

高亏格 Riemann 面上的世界面 孤子与自由能

颜 骏¹⁾ 胡诗可

(四川大学物理系, 成都 610064)

摘 要

本文通过采用世界面孤子作用量计算了高亏格 Riemann 面上的自由能。这类孤子作用量对应于弦坐标耦合两维标量场。

一、引 言

两年前, Atick 和 Witten 计算了高亏格 Riemann 面上的自由能^[1]。他们工作的主要结论是弦理论的基本规范不变自由度的数目远小于任何通常相对论场论所具有的数目。而仅仅非常奇怪的理论, 例如与 Donaldson 理论^[2]有关的场论才具有如此少的规范不变自由度, 据此 Atick 和 Witten 提出了这一猜想, 即拓扑量子场论也许是弦理论的一个未破缺相^[3-5]。本文将推广 Atick 和 Witten 的工作, 事实上, 我们通过引入两维标量场计算了高亏格 Riemann 面上的自由能。结果表明孤子作用量和自由能与 Atick 和 Witten 的结论有细微差别, 我们将在本文中对这一现象作适当的物理解释。

首先假定如下的 World-Sheet 玻色作用量:

$$S[X, \phi] = S_1[X, \phi] + S_2[X, \phi]. \quad (1)$$

式中, 第一项 $S_1[X, \phi]$ 是玻色弦的作用量加上两维标量场的作用量:

$$S_1[X, \phi] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_a X \partial^a X + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_\beta \phi \partial^\beta \phi. \quad (2)$$

第二项 $S_2[X, \phi]$ 是包含弦坐标 X 耦合两维标量场的整体拓扑作用项^[6]:

$$S_2[X, \phi] = \frac{2}{4\pi\alpha'} \left(\oint_a DX \oint_b DX + \oint_a D\phi \oint_b D\phi \right. \\ \left. + \oint_a DX \oint_b D\phi + \oint_b DX \oint_a D\phi \right). \quad (3)$$

最初, $S_2[X, \phi]$ 是 L. A. Gaume 等人为了在高亏格 Riemann 面上证明玻色-费米等价性而引入的。在这里如 X 和 ϕ 是定义在紧致空间 S^1 或 orbifold S^1/z_2 上的场量, 那么 $S[X, \phi]$ 将成为一类瞬子(孤子)类型的作用量^[7]。为了精确地计算多圈自由能, 我们将首先列出一些有关高亏格 Riemann 面所熟知的事实^[7,8]。记 Σ_g 为亏格(genus) 数为

本文 1990 年 9 月 13 日收到。

1) 现在地址: 西南应用磁学研究所, 绵阳市, 621000。

g 的 Riemann 面, 实际上, 基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ 将满意地分类 Riemann 面, 一般这类群是非 Abel 的. 当 Σ_g 紧致时, Riemann 面上的同调群 (homology groups) 是自由群, 并且具有维数 $\dim H_0(\Sigma_g) = 1$, $\dim H_1(\Sigma_g) = 2g$, 以及 $\dim H_2(\Sigma_g) = 1$. 如图 1 所示, 可以对 $H_1(\Sigma_g)$ 定义一对典范 (canonical) 同调基 a_i, b_i ($1 \leq i \leq g$).

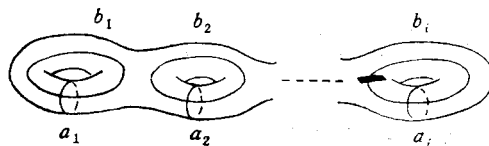


图 1

这类典范同调基 a 和 b 的相交数定义为: $\#(a_i, b_j) = \delta_{ij}$, $\#(a_i, a_j) = 0$, $\#(b_i, b_j) = 0$. 定义在 Σ_g 上的全纯 1-形式 ω_i 具有如下性质:

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad \oint_{b_i} \omega_j = \Omega_{ij}. \quad (4)$$

