定态形变, 激发能和转动能后发现, 势参数的不同对结果有一定的影响, 要仔细研究转动体

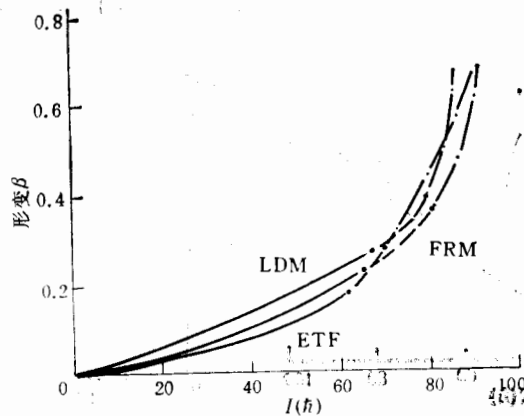


图 2 ^{158}Yb 稳定态形变随 I 变化曲线

— 扁椭球形; ——— 三轴形变; -·-·- 长椭球形至裂变

表 2 量子效应和自旋效应对转动能的影响 (Skm*)

核	角动量 $I(\hbar)$	形变 β	转动能 E_R (MeV)	经典转动能 (含有效质量) E_{R1}		量子效应 E_{R2}		自旋效应 E_{R3}	
				E_{R1} (MeV)	E_{R1}/E_R	E_{R1} (MeV)	E_{R2}/E_{R1}	E_{R3} (MeV)	$ E_{R3}/E_{R1} $
^{116}Sn	20.0	0.0	5.600	5.187	0.926	0.417	0.080	-0.004	0.001
		0.2	6.777	6.178	0.912	0.615	0.100	-0.013	0.002
		0.4	7.666	6.905	0.901	0.821	0.119	-0.047	0.007
	40.0	0.0	22.401	20.746	0.926	1.670	0.080	-0.012	0.001
		0.2	27.108	24.714	0.912	2.458	0.100	-0.054	0.002
		0.4	30.665	27.620	0.901	3.282	0.119	-0.190	0.007
	60.0	0.0	50.402	116.679	0.926	3.757	0.081	-0.078	0.001
		0.2	60.993	55.606	0.912	5.531	0.100	-0.120	0.002
		0.4	68.996	62.145	0.901	7.385	0.119	-0.427	0.007
^{138}Yb	20.0	0.0	3.261	3.076	0.943	0.187	0.061	-0.001	0.0003
		0.2	3.940	3.675	0.933	0.275	0.075	-0.008	0.002
		0.4	4.443	4.121	0.928	0.367	0.089	-0.037	0.009
	40.0	0.0	13.044	12.305	0.943	0.747	0.061	-0.060	0.001
		0.2	15.760	14.701	0.933	1.100	0.075	-0.035	0.002
		0.4	17.773	16.486	0.928	1.464	0.089	-0.150	0.009
	60.0	0.0	29.349	27.687	0.943	1.679	0.061	-0.015	0.001
		0.2	35.461	33.077	0.933	2.474	0.075	-0.078	0.002
		0.4	39.990	37.093	0.928	3.295	0.089	-0.336	0.009
^{240}Pu	20.0	0.0	1.594	1.531	0.961	0.066	0.043	-0.002	0.001
		0.2	1.912	1.828	0.956	0.096	0.053	-0.011	0.006
		0.4	2.130	2.048	0.962	0.126	0.062	-0.039	0.019
	40.0	0.0	6.386	6.131	0.960	0.264	0.043	-0.008	0.001
		0.2	7.661	7.320	0.956	0.387	0.053	-0.041	0.006
		0.4	8.536	8.205	0.961	0.502	0.061	-0.153	0.019
	60.0	0.0	14.367	13.795	0.960	0.594	0.043	-0.019	0.001
		0.2	17.237	16.471	0.956	0.870	0.053	-0.093	0.006
		0.4	19.206	18.461	0.961	1.132	0.061	-0.344	0.019