这里, $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$ 称为周期矩阵, 并满足关系 $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$. Ω_1 和 Ω_2 是实对称矩阵 (Ω_2 是正定的). 为了在流形 $R^{2g} \otimes S^1$ 上计算路径积分, 我们可以将 X 和 ϕ 的时间分量分解成两部分:

$$X = X_c + X_q, \quad \phi = \phi_c + \phi_q. \quad (5)$$

这里, X 和 ϕ 的经典部分 X_c, ϕ_c 将导致孤子类型解, 而 X_q, ϕ_q 则对应于量子起伏部分. 为了计算的简单, 我们暂且忽略 X 和 ϕ 的量子部份. 此时 X_c, ϕ_c 是调和的但并非单值, 其微分 DX_c 及 $D\phi_c$ 才具有单值形式. 一般情况下, 对于经典部分来说, 我们可以将 DX 及 $D\phi$ 写成:

$$DX = \partial X + \bar{\partial} X, \quad D\phi = \partial \phi + \bar{\partial} \phi. \quad (6)$$

式中, $\partial X(\partial \phi)$ 和 $\bar{\partial} X(\bar{\partial} \phi)$ 分别是全纯和反全纯的微分, 因此它们可以展开成:

$$\partial X = \sum_{i=1}^g \lambda_i \omega_i, \quad \bar{\partial} X = \sum_{i=1}^g \bar{\lambda}_i \cdot \bar{\omega}_i. \quad (7)$$

$$\partial \phi = \sum_{i=1}^g \theta_i \omega_i, \quad \bar{\partial} \phi = \sum_{i=1}^g \bar{\theta}_i \cdot \bar{\omega}_i. \quad (8)$$

λ_i 和 θ_i 是合适的复系数. λ_i 和 θ_i 的允许值取决于下列的量子化条件:

$$\oint_{a_i} DX = 0, \quad \oint_{b_i} DX = \beta m_i. \quad (9)$$

$$\oint_{a_i} D\phi = \beta n_i, \quad \oint_{b_i} D\phi = 0. \quad (10)$$

这里, 任意整数 (m, n) 是沿着同调基循环的 $2g$ 个绕数 (Winding numbers), β 是 Riemann 面上的温度参量^[9].

根据公式(4)以及(6)–(10), 可以算出系数 λ_i, θ_i , 结果应为:

$$\lambda_i = -\frac{1}{2} i\beta(\Omega_2^{-1})_{ik} m_k. \quad (11)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} i\beta(Q_2^{-1})_{ik} \bar{Q}_{klnl}. \quad (12)$$

为了导出孤子作用量,我们还需要 Riemann 面上另外一个恒等式:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \omega_i \wedge \bar{\omega}_i &= \sum_g \left(\oint_{a_g} \omega_i \oint_{b_g} \bar{\omega}_i - \oint_{b_g} \omega_i \oint_{a_g} \bar{\omega}_i \right) \\ &= -2i(Q_2)_{ii}. \end{aligned} \quad (13)$$

下面我们将转向孤子作用量和自由能的计算.

二、亏格数 $g=1$ 的 Riemann 面上的自由能

首先,我们假定 $g=1$ 的世界面是环面 $T^2 = S^1 \otimes S^1$, 因此基本群 $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 表示了二个绕数方向,而上同调群 $H^1(T^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^2$ 则刻划了世界面上的旋结构. 遵照公式(11),(12),亏格数 $g=1$ 的 Riemann 面上的复系数可以写成:

$$\lambda = -\frac{i}{2} \beta m / \text{Im} \tau, \quad \bar{\lambda} = \frac{i}{2} \beta m / \text{Im} \tau. \quad (14)$$

$$\theta = \frac{i}{2} \beta \bar{\tau} / \text{Im} \tau, \quad \bar{\theta} = -\frac{i}{2} \beta \tau / \text{Im} \tau. \quad (15)$$

这里, $\tau = \text{Re} \tau + i \text{Im} \tau$ 代表复环面上的模参量. 由这些模参量所构成的模形式和模空间不仅是代数几何研究中的强有力工具,而且对于弦场论中的许多深刻问题的理解也有重要作用. 我们还注意到恒等式(13)此时已成为 $\int_{\Sigma_{g=1}} \omega \wedge \bar{\omega} = -2i \text{Im} \tau$. 因此,我们可以先算出作用量 S_1 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma_{g=1}} d^2\sigma \partial_a X \partial^a X + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma_{g=1}} d^2\sigma \partial_\beta \phi \partial^{\beta} \phi \\ &= \frac{i}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma_{g=1}} \partial X \wedge \bar{\partial} X + \frac{i}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma_{g=1}} \partial \phi \wedge \bar{\partial} \phi. \end{aligned}$$

将公式(7)(8),(14)(15)代入得:

$$S_1 = \left(\frac{\beta^2 \cdot m^2}{4\pi\alpha'} \right) / \text{Im} \tau + \left(\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} n^2 |\tau|^2 \right) / \text{Im} \tau. \quad (16)$$

因此,整个单圈孤子作用量为:

$$\begin{aligned} S_{g=1} &= S_1 + S_2 \\ &= \left(\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} m^2 \right) / \text{Im} \tau + \frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} (2mn) + \left(\frac{\beta^2 n^2}{4\pi\alpha'} |\tau|^2 \right) / \text{Im} \tau. \end{aligned} \quad (17)$$

容易看出的是,我们所导出的单圈孤子作用量和 Atick-Witten 的结论有细微的差别. 主要的物理根源是内禀真空 ϕ 的起伏导致了玻色弦与两维标量真空的耦合,这集中表现在作用量中的拓扑项 S_2 上. 其直接的物理效应就是单圈自由能(甚至多圈)将多出一个模参量有关的因子,这在以下的计算中可以明显地看到.

沿着 Atick 和 Witten 的思路,我们可以定义温度相关的单圈自由能 $F(\beta, \tau)$ 为:

$$F(\beta, \tau) = \beta \Lambda_{\text{hoic}}^{(1)} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{m}} \exp(-S_{g=1}). \quad (18)$$

这里, $\Lambda_{\text{bose}}^{(1)}$ 是玻色弦的单圈宇宙常数:

$$\Lambda_{\text{bose}}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\alpha'} \right)^{13} \int_D d^2\tau (\text{Im}\tau)^{-14} e^{4\pi\text{Im}\tau} |\eta(e^{2\pi i\tau})|^{-48}. \quad (19)$$

为了精确地算出自由能 $F(\beta, \tau)$, 我们可以将(18)式中的 Poisson 和代替为连续的路径积分 $\sum_n \sum_m \rightarrow \iint dndm$, 因此我们得到了下面的近似:

$$F(\beta, \tau) = \beta \Lambda_{\text{bose}}^{(1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dndm \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} (2nm) - \left(\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} m^2 \right) / \text{Im}\tau - \left(\frac{\beta^2 n^2}{4\pi\alpha'} |\tau|^2 \right) / \text{Im}\tau \right\}. \quad (20)$$

第一步的计算, 可以对绕数变量 m 进行积分, 所以有:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dm \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} 2nm - \left(\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} m^2 \right) / \text{Im}\tau \right\} \\ &= \frac{2\pi}{\beta} (\alpha' \text{Im}\tau)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} \text{Im}\tau n^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

其次, 对变量 n 的积分可以简单地给为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dn \exp \left\{ \frac{\beta^2 n^2}{4\pi\alpha'} \text{Im}\tau - \left(\frac{\beta^2 n^2}{4\pi\alpha'} |\tau|^2 \right) / \text{Im}\tau \right\} = \frac{2\pi}{\beta} \text{Re} \tau (\alpha' \text{Im}\tau)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

综合(21), (22)式, 我们得到了亏格数 $g=1$ 的 Riemann 面上的自由能, 所以:

$$F(\beta, \tau) = (4\pi^2\alpha') \beta^{-1} \Lambda_{\text{bose}}^{(1)} (\text{Im}\tau / \text{Re} \tau). \quad (23)$$