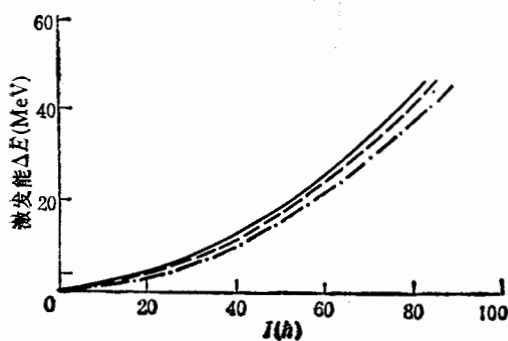


图 3 ^{138}Yb 稳定态激发能随 I 变化曲线

—本文工作 ETF; ----LDM; -·-·-FRM

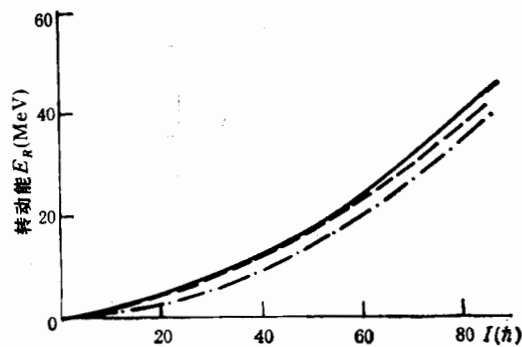


图 4 ^{138}Yb 稳定态转动能随 I 变化曲线

—本文工作 ETF; ----LDM; -·-·-FRM

系,重新确定势参数是必要的。

为了研究自旋及量子效应对转动能的影响,在表 2 中,我们列出了转动能的三部分贡献。其中, E_R 中的第一列为只考虑经典项的贡献时的转动能,第二列为其相对于总量的比值; E_{R_1} 中的第一列为只考虑经典项和量子效应的贡献时的转动能与只考虑经典项时的转动能之差; E_{R_2} 中的第一列为考虑自旋效应和经典项的贡献时的转动能与只考虑经典项时的转动能之差。从表 2 可以看出,转动能的贡献主要来自于经典对应项;量子及自旋效应对转动能有一定的影响,其中,量子效应的影响是可观的,而自旋与轨道的耦合效应非常小,一般情况下可以忽略。密度变化的影响虽然并未在此显示出来,但它的影响是必须考虑的。

这种 ETF 近似可以比较容易地推广到有温度的激发核情形,也可以自洽地引进壳修正。但是,要得到可靠的定量结果,首先还需根据核质量和其它基态性质,更精确地确定势参量。这一工作正在进行中。

参 考 文 献

- [1] B. R. Mottelson et al., *Phys. Rev. Lett.*, **5**(1960), 511.
- [2] J. C. Bacelar et al., *Nucl. Phys.*, **A442**(1985), 509.
- [3] J. D. Garrett et al., *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **36**(1986), 419.
- [4] S. Cohen et al., *Ann. Phys.*, **82**(1974), 557.
- [5] A. J. Sierk, *Phys. Rev.*, **C33**(1986), 2049.
- [6] 陈信义,胡济民,“The macroscopic model of high spin states”,在 *Phys. Rev. C* 待发表。
- [7] 胡济民,《高能物理与核物理》, **5**(1981), 244.
- [8] M. Brack and C. Guet, *Phys. Rep.*, **123**(1985), 275.
- [9] B. Grammaticos et al., *Ann. Phys.*, **129**(1980), 153.
- [10] D. Vantherin and D. M. Brink, *Phys. Rev.*, **C5**(1972), 627.

The Semiclassical Study of Nuclear High Spin States

SHEN XIAOYAN HU JIMIN

(Department of Technical Physics, Peking University, 100871)

ABSTRACT

Nuclear high spin states are studied in the extended Thomas-Fermi approximation. Explicit formula for rotational energy and various corrections are given. Concrete calculations are performed for three typical nuclei: ^{116}Sn , ^{188}Yb and ^{240}Pu . Qualitatively, the results are similar to that of liquid drop model. Quantum corrections to rotational energy (besides shell corrections) cannot be neglected in a quantitative study.