这就是单圈自由能的最后表达式。正如我们所期望的那样, 这一自由能的形式和 Atick-Witten 的结论有细微的差别。这主要体现在自由能的表达式(23)中多出了一个模参量相关的因子 $(\text{Im}\tau / \text{Re} \tau)$ 。一个可能的物理解释就是内禀真空 ϕ 的起伏导致了弦与两维标量场的作用, 这一作用不仅体现在孤子作用量上, 更明显的是表现为自由能的差别。接下来, 我们将以上思想进行推广, 以便算出高亏格 Riemann 面上的自由能。

三、高亏格 Riemann 面上的自由能

下面我们转向对高亏格 Riemann 面上的自由能的讨论。为此, 不妨先算出孤子作用量 S_g , 这里:

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{S}_g} d^2\sigma \partial_\alpha X \partial^\alpha X + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{S}_g} d^2\sigma \partial_\beta X \partial^\beta X + S_2 \\ &= \frac{i}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{S}_g} \partial X \Lambda \partial X + \frac{i}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{S}_g} \partial \phi \Lambda \partial \phi + S_2. \end{aligned} \quad (24)$$

将公式(3)(7)(8), 复系数表达式(11)(12)代入(24), 并且利用恒等式(13), 我们不难得到 S_g 。结果为:

$$S_g = \frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} m^T A m + \frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} (2m^T n) + \frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} n^T B n. \quad (25)$$

式中矩阵 $A = Q_2^{-1}$, 并且 $n^T B n = (\bar{Q}n)^T Q_2^{-1} Qn$ 。可以看出的是, 甚至多圈情形下, 我们导出的孤子作用量和 Atick-Witten 的结果仍有细微差别。接下来, 我们仍可定

义一类与温度有关的多圈自由能:

$$F(\beta, \mathcal{Q}) = \beta \cdot \Lambda_{\text{bosc}}^{(g)} \sum_n \sum_m \exp(-S_g). \quad (26)$$

这里, $\Lambda_{\text{bosc}}^{(g)}$ 是玻色弦的 g -圈宇宙常数。在下面的计算中, 我们可以采取类似于单圈自由能的计算步骤。例如可以将对绕数变量 m 的求和代替为对连续变量 m 的积分, 那么我们有:

$$\sum_m \exp(-S) \sim \int_{\mathbb{R}^g} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} m^T A m - \frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} (2m^T n)\right) \prod_{l=1}^g dm_l. \quad (27)$$

这里积分取在 g 维的实空间上, 根据 Riemann 面上 theta 函数的性质^[10], 可以求得(27)式的精确积分, 结果是:

$$(4\pi^2\alpha'/\beta^2)^{\frac{g}{2}} (\det \mathcal{Q}_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} n^T \mathcal{Q}_2 n\right). \quad (28)$$

假如又将 Poisson 和 \sum_n 代替为对另一绕数变量 n 的积分, 那么即可算出高亏格 Riemann 面上的自由能 $F(\beta, \mathcal{Q})$, 其表达式为:

$$\begin{aligned} F(\beta, \mathcal{Q}) &= \beta \Lambda_{\text{bosc}}^{(g)} (4\pi^2\alpha'/\beta^2)^{\frac{g}{2}} (\det \mathcal{Q}_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^g} \left\{ -\frac{\beta^2}{4\pi\alpha'} n^T (B - \mathcal{Q}_2) n \right\} \prod_{l=1}^g dn_l \\ &= \beta \Lambda_{\text{bosc}}^{(g)} (4\pi^2\alpha'/\beta^2)^g \det(\mathcal{Q}_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} (\det(B - \mathcal{Q}_2))^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

所以在多圈情形下, 我们的结果仍和 Atick-Witten 的结论是类似的, 但自由能 $F(\beta, \mathcal{Q})$ 却多出一个模参量有关的因子 $\det(\mathcal{Q}_2^{-1})^{\frac{1}{2}} (\det(B - \mathcal{Q}_2))^{-\frac{1}{2}}$. 而这一因子和 Riemann 面上的周期矩阵 \mathcal{Q} 有密切联系。关于这一现象的物理解释仍和单圈自由能的情形一样, 这里就不详细讨论了。

四、讨 论

在下面的分析中我们将给出以上结果的一个自然的物理解释。我们可以写出高亏格自由能的一个简单的表示式, 根据公式(29), 实际上单位体积的自由能应为:

$$F_g/T = (4\pi^2\alpha') T \Lambda(\beta)_g \cdot \alpha(\text{模}). \quad (30)$$

式中 $T = \beta^{-1}$, $\alpha(\text{模})$ 是与周期矩阵相关的模参量, 带有温度的玻色弦宇宙常数定义为:

$$\Lambda(\beta)_g = (4\pi^2\alpha' T)^{g-1} \Lambda_g. \quad (31)$$

这里, 高亏格 Riemann 面上的宇宙常数是:

$$\Lambda_g = - \int_{\mathbb{H}^g} d\mu(m) \Lambda(\mathcal{Q}, \bar{\mathcal{Q}}). \quad (32)$$

$d\mu(m)$ 是模空间 M_{3g-3} 上的测度, Λ 也是 Riemann 面上周期矩阵 $\mathcal{Q}(\in C^{g(g+1)/2})$ 的函数。 \mathbb{H}^g 表示 $SP(2g, \mathbb{Z})$ 的基本域。从公式(30)我们可以看出这样一个特征, 即在大 T 近似的极限下, $F_{\text{弦}}/T \sim T \ll F_{\text{场论}}/T \sim T^{D-1}$. 这里 D 是通常量子场论的时空维数。这就意味着在某个合适的情形下, 弦理论中的规范不变自由度的数目远小于于任

何通常量子场论中的自由度的数目。因此在短距离时空上规范协变性是保留的对于 Donaldson 类型的场论也许是成立的。所以本文在更一般意义上验证了 Atick 和 Witten 的猜想, 即拓扑量子场论也许是弦理论的一个未破缺的相。但应该看到的是仍有许多问题有待于进一步澄清。如怎样才能完整地刻划弦的相变? 这类相变和拓扑场论中量子引力的 unbroken Phase 到底有什么深刻联系? 另外还有高亏格自由能的对偶性质, 模不变性的证明等等。最近已有部分文献开始讨论这些问题^[11-14]。我们希望不久将回到这些论题的研究上来。

致谢: 我们希望对 J. G. Taylor 教授和 M. Yu 博士就弦理论和高亏格 Riemann 面的有益讨论表示感谢。

参 考 文 献

- [1] J. J. Atick and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B310**(1988), 291.
- [2] S. Donaldson Polynomial invariants smooth 4-manifold. Oxford preprint (1987).
- [3] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **117**(1988), 353; **118**(1988), 411.
- [4] E. Witten, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 670.
- [5] Yan Jun, Lijian-nan and Hu shike, *Chin. Phys. Lett.*, **9**(1989), 425, The world-sheet instanton on cosmic orbifold, *Chin. Phys. Lett.*, **8**(1990), 381.
- [6] L. A. Gaume, G. Moore, P. Nelson, C. Vafa and J. B. Bost, *Phys. Lett.*, **178B**(1986), 41.
- [7] L. A. Gaume, G. Moore, C. Vafa, *Comm. Math. Phys.*, **106**(1986), 1.
- [8] A. Restuccia and J. G. Taylor, *Comm. Math. Phys.*, **112**(1987), 447; *Phys. Rep.*, **174**(1989), 28.
- [9] B. Maclain and B. Roth, *Comm. Math. Phys.*, **111**(1987), 539.
- [10] D. Mumford Tata lectures on The ta (1) (Birkhauser-1983).
- [11] K. H. O'Brien and C. I. Tan, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 1184.
- [12] E. Álvarez and M. A. R. Osorio, *Nucl. Phys* **B304**(1988), 327.
- [13] E. Álvarez and M. A. R. Osorio, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 1150.
- [14] Y. Leblanc, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 831.

The World Sheet Soliton and free energy on High Genus Riemann Surface

YAN JUN HU SHIKE

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064)

ABSTRACT

The free energy on high genus Riemann surface has been calculated by using the world sheet soliton action. This soliton-like action is corresponding to the bosonic string coupled to the two-dimensional scalar field.